

## 随机和认知混合不确定系统的全局灵敏度分析方法

郭惠昕<sup>1</sup>, 锁 斌<sup>2</sup>

(1. 长沙学院 机电工程学院, 长沙 410003; 2. 中国工程物理研究院 电子工程研究所, 绵阳 621900)

**摘 要** 为计算具有随机不确定性和认知不确定性的混合不确定系统灵敏度, 提出一种基于证据理论和条件概率理论的全局灵敏度分析方法. 用证据理论对认知不确定性变量进行表征, 并提出两种基于证据理论的随机采样方法, 包括一次随机抽样法和二次随机抽样法. 运用条件概率理论, 提出存在认知不确定性条件下混合不确定系统的 Sobol' 全局灵敏度指标, 经过理论推导给出一阶灵敏度及总灵敏度的计算公式, 并设置单循环的拟蒙特卡罗方法实现灵敏度的近似数值计算. 开发了灵敏度分析程序, 并给出了典型应用实例. 实例表明, 新方法的分析结果正确, 计算工作量可控.

**关键词** 灵敏度分析; 拟蒙特卡罗方法; 证据理论; 不确定系统; 随机不确定性; 认知不确定性

## Approach to global sensitivity analysis of hybrid uncertain system with aleatory and epistemic uncertainties

GUO Huixin<sup>1</sup>, SUO Bin<sup>2</sup>

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Changsha University, Changsha 410003, China;  
2. Institute of Electronic Engineering, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, China)

**Abstract** To compute the sensitivity of the hybrid uncertain system in which both aleatory and epistemic uncertainties are present, a global sensitivity analysis method is proposed on the basis of evidence theory and conditional probability theory. The aleatory uncertain variables are represented by using the evidence theory. For epistemic uncertain variable, two stochastic sampling approaches based on the evidence theory are put forward, which are named one-step and two-step random sampling approach, respectively. With the conditional probability theory and the Sobol' method used, the global sensitivity indexes of the hybrid uncertain system are proposed in the presence of epistemic uncertainties, and the formulas of the first-order and total sensitivity indexes are derived. A single-loop quasi-Monte Carlo simulation is developed and it is used to approximately calculate the sensitivity indexes proposed. The sensitivity analysis program based on Matlab is designed. A typical example is presented and its results show that the proposed method is correct and its computational cost is acceptable.

**Keywords** sensitivity analysis; quasi-Monte Carlo method; evidence theory; uncertain system; aleatory uncertainty; epistemic uncertainty

### 1 前言

设工程系统的输入参数  $x$  和系统响应  $Y$  的关系可用数学模型  $Y = h(x) = h(\mathbf{V}, \mathbf{U})$  表征, 其中,  $\mathbf{V}$  为随机变量集,  $\mathbf{U}$  为认知不确定性变量集; 此类系统为随机不确定性与认知不确定性混合并存的系统, 可简称

收稿日期: 2017-03-13

作者简介: 郭惠昕 (1962–), 男, 汉, 湖南桃源人, 教授, 硕士, 研究方向: 不确定性分析, 可靠性设计, 稳健设计等, E-mail: xinhuiquo@126.com; 锁斌 (1979–), 男, 回族, 陕西西乡人, 副研究员, 博士, 研究方向: 不确定性信息处理, 系统可靠性分析与评估, E-mail: suo.y.y@163.com.

基金项目: 湖南省自然科学基金 (13JJ6095); 长沙市科技计划项目 (k1705012)

Foundation item: Natural Science Foundation of Hunan Province of China (13JJ6095); Science and Technology Plan Projects of Changsha City of China (k1705012)

中文引用格式: 郭惠昕, 锁斌. 随机和认知混合不确定系统的全局灵敏度分析方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(7): 1888–1896.

英文引用格式: Guo H X, Suo B. Approach to global sensitivity analysis of hybrid uncertain system with aleatory and epistemic uncertainties[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2018, 38(7): 1888–1896.

为“混合不确定系统”. 显见,  $x$  的变异无疑会传递给  $Y$ , 从而引起系统响应  $Y$  的变异. 灵敏度分析 (SA) 是研究模型输出  $Y$  的变异与输入参数  $x$  的变异之间如何分解的科学<sup>[1]</sup>. 通过 SA, 可以量化输入参数对模型输出不确定性影响的重要程度, 并找到影响模型响应变异的关键因素, 为提高系统输出的稳健性提供方向和途径. 现有的混合不确定系统灵敏度分析方法大致有如下两类:

### 1) 非概率灵敏度分析方法

根据认知不确定性变量  $U$  的不同表征方法, 采用非概率分析方法进行灵敏度分析, 这类方法的特点是必须定义新的非概率灵敏度指标. 邱志平等<sup>[2]</sup> 以区间数学为理论基础, 提出可进行非线性结构灵敏度分析的区间方法. 李贵杰和吕震宙等<sup>[3]</sup> 基于结构非概率可靠性指标理论, 提出基于区间变量的结构非概率可靠性灵敏度分析方法. 基于认知不确定变量  $U_i$  的证据理论表征, Guo 和 Du<sup>[4,5]</sup> 提出了一种基于  $d_{KS}$  距离的灵敏度指标. 由于  $d_{KS}$  可能受到  $U_i$  的量纲的影响, 锁斌等<sup>[6]</sup> 提出了另外一种基于证据理论的可靠度灵敏度指标. 不过, 不论是区间分析方法还是证据理论方法, 当变量维数较大时, 这类方法会出现区间 (或焦元) 组合爆炸问题, 且目前还没有很好的解决方法.

### 2) 基于条件概率的灵敏度分析方法

假定认知不确定性变量服从某种主观随机概率分布, 基于概率论中条件期望和条件方差理论, 采用传统的灵敏度分析方法进行分析, 典型文献如 [7] 和 [8]. 文献 [9] 给出了求解具有认知不确定性的系统灵敏度指标的双层循环蒙特卡罗方法, 但该法的不足之处是计算效率低. 为了克服双层循环蒙特卡罗方法的缺点, 文献 [7, 8] 提出了一种单层循环蒙特卡罗方法, 有效提高了计算效率. 不过, 此类方法把认知不确定性变量主观地认定其服从某种随机概率分布<sup>[7,8]</sup>, 不能客观地表征其认知不确定性特征, 不免带来信息损失.

针对现有方法的不足, 在证据理论的基础上, 提出认知不确定性变量的两种随机采样方法, 推导出基于 Sobol' 方法的混合不确定性系统灵敏度指标, 进而提出一种新的全局灵敏度分析方法, 开发了基于 Matlab 的灵敏度分析程序. 最后, 给出一个典型实例, 藉此证明所提方法的有效性.

## 2 基于证据理论的认知不确定性表征及其随机采样方法

证据理论<sup>[10,11]</sup> 已成为表征, 量化和处理认知不确定性信息的有效工具. 由于在证据理论中需要的先验数据比概率论中需要的先验数据更容易获得, 再加上 Dempster 合成法则可以综合不同专家或数据源的知识或数据, 这使得证据理论得到了越来越广泛的应用.

### 2.1 证据理论简介

设  $\Theta$  为辨识框架. 如果集函数  $m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$  ( $2^\Theta$  为  $\Theta$  的幂集,  $\emptyset$  表示空集) 满足

$$\begin{cases} m(\emptyset) = 0, \\ \sum_{A \subset \Theta} m(A) = 1, \end{cases} \quad (1)$$

则称  $m$  为辨识框架  $\Theta$  上的基本可信度分配; 对  $\forall A \subset \Theta$ ,  $m(A)$  称为  $A$  的基本概率指派 (BPA).

若  $m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$  为辨识框架  $\Theta$  上的基本可信度分配. 对  $\forall A \subset \Theta$ , 称由

$$Bel = \sum_{B \subset A} m(B), \quad (2)$$

$$Pl = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \quad (3)$$

所定义的函数分别称为  $\Theta$  上  $A$  的信度函数和似真度函数.

设  $Bel_1, Bel_2, \dots, Bel_n$  是辨识框架  $\Theta$  上的  $n$  个信度函数,  $m_1, m_2, \dots, m_n$  分别是其对应的基本可信度分配. 如果  $Bel_1 \oplus Bel_2 \oplus \dots \oplus Bel_n$  存在且基本可信度分配为  $m$ , 则

$$\begin{cases} \forall A \subset \Theta, \\ m(A) = K \cdot \sum_{\substack{A_1, \dots, A_n \subset \Theta \\ A_1 \cap \dots \cap A_n = A}} m_1(A_1) \cdot m_2(A_2) \cdot \dots \cdot m_n(A_n) \end{cases} \quad (4)$$

为  $n$  个证据合成的 Dempster 法则,  $m(A)$  表示了多个证据合成后  $A$  的可信度大小. 其中:

$$K = \left[ 1 - \sum_{\substack{A_1, \dots, A_n \subseteq \Theta \\ A_1 \cap \dots \cap A_n = \emptyset}} m_1(A_1) \cdot m_2(A_2) \cdot \dots \cdot m_n(A_n) \right]^{-1}.$$

## 2.2 打赌概率分布函数及其扩展

目前, 证据理论的模型解释主要有 4 种: 上下概率模型解释<sup>[10]</sup>, 广义化 Bayes 理论解释, 随机集理论解释和可传递信度模型<sup>[12]</sup> 解释. Smets 等<sup>[12]</sup> 提出的证据理论的可传递信度模型 (TBM) 是一种两层的递进模型.

Credal 层: 位于底层, 在该层中获取信度并对其进行量化, 赋值和更新处理.

Pignistic 层: 位于上层, 它将 Credal 层上的信度转换成 Pignistic 概率 (或称打赌概率), 并由此做出决策. 其中, Pignistic 概率分布密度函数的公式为:

$$d(x) = Bet(x) = \sum_{x \in A \subseteq \Theta} \frac{m(A)}{\|A\|}, \quad (5)$$

式中,  $\|A\|$  为  $A$  的势, 即  $A$  所含元素的个数.

显然, 式 (5) 只适用于识别框架  $\Theta$  是离散的情形, 因为这样才能计算出  $\|A\|$ . 如果  $\forall A_i \subset \Theta$ ,  $A_i$  不是离散的而是一系列闭区间  $[A_i^{\min}, A_i^{\max}]$ , 则需对式 (5) 进行扩展. 设  $|A_i|$  表示闭区间  $[A_i^{\min}, A_i^{\max}]$  的宽度 ( $A_i^{\max} - A_i^{\min}$ ). 若  $\Theta$  含有  $K_\Theta$  个焦元  $A_i$ , 则识别框架  $\Theta$  上命题  $x$  的 Pignistic 概率分布密度函数演变为:

$$d(x) = Bet(x) = \sum_{i=1}^{K_\Theta} \varphi_{A_i}(x) \cdot \frac{m(A_i)}{|A_i|}, \quad (6)$$

式中,  $\varphi(x)$  为标识函数, 其表达式为:

$$\varphi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in A_i, \\ 0, & \text{if } x \notin A_i. \end{cases}$$

## 2.3 认知不确定性变量的证据理论表征

鉴于证据理论的特点, 拟用证据理论表示认知不确定性变量  $U$ , 其表征格式为:

$$U_i = \begin{bmatrix} A_{i1}^{\min} & A_{i1}^{\max} & m_i(A_{i1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{iK_{\Theta_i}}^{\min} & A_{iK_{\Theta_i}}^{\max} & m_i(A_{iK_{\Theta_i}}) \end{bmatrix}_{K_{\Theta_i} \times 3}, \quad (7)$$

式中,  $U_i$  表示  $U$  中的第  $i$  个认知不确定性变量, 它具有  $K_{\Theta_i}$  个焦元, 每个焦元  $A_{ij}$  为一个闭区间  $[A_{ij}^{\min}, A_{ij}^{\max}]$  ( $j = 1, 2, \dots, K_{\Theta_i}$ ), 该焦元的基本概率指派 (BPA) 为  $m_i(A_{ij})$ .

## 2.4 认知不确定性变量的随机采样方法

### 1) 一次随机采样法

该方法是基于证据理论的可传递信度模型解释的随机采样方法. 由式 (6) 的 Pignistic 概率分布密度函数, 求出认知不确定性变量  $U$  的 Pignistic 累计概率分布函数  $CDF_p(U)$  及其反函数  $CDF_p^{-1}(U)$ . 产生一个在  $[0, 1]$  内均匀分布的随机数  $r$ , 则认知不确定性变量  $U$  的一个样本  $U_{\text{rad}}$  为:

$$U_{\text{rad}} = CDF_p^{-1}(r).$$

### 2) 二次随机采样法

设认知不确定性变量  $U$  的识别框架为  $\Theta$ , 且  $\Theta$  含有  $K_\Theta$  个焦元  $A_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, K_\Theta$ ), 每个焦元为一闭区间  $A_i = [A_i^{\min}, A_i^{\max}]$ , 焦元  $A_i$  对应的 BPA 为  $m(A_i)$ . 由于认知不确定性的存在, 我们对  $m(A_i)$  在区间  $A_i$  上的分布并不清楚.  $U$  的累计分布曲线有 2 条<sup>[10]</sup>, 分别为上累计概率分布曲线  $\overline{CDF}(U)$  和下累计分布概率曲线  $CDF(U)$ , 如图 1 所示. 若  $m(A_i)$  在区间  $A_i$  上的分布已经确定, 则认知不确定性已经消除, 此时, 认知不确定性变量  $U$  将退化为随机变量, 且其  $\overline{CDF}(U)$  和  $CDF(U)$  曲线将重合为一条曲线. 显然,  $\overline{CDF}(U)$  和  $CDF(U)$  的距离越大, 则  $U$  包含的认知不确定性越大.  $\overline{CDF}(U)$  和  $CDF(U)$  可根据证据理论方法<sup>[10]</sup> 求出, 即  $\overline{CDF}(U) = Pl(U)$ ,  $CDF(U) = Bel(U)$ .

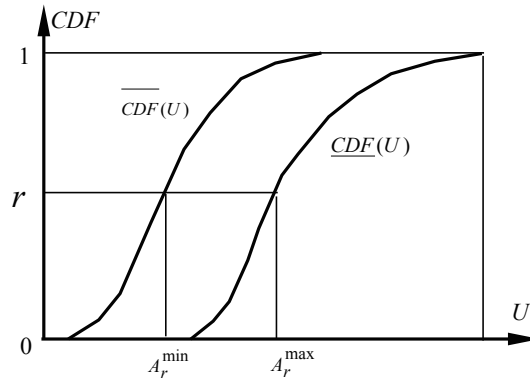


图 1 上下累计概率分布曲线

认知不确定性变量  $U$  的二次采样法是一种基于证据理论的上下概率模型解释<sup>[10]</sup>的随机采样方法, 由以下两次随机采样近似实现.

第 1 次采样: 产生一个在  $[0, 1]$  内均匀分布的随机数  $r$ , 分别由  $\overline{CDF}(U)$  和  $\underline{CDF}(U)$  的反函数得到 2 个随机样本 (参见图 1), 即:

$$A_r^{\min} = \overline{CDF}^{-1}(r), A_r^{\max} = \underline{CDF}^{-1}(r).$$

第 2 次采样: 由于认知不确定性的存在, 不确定性变量  $U$  在闭区间  $[A_r^{\min}, A_r^{\max}]$  内的分布规律并不知道. 为此, 另产生一个  $[0, 1]$  内的随机数  $r'$ , 则不确定性变量  $U$  的一个随机样本为:

$$U_{\text{rad}} = A_r^{\min} + r'(A_r^{\max} - A_r^{\min}).$$

第 2 次采样时, 需要确定随机数  $r'$  的生成方法. 实际上, 由于认知不确定性的存在,  $r'$  的分布规律是无法确定的. 根据最大熵原理, 均匀分布的熵最大, 由此生成的随机数  $r'$  最不具偏见. 故建议随机数  $r'$  按服从均匀分布处理.

值得指出的是, 一次采样法的本质是忽略了  $U$  的部分认知不确定性,  $U$  退化成了服从 Pignistic 概率分布密度函数的随机变量. 相比之下, 二次采样法比较真实地反映了认知不确定性变量的特点.

### 3 随机不确定系统的 Sobol' 全局灵敏度分析方法简介

#### 3.1 Sobol' 方法的灵敏度指标

Sobol' 法<sup>[13,14]</sup>是一种基于方差分解的全局灵敏度分析方法, 用于求解仅具有随机变量的系统灵敏度分析问题. 设所研究的系统模型为:

$$f = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{8}$$

式中,  $\mathbf{x} \in I^n$ ,  $I$  为单位区间  $[0, 1]$ ,  $I^n$  为  $n$  维单位超立方体. Sobol' 方法的独特思想是把  $f(\mathbf{x})$  分解为  $2^n$  项之和, 即:

$$f(\mathbf{x}) = f_0 + \sum_i f_i(x_i) + \sum_{i < j} f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{12\dots n}(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{9}$$

其中,  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq n$ . Sobol' 早期提出的分解方法是多维 Fourier Haar Series 分解, 在其后的文献<sup>[13]</sup>中, Sobol' 提出了一种更具代表性的多重积分法, 其  $f(\mathbf{x})$  的总方差为:

$$D = \int f^2(\mathbf{x})d\mathbf{x} - f_0^2 = \sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} D_{i_1 i_2 \dots i_s} = \sum_{s=1}^n D_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} D_{ij} + \dots + D_{12\dots n}, \tag{10}$$

式中, 所有积分均在  $I^n$  内积分.  $f(\mathbf{x})$  的偏方差为:

$$D_{i_1 i_2 \dots i_s} = \int f_{i_1 \dots i_s}^2(x_{i_1}, \dots, x_{i_s})dx_{i_1} \dots dx_{i_s}, \tag{11}$$

式中,  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq n$ .

Sobol' 法的全局灵敏度指标定义为:

$$S_{i_1 i_2 \dots i_s} = \frac{D_{i_1 i_2 \dots i_s}}{D}. \tag{12}$$

所有各阶灵敏度指标非负, 且:

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_s} S_{i_1 i_2 \dots i_s} = \sum_{s=1}^n S_i + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} S_{ij} + \dots + S_{1,2,\dots,n} = 1. \quad (13)$$

式中,  $S_i = \frac{D_i}{D}$  为一阶灵敏度,  $S_{ij} = \frac{D_{ij}}{D}$  为二阶灵敏度, 等等.

### 3.2 自变量子集的灵敏度指标

对式 (8) 中的  $\boldsymbol{x}$ , 设  $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ ,  $\boldsymbol{y}$  为  $\boldsymbol{x}$  的  $m$  维子集,  $1 \leq m \leq n-1$ ,  $\boldsymbol{z}$  为  $\boldsymbol{y}$  的  $(n-m)$  维补集. 记  $\boldsymbol{y} = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m})$ ,  $1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_m \leq n$ .

设  $K = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ . 子集  $\boldsymbol{y}$  的方差定义为:

$$D_y = \sum_{s=1}^m \sum_{(i_1 \leq \dots \leq i_s) \in K} D_{i_1 i_2 \dots i_s}. \quad (14)$$

同理可定义子集  $\boldsymbol{z}$  的方差  $D_z$ . 与子集  $\boldsymbol{y}$  对应的总方差为:

$$D_y^{\text{tot}} = D - D_z. \quad (15)$$

Sobol' 法中子集  $\boldsymbol{y}$  的一阶及总灵敏度指标分别定义为:

$$S_y = \frac{D_y}{D}, \quad S_y^{\text{tot}} = \frac{D_y^{\text{tot}}}{D} = 1 - \frac{D_z}{D}. \quad (16)$$

### 3.3 Sobol' 灵敏度指标计算的随机模拟方法

由上述可知, 为实现 Sobol' 灵敏度指标的计算, 需计算  $f_0, D, D_i, D_i^{\text{tot}}$  等统计量. 根据 Sobol' 的方差分解原理, 可构造计算这些统计量的蒙特卡罗法 [14]. Saltelli 等 [15,16] 提出了一种评估这些统计量的蒙特卡罗方法, 该方法具有较高的计算效率. 设  $\boldsymbol{A}$  和  $\boldsymbol{B}$  是 2 个独立同分布的  $n \times N$  维样本矩阵,  $N$  为采样次数;  $\boldsymbol{A}_B^{(i)}$  是  $n \times N$  维矩阵, 其第  $i$  列用  $\boldsymbol{B}$  的第  $i$  列替代, 其余列和  $\boldsymbol{A}$  的其它  $(n-1)$  列相同. 则  $f_0, D, D_i, D_i^{\text{tot}}$  的蒙特卡罗估计 [15] 分别为:

$$\begin{cases} \hat{f}_0 = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N (f(\boldsymbol{A})_j + f(\boldsymbol{B})_j), \\ \hat{D}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(\boldsymbol{B})_j (f(\boldsymbol{A}_B^{(i)})_j - f(\boldsymbol{A})_j), \\ \hat{D} = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \{ (f^2(\boldsymbol{A})_j - f_0^2) + [f^2(\boldsymbol{B})_j - (f_0)^2] \}, \\ \hat{D}_i^{\text{tot}} = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N (f(\boldsymbol{A})_j - f(\boldsymbol{A}_B^{(i)})_j)^2. \end{cases} \quad (17)$$

## 4 混合不确定系统的全局灵敏度指标及其计算思路

### 4.1 混合不确定系统的数学模型

设混合不确定系统的数学模型为:

$$Y = h(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{U}) = h(x_1, \dots, x_{KV}, x_{KV+1}, \dots, x_{KV+KV}). \quad (18)$$

式中,  $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{U})$ ;  $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, \dots, V_{KV}) = (x_1, \dots, x_{KV})$ ;  $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2, \dots, U_{KV}) = (x_{KV+1}, \dots, x_{KV+KV})$ ;  $n = KV + KV$ . 设所有变量互相独立. 对于式 (18) 所表征的混合不确定系统, 系统的性能指标用期望值  $E(Y)$  表征, 系统的变异 (即不确定性) 用  $Y$  的方差  $Var(Y)$  表征. 对式 (18) 所示的数学模型, 变量的方差, 数学期望 (包括条件期望) 以及变量独立性的定义和传统概率论中的定义相同.

### 4.2 混合不确定系统的 Sobol' 灵敏度指标

在具有认知不确定性  $\boldsymbol{U}$  的条件下, Sobol' 灵敏度指标不能直接应用. 为此, 采用条件期望和条件方差的思路 [7,8], 对 Sobol' 灵敏度指标进行推广.

根据 Sobol' 灵敏度指标定义, 在具有认知不确定性变量的条件下 (简记为:  $|\boldsymbol{U}$ ),  $U_i$  的一阶灵敏度可表示为:

$$S_{U_i}|\boldsymbol{U} = \frac{D_i|\boldsymbol{U}}{D|\boldsymbol{U}} = \frac{Var\{E[E(Y|\boldsymbol{U})|U_i]\}}{Var[E(Y|\boldsymbol{U})]}. \quad (19)$$

利用条件期望公式 [7,8]

$$\begin{cases} E[E(Y|U)] = E(Y), \\ E\{E(Y|U)|U_i\} = E(Y|U_i). \end{cases}$$

对式 (19) 进行数学变换, 得:

$$S_{U_i|U} = \frac{\text{Var}[E(Y|U_i)]}{\text{Var}(Y)} \cdot \frac{\text{Var}(Y)}{\text{Var}[E(Y|U)]} = \frac{S_{U_i}}{\xi}. \quad (20)$$

式中,

$$S_{U_i} = \frac{\text{Var}[E(Y|U_i)]}{\text{Var}(Y)}, \quad \xi = \frac{\text{Var}[E(Y|U)]}{\text{Var}(Y)}. \quad (21)$$

$S_{U_i}$  可以看成是去除  $U$  的认知不确定性, 仅把它视为随机变量时  $U_i$  的一阶灵敏度.  $\xi$  是计入  $U$  的认知不确定性后对  $S_{U_i}$  的修正项, 称为灵敏度修正系数.

同理,  $U_i$  的总灵敏度可表示为:

$$S_{U_i}^{\text{tot}}|U = \frac{D_{U_i}^{\text{tot}}|U}{D|U}.$$

根据方差分解原理,  $D_{U_i}^{\text{tot}}|U = D^{\text{tot}} - D_{\sim U_i}|U$ . 其中  $\sim U_i$  表示  $(V, U)$  中剔除  $U_i$  后所剩余的子集. 因为总方差  $D^{\text{tot}} = D$ , 故有:

$$S_{U_i}^{\text{tot}}|U = \frac{D_{U_i}^{\text{tot}}|U}{D|U} = \frac{D - D_{\sim U_i}|U}{D|U}. \quad (22)$$

考虑到

$$S_{U_i}^{\text{tot}} = \frac{D_{U_i}^{\text{tot}}}{D}, \quad \frac{D_{\sim U_i}}{D} = \frac{\text{Var}[E(Y|\sim U_i)]}{\text{Var}[Y]} = 1 - S_{U_i}^{\text{tot}},$$

由式 (22) 进一步推导, 得:

$$\begin{aligned} S_{U_i}^{\text{tot}}|U &= \frac{\text{Var}(Y) - \text{Var}(E[E(Y|U)|\sim U_i])}{\text{Var}[E(Y|U)]} = \frac{\text{Var}(Y)}{\text{Var}[E(Y|U)]} - \frac{\text{Var}[E(Y|\sim U_i)]}{\text{Var}(Y)} \cdot \frac{\text{Var}(Y)}{E(Y|U)} \\ &= \frac{\text{Var}(Y)}{\text{Var}(E(Y|U))} - (1 - S_{U_i}^{\text{tot}}) \cdot \frac{\text{Var}(Y)}{\text{Var}[E(Y|U)]} = \frac{S_{U_i}^{\text{tot}}}{\xi}. \end{aligned} \quad (23)$$

式中,  $S_{U_i}^{\text{tot}}$  可以看成是去除  $U$  的认知不确定性, 仅把它视为随机变量时  $U_i$  的总灵敏度.

### 4.3 灵敏度指标的计算思路

综合 4.2 节的分析, 可提出一种混合不确定系统的灵敏度指标的计算思路, 具体如下. 对系统模型  $Y = h(V, U)$ , 考虑  $U$  的认知不确定性后, 系统灵敏度指标为  $S_{U_i}|U$ ,  $S_{U_i}^{\text{tot}}|U$ ,  $S_{V_i}|U$ ,  $S_{V_i}^{\text{tot}}|U$ . 欲计算上述灵敏度指标, 先暂时不考虑  $U$  的认知不确定性, 令其退化为随机变量, 采用随机变量系统灵敏度指标计算的 Sobol' 方法, 计算灵敏度指标  $S_{U_i}$ ,  $S_{U_i}^{\text{tot}}$ ,  $S_{V_i}$ ,  $S_{V_i}^{\text{tot}}$ . 然后, 考虑  $U$  的认知不确定性, 计算灵敏度修正系数  $\xi$ , 按式 (20) 和式 (23) 计算经过修正后  $U$  的灵敏度指标. 对于随机变量  $V$ , 由于随机采样时没有改变其不确定性的性质与分布规律, 在所有变量独立时忽略  $U$  与  $V$  的交互作用, 则其灵敏度不必进行修正, 即:

$$S_{V_i}|U = S_{V_i}, \quad S_{V_i}^{\text{tot}}|U = S_{V_i}^{\text{tot}}. \quad (24)$$

## 5 混合不确定系统灵敏度分析的随机模拟方法及算法实现

### 5.1 灵敏度分析的算法

采用文献 [15] 的蒙特卡罗方法计算 Sobol' 灵敏度指标  $S_{U_i}$ ,  $S_{U_i}^{\text{tot}}$ ,  $S_{V_i}$ ,  $S_{V_i}^{\text{tot}}$ . 为了保证随机模拟过程的收敛性, 根据 Sobol' 方法的要求, 采用拟蒙特卡罗方法生成样本, 保证样本在  $[0, 1]$  区间分布的均匀性. 对于定义域不是  $[0, 1]$  的变量, 经过变量替换改变其定义域, 使之满足 Sobol' 方法的要求. 采用拟蒙特卡罗方法计算灵敏度指标的修正系数  $\xi$ , 具体算法实现将在下节讨论.

### 5.2 灵敏度分析的算法实现

1) 灵敏度指标  $S_{U_i}$ ,  $S_{U_i}^{\text{tot}}$ ,  $S_{V_i}$ ,  $S_{V_i}^{\text{tot}}$  的计算

在数学模型式 (18) 中, 认知不确定性变量集  $U$  用证据理论表征, 设随机变量集  $V$  各分量的概率分布密度函数已知. 对  $U$  作退化处理, 暂把  $U$  的各分量处理成服从 Pignistic 概率分布密度函数的随机变量. 采用

Sobol' 方法求出灵敏度指标  $S_{U_i}$ ,  $S_{U_i}^{\text{tot}}$ ,  $S_{V_i}$ ,  $S_{V_i}^{\text{tot}}$ . 若采样次数为  $N$ , 因  $\boldsymbol{x}$  的所有分量相互独立, 则其单循环蒙特卡罗方法设计如下:

第 1 步: 采用 2.4 节中的一次随机采样法, 根据 Pignistic 概率分布密度函数, 生成  $\boldsymbol{U}$  的一个样本  $\boldsymbol{u}_i$ .

第 2 步: 按随机变量的已知分布规律采样, 生成  $\boldsymbol{V}$  的一个样本  $\boldsymbol{v}_i$ .

由上述两步, 得到  $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{U})$  的一个样本  $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{u}_i)$ . 重复第 1 步和第 2 步  $N$  次, 得到一个样本矩阵  $\boldsymbol{A}$ . 用类似方法, 得到另一个样本矩阵  $\boldsymbol{B}$ .

用文献 [15] 的方法, 用式 (17) 对上述两个样本矩阵  $\boldsymbol{A}$  及  $\boldsymbol{B}$  进行统计处理, 求出 Sobol' 灵敏度指标  $S_{U_i}$ ,  $S_{U_i}^{\text{tot}}$ ,  $S_{V_i}$ ,  $S_{V_i}^{\text{tot}}$ . 因不确定性变量的总维数  $n = KV + KU$ , 则用公式 (17) 求灵敏度指标  $S_{U_i}$ ,  $S_{U_i}^{\text{tot}}$ ,  $S_{V_i}$ ,  $S_{V_i}^{\text{tot}}$  时, 模型  $Y = h(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{U})$  的总评估次数为  $N(n + 2)$ .

2) 灵敏度指标修正系数的近似计算

修正系数  $\xi$  可根据条件期望和条件方差理论进行近似计算 [7]. 设有 2 个不确定性系统数学模型  $Y = f(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{U})$  和  $Y' = f(\boldsymbol{V}', \boldsymbol{U})$ . 设  $\boldsymbol{V}$  和  $\boldsymbol{V}'$  在  $\boldsymbol{U}$  下是同分布的, 则  $E[E(Y|\boldsymbol{U})^2] = E(Y \cdot Y')$  [7]. 故:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\text{Var}(E(Y|\boldsymbol{U}))}{\text{Var}(Y)} = \frac{E\{[E(Y|\boldsymbol{U})]^2\} - [E(E(Y|\boldsymbol{U}))]^2}{\sqrt{\text{Var}(Y) \cdot \text{Var}(Y')}} \\ &= \frac{E[Y \cdot Y'] - E(Y) \cdot E(Y')}{\sqrt{\text{Var}(Y) \cdot \text{Var}(Y')}} = \frac{\text{cov}(Y, Y')}{\sqrt{\text{Var}(Y) \cdot \text{Var}(Y')}} \end{aligned} \quad (25)$$

式中,  $\text{cov}(\cdot)$  表示求协方差.

若采样次数为  $N$ , 因  $\boldsymbol{x}$  的所有分量相互独立, 则计算  $\xi$  的单循环蒙特卡罗方法设计如下:

第 1 步: 考虑  $\boldsymbol{U}$  的认知不确定性, 采用 2.4 节中基于证据理论的二次随机抽样法生成  $\boldsymbol{U}$  的一个样本  $\boldsymbol{u}_i$ .

第 2 步: 在  $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u}_i$  的条件下, 按随机变量的分布规律随机生成  $\boldsymbol{V}$  的一个样本  $\boldsymbol{v}_i$ , 计算  $Y_i = f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{u}_i)$ .

第 3 步: 在  $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u}_i$  的条件下, 按随机变量的分布规律随机生成  $\boldsymbol{V}'$  的一个样本  $\boldsymbol{v}'_i$ , 计算  $Y'_i = f(\boldsymbol{v}'_i, \boldsymbol{u}_i)$ .

重复第 1 步至第 3 步  $N$  次, 得到一个 2 列  $N$  行的矩阵, 记为:

$$(Y_i, Y'_i)_{N \times 2}, (i = 1, 2, \dots, N).$$

记  $E(Y) = \bar{Y}$ ,  $E(Y') = \bar{Y}'$ . 由式 (25),  $\xi$  的估计值 [7] 可由下式计算:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y}) \cdot (Y'_i - \bar{Y}')}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2 \cdot \sum_{i=1}^N (Y'_i - \bar{Y}')^2}}$$

用上式计算  $\xi$  时, 模型  $Y = h(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{U})$  的总评估次数为  $2N$ . 上述算法中, 采用 2.4 节的二次随机抽样法生成  $\boldsymbol{u}_i$ , 由于该抽样方法是一种近似方法, 故上述计算所得的  $\xi$  是近似值.

3) 计算灵敏度指标时的采样技术

应用 Sobol' 方法进行灵敏度分析时, 为保证样本在  $I^K$  内分布的均匀性, 采用拟蒙特卡罗方法. 抽样均匀性较好的拟蒙特卡罗抽样法有拉丁超立方分层抽样法 [17] 和 Sobol' 伪随机数序列法 [18] 等, 本文采用后者.

## 6 应用实例

如图 2 所示的偏置曲柄滑块机构 [4,5], 曲柄长度为  $a(\text{mm})$ , 连杆长度为  $b(\text{mm})$ , 外力为  $F(\text{KN})$ . 连杆截面为空心圆, 尺寸如图 2 所示. 连杆材料的屈服极限为  $s(\text{Mpa})$ , 且  $s$  为服从正态分布的随机变量. 设偏置距离为  $e(\text{mm})$ , 滑块与机架间的摩擦系数为  $\mu$ . 连杆截面尺寸取  $d_2 = 50 \text{ mm}$ ,  $d_1 = 25 \text{ mm}$ .

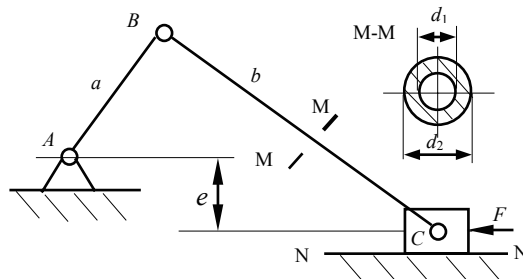


图 2 偏置曲柄滑块机构

现研究连杆的强度问题. 由文献 [4], 在外载荷  $F$  的作用下, 连杆不产生屈服破坏的条件为:

$$G_1 = h(\mathbf{V}, \mathbf{U}) = s - \frac{4F(b-a)}{\pi(\sqrt{(b-a)^2 - e^2} - \mu e)(d_2^2 - d_1^2)} > 0.$$

式中, 各变量的分布规律 [4] 如表 1 及表 2 所示.

表 1 随机变量的分布规律

变量	物理量	均值	均方差	分布规律
$x(1)$	$a$	100/mm	0.01/mm	正态分布
$x(2)$	$b$	300/mm	0.01/mm	正态分布
$x(3)$	$F$	250/KN	25/KN	正态分布
$x(4)$	$s$	390/Mpa	39Mpa	正态分布

表 2 认知不确定性变量的分布规律

变量	物理量	分布规律 (证据结构)	
		区间 (焦元)	BPA
$x(5)$	$e/mm$	[100, 120]	0.2
		[120, 140]	0.4
		[140, 150]	0.4
$x(6)$	$\mu$	[0.15, 0.18]	0.3
		[0.18, 0.23]	0.3
		[0.23, 0.25]	0.4

根据所提出的灵敏度计算新思路和方法, 在 Matlab 平台上开发了通用的混合不确定系统灵敏度分析程序 [19]. 用所开发的程序求解各自变量对  $G_1$  的灵敏度, 随机模拟次数  $N$  取 5000. 对本例, 检查程序生成的所有灵敏度指标在随机模拟计算过程中的动态变化图, 可判断经过 5000 次模拟, 该随机模拟过程已经收敛. 灵敏度分析结果如表 3 所示.

表 3 实例的灵敏度分析结果

变量		一阶灵敏度指标 $S$	总灵敏度指标 $S^{\text{tot}}$
类型	符号		
随机不确定性	$x(4)$	0.429 620	0.435 374
	$x(3)$	0.222 369	0.232 934
	$x(2)$	0.000 000	0.000 000
认知不确定性	$x(1)$	0.000 000	0.000 000
	$x(5)$	0.463 235	0.469 800
	$x(6)$	0.043 689	0.052 337

基于认知不确定性的证据理论表征, 文献 [4] 采用基于  $d_{KS}$  距离的灵敏度分析方法, 给出的认知不确定性变量的一阶灵敏度 (main effect) 指标  $ME$  分别为:

$$ME(x_5) = 0.2979, ME(x_6) = 0.0761. \tag{26}$$

可见, 本文求解的认知不确定变量一阶灵敏度指标  $S$ , 虽然灵敏度指标的数值和文献 [4] 中不一样, 但灵敏度的排序是相同的. 文献 [4] 没有给出认知不确定性变量的总灵敏度以及各随机变量的灵敏度, 相比之下, 这也在一定程度上说明了本文方法的优点.

## 7 总结

用证据理论对认知不确定性变量进行表征, 基于条件概率理论和 Sobol' 全局灵敏度分析方法, 提出一种混合不确定系统灵敏度分析计算的随机模拟算法. 和现有方法相比, 所提出的新方法具有如下特点.

1) 采用证据理论作为认知不确定性变量的表征工具, 而用 p-box 变量, 模糊变量, 区间变量等表征的认知不确定性变量均可以转化为证据结构表征. 因此, 所提的方法对认知不确定性因素的表征及处理能力较强, 应用范围宽.

2) 所提方法的算法实现中, 随机变量按其分布规律进行随机采样, 不必转化为证据理论形式; 认知不确定性变量采用基于证据理论的随机采样法, 与证据理论的模型解释吻合. 因此, 该算法较好地体现了随机变量和认知不确定性变量各自的特点, 采样过程中的信息损失少.

3) 采用 Sobol' 方法的灵敏度指标, 灵敏度指标不必重新定义. 采用了单循环的拟蒙特卡罗方法 [7,8] 进行灵敏度的数值计算. 当系统模型的总维数为  $n$ , 随机模拟次数为  $N$  时, 系统数学模型  $Y = h(\mathbf{V}, \mathbf{U})$  的总评估次数为  $N(n+4)$ . 因此, 新方法虽然采用了证据理论处理认知不确定性变量, 但不会出现焦元组合数爆



炸的现象,总的计算工作量可控,计算成本可以接受.

4) 开发了基于 Matlab 的通用灵敏度分析程序. 经过实例考核,所提出灵敏度分析方法的计算结果可靠,所开发的程序运行稳定,通用性好.

## 参考文献

- [1] Saltelli A, Tarantola S, Campolongo F, et al. Sensitivity analysis in practice: A guide to assessing scientific models[M]. John Wiley & Sons, Ltd, 2004.
- [2] 邱志平, 王晓军. 结构灵敏度分析的区间方法 [J]. 兵工学报, 2005, 26(6): 798–802.  
Qiu Z P, Wang X J. An interval method for sensitivity analysis of the structures[J]. Acta Armamentarii, 2005, 26(6): 798–802.
- [3] 李贵杰, 吕震宙, 王攀. 结构非概率可靠性灵敏度分析方法 [J]. 航空学报, 2012, 33(3): 501–507.  
Li G J, Lü Z Z, Wang P. Sensitivity analysis of non-probabilistic reliability of uncertain structures[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2012, 33(3): 501–507.
- [4] Guo J, Du X. Sensitivity analysis with mixture of epistemic and aleatory uncertainties[J]. AIAA Journal, 2007, 45(9): 2337–2349.
- [5] Du X. Uncertainty analysis with probability and evidence theories[C]// Proceedings of ASME 2006 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, Philadelphia, Pennsylvania, USA, ASME, 2006: 1–14.
- [6] 锁斌, 曾超, 程永生, 等. 认知不确定性下可靠度灵敏度分析的新指标 [J]. 航空学报, 2013, 34(7): 1605–1614.  
Suo B, Zeng C, Cheng Y S, et al. New index for reliability sensitivity analysis under epistemic uncertainty[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 34(7): 1605–1615.
- [7] Krzykacz-Hausmann B. An approximate sensitivity analysis of results from complex computer models in the presence of epistemic and aleatory uncertainties[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2006, 91: 1210–1218.
- [8] Hofera E, Kloosa M, Krzykacz-Hausmann B, et al. An approximate epistemic uncertainty analysis approach in the presence of epistemic and aleatory uncertainties[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2002, 77: 229–238.
- [9] Karlin S, Taylor M T. A first course in stochastic processes[M]. New York: Academic Press, 1975.
- [10] Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1967, 38(2): 325–339.
- [11] Shafer G. A mathematical theory of evidence[M]. Princeton: Princeton University Press, 1976.
- [12] Smets P, Kennes R. The transferable belief model[J]. Artificial Intelligence, 1994, 66: 191–234.
- [13] Sobol' I M. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models[J]. Matem Modelirovanie, 1990, 2(1): 112–118 (in Russian). Math Model Comp Exper, 1993, 1(4): 407–414 (in English).
- [14] Sobol' I M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2001, 55: 271–280.
- [15] Saltelli A, Annoni P, Azzini I, et al. Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index[J]. Computer Physics Communications, 2010, 181: 259–270.
- [16] Homma T, Saltelli A. Global sensitivity analysis of nonlinear models importance measures and Sobol' sensitivity indices[R]. Report EUR 16052 EN, 1994.
- [17] Helton J C, Davis F, Latin J. Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems[R]. Sandia Report, SAND2001-0417, Unlimited Release, Printed November 2002.
- [18] Bratley P, Fox B L. Algorithm 659: Implementing Sobol's quasirandom sequence generator[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 1988, 14: 88–100.
- [19] 长沙学院. 基于证据理论的混合不确定系统灵敏度分析软件 [CP]. 计算机软件著作权登记号 2015SR141677, 中国, 2015.  
Changsha University. Sensitivity analysis software for hybrid uncertain system based on evidence theory[CP]. Computer Software Copyright Registration Number 2015SR141677, China, 2015.