doi: 10.12011/1000-6788(2018)07-1836-06 中图法分类号: O223; C934 文献标志码: A

考虑标度的加型一致性模糊判断矩阵的排序方法

刘卫锋, 常 娟, 孟金涛, 杨 永

(郑州航空工业管理学院 理学院, 郑州 450015)

摘 要 通过实例说明相关文献中加型一致性模糊判断矩阵排序方法的参数取值存在的问题, 分析出该问题是由于其公式证明中没有区分标度导致的, 指出其结论适用于 $0\sim 1$ 标度的加型一致性模糊判断矩阵. 然后, 重新证明了 $0.1\sim 0.9$ 标度下的加型一致性模糊判决矩阵的排序方法和相关结论. 最后, 定义了广义模糊标度, 并给出广义模糊标度下加型一致性模糊判断矩阵的排序方法和相关结论, 使得相关文献中排序方法和相关结论实现形式上的统一.

关键词 模糊判断矩阵; 排序方法; 标度; 加型一致性

Ranking method of additive consistent fuzzy judgment matrix considering scale

LIU Weifeng, CHANG Juan, MENG Jintao, YANG Yong

(College of Science, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450015, China)

Abstract It is found from the numerical example that the range of parameter in the ranking method of additive consistent fuzzy judgment matrix in the related literatures is not appropriate, and by analyzing the process of proof, the problem existed in the ranking method is due to indiscriminate scale. Hereby, it is pointed out that the series of results in the related literatures are only suited to additive consistent fuzzy judgment matrix in scale $0\sim 1$. Then, based on scale $0.1\sim 0.9$, the ranking method and results about additive consistent fuzzy judgment matrix are reproved. Finally, generalized fuzzy scale is defined, and the ranking method and results about additive consistent fuzzy judgment matrix with generalized fuzzy scale are discussed, which realized the ranking methods and results in the related literatures unification in forms.

Keywords fuzzy judgment matrix; ranking method; scale; additive consistency

1 引言

相对于互反判断矩阵 [1] 而言, 模糊判断矩阵 [2,3] 不仅在表示元素两两重要性比较的结果上更科学合理 [3,4], 而且具有许多较好的性质, 特别是它的中分传递性与人类思维判断的一致性相符合 [3,4], 因此在决策过程中, 模糊判断矩阵更符合人们的心理习惯, 也更容易为决策者掌握和应用. 近年来, 关于模糊判断矩阵的排序方法的研究已经取得了丰硕的研究成果. 若考虑到模糊判断矩阵的一致性, 这些排序方法大概可以分为两类: 一类是加型一致性模糊判断矩阵的排序方法, 如文献 [5–18]; 一类是积型一致性模糊判断矩阵的排序方法, 如文献 [18–28].

下面通过讨论文献 [4–9] 中关于模糊判断矩阵的加型一致性以及相关排序方法, 引入我们的研究内容. 文

收稿日期: 2017-03-20
作者简介: 刘卫锋 (1976–), 男, 河南沈丘人, 副教授, 研究方向: 模糊数学, 决策理论.
基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目 (11501525); 河南省高等学校重点科研项目 (18A110032)
Foundation item: National Natural Science Foundation of China (11501525); Key Scientific Research Projects in Colleges and Universities of Henan (18A110032)
中文引用格式: 刘卫锋, 常娟, 孟金涛, 等. 考虑标度的加型一致性模糊判断矩阵的排序方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(7): 1836–1841.
英文引用格式: Liu W F, Chang J, Meng J T, et al. Ranking method of additive consistent fuzzy judgment matrix considering scale[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2018, 38(7): 1836–1841.

献 [4] 证明了加型一致性符合人类决策思维的一致性, 并讨论了加型一致性模糊判断矩阵的性质, 为人们决策中使用模糊判断矩阵奠定了理论基础; 文献 [5, 6] 研究了不同标度下的模糊判断矩阵, 并给出了一个通用的模糊判断矩阵的排序方法; 文献 [7] 解释了用加型一致性模糊判断矩阵表示因素间两两重要性比较的合理性, 而且着重研究了表示因素间两两重要性比较的加型一致性模糊判断矩阵与表示因素重要性程度权重之间的关系, 即 $r_{ij}=\alpha(w_i-w_j)+0.5$, 其中 $0<\alpha\leq 0.5$, 并对此进行了严格的数学证明; 文献 [8] 通过求解规划模型给出了加型一致性模糊判断矩阵的一种权重排序公式, 修正了 α 的取值范围为 $\alpha\geq 0.5(n-1)$; 文献 [9] 指出文献 [8] 中排序方法仅适用于加型一致性模糊判断矩阵, 为此结合文献 [6], 给出了一种模糊判断矩阵的排序方法. 文献 [4–9] 的研究结论对于发展完善模糊判断矩阵的排序方法具有重要的理论意义和应用价值.

但是, 文献 [7–9] 在讨论模糊判断矩阵的排序方法及其相关结论时, 并没有严格区分标度问题, 而是笼统地将标度默认为 $0\sim 1$ 标度, 但相关实例中的模糊判断矩阵是关于 $0.1\sim 0.9$ 标度的. 事实上, 模糊判断矩阵的排序方法及其相关结论与标度的选用密不可分. 为此, 首先通过一个计算实例说明文献 [8, 9] 中参数取值范围存在问题, 并分析了问题出现的原因在于没有区分标度. 然后, 对文献 [7–9] 中的相关结论进行重新梳理, 给出 $0.1\sim 0.9$ 标度下的加型一致性模糊判断矩阵排序方法和相关结论. 最后, 定义了广义模糊标度, 给出广义模糊标度下的加型一致性模糊判断矩阵的排序方法及其相关结论, 使得 $0\sim 1$ 标度和 $0.1\sim 0.9$ 标度下的排序方法和相关结论成为其特例, 从而使得文献 [7–9] 中排序方法和相关结论实现形式上的统一.

2 基本概念

定义 1[4] 设矩阵 $R=(r_{ij})_{nn}$, 若 $0\leq r_{ij}\leq 1$, 则称矩阵 R 是模糊矩阵.

定义 2[4] 设矩阵 $R=(r_{ij})_{nn}$ 为模糊矩阵, 若 $r_{ij}+r_{ji}=1, i,j=1,2,\cdots,n$, 则称矩阵 R 是模糊判断矩阵.

定义 3[4] 设矩阵 $R=(r_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵, 若 $r_{ij}=r_{ik}-r_{jk}+0.5, i,j,k=1,2,\cdots,n$, 则称矩阵 R 是加型一致性模糊判断矩阵.

定义 4[29] 设 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 是模糊判断矩阵 R 的排序向量, 如果对任意 $k=1,2,\cdots,n$, 有 $r_{ik}\geq r_{jk}$, 那么 $w_i\geq w_j$, 并且当所有等式 $r_{ik}=r_{jk}, k=1,2,\cdots,n$ 成立时, 有 $w_i=w_j$, 则称矩阵 R 的排序方法是强条件下保序的.

定义 5[11] 设模糊判断矩阵 $R=(r_{ij})_{nn}$, 若 $r_{ij}\geq 0.5$, 则对于任意 $k=1,2,\cdots,n$, 有 $r_{ik}\geq r_{jk}$; 若 $r_{ij}=0.5$, 则对于任意 $k=1,2,\cdots,n$, 有 $r_{ik}\geq r_{jk}$, 或者 $r_{ik}\leq r_{jk}$, 则称矩阵 R 的序传递的.

3 问题分析

例 1[8] 设 $R=\begin{pmatrix}0.5 & 0.9 & 0.7\\ 0.1 & 0.5 & 0.3\\ 0.3 & 0.7 & 0.5\end{pmatrix}$ 为 3 阶加型一致性模糊判断矩阵.

文献 [8] 定理 4.1 证明了参数 α 的取值为 $\alpha\geq\frac{1}{2}(n-1)$, 并在该例中说明参数 $\alpha<\frac{1}{2}(n-1)$ 时, 不能保证权重的非负性.

由于该例中 $n=3$, 说明 $\alpha\geq 1$, 即 α 不能小于 1, 但是当 $\alpha=0.8<1$ 时, 可以计算出权重分别为 $w_1=\frac{7}{12}$, $w_2=\frac{1}{12}$, $w_3=\frac{4}{12}$. 该例说明文献 [8, 9] 中排序公式中参数 α 的取值范围并不正确.

下面分析文献 [8] 定理 4.1 的证明中, 导致 $\alpha\geq\frac{1}{2}(n-1)$ 的原因, 并给出 α 的正确取值范围. 文献 [8] 证明 $\alpha\geq\frac{1}{2}(n-1)$ 的过程如下:

考虑到 w_i 的非负性, 从而得到 $\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}r_{ik}-\frac{1}{5})\geq\frac{1}{n}$, 即 $\alpha\geq\frac{n}{2}-\sum_{k=1}^{n}r_{ik}$. 由于 R 为模糊判断矩阵, 故 $0.5\leq\sum_{k=1}^{n}r_{ik}\leq n-0.5$, 于是 $\alpha\geq\max\{\frac{n}{2}-\sum_{k=1}^{n}r_{ik}\}=\frac{n}{2}-0.5=\frac{n-1}{2}$.

从上面证明可以发现, 文献 [8] 在推导 α 的取值范围时, 引用了该文献的引理 2.1, 而该引理假设模糊判断矩阵 $R=(r_{ij})_{nn}$ 采用 $0\sim 1$ 标度, 从而有 $0.5\leq\sum_{k=1}^{n}r_{ik}\leq n-0.5$, 进而推导出 $\alpha\geq\frac{n-1}{2}$. 但是, 该例中模糊互补判断矩阵 $R=(r_{ij})_{nn}$ 采用的是 $0.1\sim 0.9$ 标度, 而非 $0\sim 1$ 标度. 因此, 每行元素之和的范围应该为 $0.1(n-1)+0.5\leq\sum_{k=1}^{n}r_{ik}\leq 0.9(n-1)+0.5$, 故而得到参数 α 的取值范围为 $\alpha\geq\max\{\frac{n}{2}-\sum_{k=1}^{n}r_{ik}\}=\frac{n}{2}-[0.1(n-1)+0.5]=\frac{2}{5}(n-1)$.

由上面的分析可以得知, 标度的不同会影响到权重公式中的参数取值. 但文献 [8, 9] 中并没有将标度作严格区分, 而是默认模糊判断矩阵为 $0 \sim 1$ 标度, 从而推导出参数 $\alpha \geq \frac{n-1}{2}$, 因此文献 [8, 9] 中的相关结论是关于 $0 \sim 1$ 标度的. 但是例 1 中的模糊判断矩阵采用的是 $0.1 \sim 0.9$ 标度, 故而将参数取值为 $\alpha \geq \frac{n-1}{2}$, 并将其用于权重公式并不合适, 从而才会出现当参数 $\alpha = 0.8$ 时, 排序公式仍然可以使用的情况. 因此, 应该针对不同的标度分别讨论排序公式的计算, 才不会出现例 1 中的情况.

4 $0.1 \sim 0.9$ 标度下加型一致性模糊判断矩阵的排序方法

如未作说明, 以下涉及的矩阵均指标度为 $0.1 \sim 0.9$ 的模糊互补判断矩阵.

定理 1 设 $R = (r_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵, 则 $0.1(n-1) + 0.5 \leq \sum_{k=1}^{n} r_{ik} \leq 0.9(n-1) + 0.5$.

定理 2 设 $R = (r_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵, 则 R 为加型一致性模糊判断矩阵当且仅当, 存在 n 阶非负归一化向量 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 以及正数 α, 使得 $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$, 有 $r_{ij} = \alpha(w_i - w_j) + 0.5$.

证明 (充分性) 与文献 [8] 定理 2.3 证明相同.

(必要性) 设 R 为加型一致性模糊判断矩阵, 取定 $\alpha \geq \frac{2}{5}(n-1)$. w_i 的归一化证明与文献 [8] 定理 2.3 中相同, 这里仅需证明 w_i 的非负性.

令 $w_i = \frac{1}{n} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{n\alpha}\sum_{k=1}^{n} r_{ik}$, 由 $0.1(n-1)+0.5 \leq \sum_{k=1}^{n} r_{ik}$ 可知, $w_i \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{n\alpha}[0.1(n-1)+0.5] = \frac{5\alpha-2(n-1)}{5n\alpha}$. 又知 $\alpha \geq \frac{2}{5}(n-1)$, 则 $w_i \geq \frac{5\times\frac{2}{5}(n-1)-2(n-1)}{5n\alpha} = 0$.

定理 3 设模糊判断矩阵 $R = (r_{ij})_{nn}$ 中元素与其权重满足关系式 $r_{ij} = \alpha(w_i - w_j) + 0.5$, 则其权重必然由 $w_i = \frac{1}{n} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{n\alpha}\sum_{k=1}^{n} r_{ik}$ 给出.

定理 4 设 $R = (r_{ij})_{nn}$ 为加型一致性模糊判断矩阵, 则其权重可由 $w_i = \frac{1}{n} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{n\alpha}\sum_{k=1}^{n} r_{ik}$ 计算.

定理 5 设 $R = (r_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵, $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 由最小二乘法确定, 即它是下面非线性规划问题的解

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[0.5 + \alpha(w_i - w_j) - r_{ij}]^2, \quad \text{s.t. } \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, w_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

那么仍有 $w_i = \frac{1}{n} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{n\alpha}\sum_{k=1}^{n} r_{ik}$.

证明 与文献 [8] 定理 3.3 相同.

定理 6 设 $R = (r_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵, 若其非负归一化权重向量可由 $w_i = \frac{1}{n} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{n\alpha}\sum_{k=1}^{n} r_{ik}$ 计算, 则参数 α 必须满足 $\alpha \geq \frac{2}{5}(n-1)$.

证明 见文中第 3 部分问题分析.

定理 7 设 $R = (r_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵, 若其权重向量满足关系式 $r_{ij} = \alpha(w_i - w_j + 0.5)$, 则 R 中任意两个元素的权重之差与参数 α 成反比, 且 $-\frac{1}{n-1} \leq w_i - w_j \leq \frac{1}{n-1}$.

证明 由 $r_{ij} = \alpha(w_i - w_j + 0.5)$ 可知, $w_i - w_j = \frac{1}{\alpha}(r_{ij} - 0.5)$, 即 $w_i - w_j$ 与参数 α 成反比.

由于 $0.1 \leq r_{ij} \leq 0.9$, 从而有 $-0.4 \leq r_{ij} - 0.5 \leq 0.4$, 即 $|r_{ij} - 0.5| \leq 0.4$. 同时考虑到 $\alpha \geq \frac{2}{5}(n-1)$, 故而有 $|w_i - w_j| = \frac{1}{\alpha}|r_{ij} - 0.5| \leq \frac{5}{2(n-1)} \times 0.4 = \frac{1}{n-1}$.

定理 8 设 $A = (a_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵, 令 $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, i = 1, 2, \cdots, n$, 并作如下变换 $r_{ij} = \frac{r_i - r_j}{2(n-1)} + 0.5, i, j = 1, 2, \cdots, n$, 得到加型一致性模糊判断矩阵 $R = (r_{ij})_{nn}$, 则由 R 的元素 r_{ij} 与权重 w_i 的关系式 $r_{ij} = \alpha(w_i - w_j + 0.5)$, 求得的权重向量 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $w_i = \frac{1}{n} - \frac{n}{4\alpha(n-1)} + \frac{1}{2\alpha(n-1)}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}, i = 1, 2, \cdots, n$, 其中参数 $\alpha \geq \frac{2}{5}(n-1)$.

证明 与文献 [9] 中定理 1 证明相同.

5 广义标度下加型一致性模糊判断矩阵的排序方法

下面将 $0 \sim 1$ 标度、$0.1 \sim 0.9$ 五标度以及 $0.1 \sim 0.9$ 九标度这三种模糊标度进行推广, 并根据它们的特征给出广义模糊标度的定义. 然后, 给出广义模糊标度下的模糊判断矩阵的排序方法和相关结论, 使得文献 [7–9] 和文中基于 $0.1 \sim 0.9$ 五标度的相关结果成为其特例.

定义 6 广义模糊标度定义如下:

设 0.5 表示甲元素与乙元素同样重要, $0.5+\delta_i$, $i=1,2,\cdots,t$ 分别表示甲元素比乙元素重要的程度, 并且 $0.5+\delta_i$ 越大, 表明甲元素比乙元素重要的程度越大; $0.5-\delta_i$, $i=1,2,\cdots,t$ 分别表示甲元素不比乙元素重要的程度, 并且 $0.5-\delta_i$ 越小, 表明甲元素比乙元素不重要的程度越大, 其中 $\delta_i\in[0,0.5]$, $i=1,2,\cdots,t$ 且 $\delta_1\le\delta_2\le\cdots\le\delta_t$.

显然, 广义模糊标度中有 $2t+1$ 个标度值, 且 $0.5\pm\delta_i\in[0,1]$, $i=1,2,\cdots,t$.

定理 9 由广义模糊标度给出判断矩阵 $R=(r_{ij})_{nn}$ 具有下面性质: 1) $r_{ij}=0.5$; 2) $r_{ij}+r_{ji}=1$.

显然, 由广义模糊标度给出判断矩阵 $R=(r_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵.

注 1 当 $t=1$, $\delta_1=0.5$ 时, 广义模糊标度即为 $0\sim1$ 三标度;

当 $t=4$, $\delta_1=0.1$, $\delta_2=0.2$, $\delta_3=0.3$, $\delta_4=0.4$ 时, 广义模糊标度即为 $0.1\sim0.9$ 五标度;

当 $t=4$, $\delta_1=0.061$, $\delta_2=0.175$, $\delta_3=0.362$, $\delta_4=0.4$ 时, 广义模糊标度即为 $0.1\sim0.9$ 九标度.

注 2 将广义模糊标度中的 $2t+1$ 个标度值 0.5, $0.5+\delta_i$, $i=1,2,\cdots,t$ 称为原标度, 其作用主要是决策者建立模糊判断矩阵时使用. 考虑到部分文献中在求解权重向量时, 往往对模糊判断矩阵作数学变化得到一致性模糊判断矩阵, 比如文献 [6] 中作了数学变化 $r_{ij}=\frac{r_i-r_j}{2(n-1)}+0.5$, 此时 r_{ij} 一般不再取值为 0.5, $0.5+\delta_i$, $i=1,2,\cdots,t$, 但 $r_{ij}\in[0.5-\delta_t,0.5+\delta_t]$, 为此我们不妨称 r_{ij} 为原标度的派生标度.

为了便于论述, 我们将原标度的最大值 $0.5+\delta_t$ 和最小值 $0.5-\delta_t$ 分别记为 M_0,m_0. 然后, 在广义模糊标度下, 给出模糊判断矩阵的排序方法和相关结论.

定理 10 设 $R=(r_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵, 则 $m_0(n-1)+0.5\le\sum_{k=1}^n r_{ik}\le M_0(n-1)+0.5$.

定理 11 设 $R=(r_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵, 则 R 为加型一致性模糊判断矩阵当且仅当, 存在 n 阶非负归一化向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm T}$ 以及正数 α, 使得 $\forall i,j=1,2,\cdots,n$, 有 $r_{ij}=\alpha(w_i-w_j)+0.5$.

证明 (充分性) 与文献 [8] 定理 2.3 证明相同.

(必要性) 设 R 为加型一致性模糊判断矩阵, 取定 $\alpha\ge(0.5-m_0)(n-1)$. w_i 的归一化证明与文献 [8] 定理 2.3 中相同, 这里仅需证明 w_i 的非负性.

令 $w_i=\frac{1}{n}-\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{n\alpha}\sum_{k=1}^n r_{ik}$, 由 $m_0(n-1)+0.5\le\sum_{k=1}^n r_{ik}$ 可知, $w_i\ge\frac{1}{n}-\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{n\alpha}[m_0(n-1)+0.5]=\frac{2\alpha+(2m_0-1)(n-1)}{2n\alpha}$. 又知 $\alpha\ge(0.5-m_0)(n-1)$, 则 $w_i\ge\frac{2(0.5-m_0)(n-1)+(2m_0-1)(n-1)}{2n\alpha}=0$.

定理 12 设模糊判断矩阵 $R=(r_{ij})_{nn}$ 中元素与其权重满足关系式 $r_{ij}=\alpha(w_i-w_j)+0.5$, 则其权重必然由 $w_i=\frac{1}{n}-\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{n\alpha}\sum_{k=1}^n r_{ik}$ 给出.

定理 13 设 $R=(r_{ij})_{nn}$ 为加型一致性模糊判断矩阵, 则其权重可由 $w_i=\frac{1}{n}-\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{n\alpha}\sum_{k=1}^n r_{ik}$ 计算.

定理 14 设 $R=(r_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵,$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm T}$ 由最小二乘法确定, 即它是下面非线性规划问题的解

$$\min\ z=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n[0.5+\alpha(w_i-w_j)-r_{ij}]^2,\quad \text{s.t.}\ \sum_{i=1}^n w_i=1, w_i\ge0, i=1,2,\cdots,n.$$

那么仍有 $w_i=\frac{1}{n}-\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{n\alpha}\sum_{k=1}^n r_{ik}$.

证明 与文献 [8] 定理 3.3 相同.

定理 15 设 $R=(r_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵, 若其非负归一化权重向量可由 $w_i=\frac{1}{n}-\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{n\alpha}\sum_{k=1}^n r_{ik}$ 计算, 则参数 α 必须满足 $\alpha\ge(0.5-m_0)(n-1)$.

证明 由权重的非负性可知, $w_i=\frac{1}{n}-\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{n\alpha}\sum_{k=1}^n r_{ik}\ge0$, 即有 $\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n r_{ik}-\frac{1}{5})\ge\frac{1}{n}$, 从而有 $\alpha\ge\frac{n}{2}-\sum_{k=1}^n r_{ik}$. 由于 $R=(r_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵, 故有 $m_0(n-1)+0.5\le\sum_{k=1}^n r_{ik}\le M_0(n-1)+0.5$, 于是有 $\alpha\ge\max\{\frac{n}{2}-\sum_{k=1}^n r_{ik}\}=\frac{n}{2}-[m_0(n-1)+0.5]=(0.5-m_0)n+(m_0-0.5)=(0.5-m_0)(n-1)$.

定理 16 设 $R=(r_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵, 若其权重向量满足关系式 $r_{ij}=\alpha(w_i-w_j+0.5)$, 则 R 中任意两个元素的权重之差与参数 α 成反比, 且 $-\frac{1}{n-1}\le w_i-w_j\le\frac{1}{n-1}$.

证明 由 $r_{ij}=\alpha(w_i-w_j+0.5)$ 可知, $w_i-w_j=\frac{1}{\alpha}(r_{ij}-0.5)$, 即 w_i-w_j 与参数 α 成反比.

由于 $m_0\le r_{ij}\le M_0$, 从而有 $m_0-0.5\le r_{ij}-0.5\le M_0-0.5$, 考虑到 $m_0+M_0=1$, 则有 $m_0-0.5\le r_{ij}-0.5\le0.5-m_0$, 即 $|r_{ij}-0.5|\le0.5-m_0$. 同时考虑到 $\alpha\ge(0.5-m_0)(n-1)$, 故有 $|w_i-w_j|=\frac{1}{\alpha}|r_{ij}-0.5|\le\frac{1}{(0.5-m_0)(n-1)}\times(0.5-m_0)=\frac{1}{n-1}$.

定理 17 设 $A=(a_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵, 令 $r_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}, i=1,2,\cdots,n$, 并作如下变换 $r_{ij}=\frac{r_i-r_j}{2(n-1)}+0.5, i,j=1,2,\cdots,n$, 得到加型一致性模糊判断矩阵 $R=(r_{ij})_{nn}$, 则由 R 的元素 r_{ij} 与权重 w_i 的关系式 $r_{ij}=\alpha(w_i-w_j+0.5)$, 求得的权重向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $w_i=\frac{1}{n}-\frac{n}{4\alpha(n-1)}+\frac{1}{2\alpha(n-1)}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}, i=1,2,\cdots,n$, 其中参数 $\alpha\geq(0.5-m_0)(n-1)$.

证明 与文献 [9] 中定理 1 证明相同.

注 3 当 m_0, M_0 分别 0, 1 和 0.1, 0.9, 即模糊判断矩阵分别为 $0\sim1$ 标度和 $0.1\sim0.9$ 标度时, 定理 10 $\sim$ 定理 17 分别退化为文献 [8, 9] 中相关结论和文中定理 1~8.

下面讨论广义模糊标度下排序向量的性质.

定理 18 设 $A=(a_{ij})_{nn}$ 为模糊判断矩阵, 则其排序向量是强条件下保序的, 其中

$$w_i=\frac{1}{n}-\frac{n}{4\alpha(n-1)}+\frac{1}{2\alpha(n-1)}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}, i=1,2,\cdots,n, \alpha\geq(0.5-m_0)(n-1).$$

证明 设 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 是模糊判断矩阵 $A=(a_{ij})_{nn}$ 的排序向量, 则有

$$w_i=\frac{1}{n}-\frac{n}{4\alpha(n-1)}+\frac{1}{2\alpha(n-1)}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}, w_j=\frac{1}{n}-\frac{n}{4\alpha(n-1)}+\frac{1}{2\alpha(n-1)}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}.$$

若对于 $\forall k=1,2,\cdots,n$, 有 $a_{ik}\geq a_{jk}$, 则有 w_i, w_j 的表达式可知 $w_i\geq w_j$. 又当所有等式 $a_{ik}=a_{jk}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 成立时, 显然有 $w_i=w_j$. 因此, 排序向量是强条件下保序的.

定理 19 模糊判断矩阵 $A=(a_{ij})_{nn}$ 是序传递的, 即若 $a_{ij}\geq0.5$, 则有 $w_i\geq w_j$; 若 $a_{ij}=0.5$, 则或者 $w_i\geq w_j$, 或者 $w_i\leq w_j$.

6 结语

通过分析计算实例说明了, 标度的不同对模糊判断矩阵的排序公式参数取值范围有着很大的影响. 然后, 讨论了 $0.1\sim0.9$ 标度下加型一致性模糊判断矩阵的排序方法及其相关结论. 最后, 综合考虑到 $0\sim1$ 和 $0.1\sim0.9$ 标度的共同特征, 定义了广义模糊标度, 并研究了广义模糊标度下的模糊判断矩阵的排序方法和相关的结论, 实现了文献 [7–9] 中排序方法和相关结论形式上的统一. 文中研究结果理清了不同标度下的加型一致性模糊判断矩阵的排序方法, 丰富和发展了模糊判断矩阵排序理论和方法.

参考文献

[1] 王莲芬, 许树柏. 层次分析法引论 [M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1990.
Wang L F, Xu S B. Introduction to analytic hierarchy process[M]. Beijing: China Renmin University Press, 1990.

[2] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
Xu Z S. Uncertain multiple attribute decision making: Methods and applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.

[3] Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 97(1): 33–48.

[4] 姚敏, 张森. 模糊一致矩阵及其在软科学中的应用 [J]. 系统工程, 1997, 15(2): 54–57.
Yao M, Zhang S. Fuzzy consistent matrix and its applications in soft science[J]. Systems Engineering, 1997, 15(2): 54–57.

[5] 林钧昌, 徐泽水. 模糊 AHP 中一种新的标度法 [J]. 运筹与管理, 1998, 7(2): 37–40.
Lin J C, Xu Z S. A new scale in FAHP[J]. Operations Research and Management Science, 1998, 7(2): 37–40.

[6] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的一种算法 [J]. 系统工程学报, 2001, 16(4): 311–314.
Xu Z S. Algorithm for priority of fuzzy complementary judgement matrix[J]. Journal of Systems Engineering, 2001, 16(4): 311–314.

[7] 张吉军. 模糊层次分析法 (FAHP)[J]. 模糊系统与数学, 2000, 14(2): 80–88.
Zhang J J. Fuzzy analytical hierarchy process[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2000, 14(2): 80–88.

[8] 吕跃进. 基于模糊一致矩阵的模糊层次分析法的排序 [J]. 模糊系统与数学, 2002, 16(2): 79–85.
Lü Y J. Weight calculation method of fuzzy analytical hierarchy process[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2002, 16(2): 79–85.

[9] 张吉军. 模糊互补判断矩阵排序的一种新方法 [J]. 运筹与管理, 2005, 14(2): 59–63.
Zhang J J. An new ranking method of fuzzy complementary judgement matrix[J]. Operations Research and Management Science, 2005, 14(2): 59–63.

[10] 樊治平, 胡国奋. 模糊判断矩阵一致性逼近及排序方法 [J]. 运筹与管理, 2000, 9(3): 21–25.
Fan Z P, Hu G F. The consistency approximation and ranking method for fuzzy judgement matrix[J]. Operations Research and Management Science, 2000, 9(3): 21–25.

[11] 徐泽水. 广义模糊一致性矩阵及其排序方法 [J]. 解放军理工大学学报, 2000, 1(6): 97–99.
Xu Z S. Generalized fuzzy consistent matrix and its priority method[J]. Journal of PLA University of Sciences and Technology, 2000, 1(6): 97–99.

[12] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的最小方差法 [J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(10): 93–96.
Xu Z S. The least variance priority method (LVM) for fuzzy complementary judgement matrix[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2001, 21(10): 93–96.

[13] 姜艳萍, 樊治平. 基于模糊判断矩阵的一种方案排序方法 [J]. 东北大学学报 (自然科学版), 2000, 21(4): 450–452.
Jiang Y P, Fan Z P. A method for ranking alternatives based on fuzzy judgement matrix[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2000, 21(4): 450–452.

[14] 邢岩, 曾文艺, 李洪兴. 模糊互补矩阵排序向量的求解算法 [J]. 北京师范大学学报 (自然科学版), 2007, 43(2): 114–119.
Xing Y, Zeng W Y, Li H X. A kind of method to calculate the priority vector of fuzzy reciprocal matrix[J]. Journal of Beijing Normal University (Natural Science), 2007, 43(2): 114–119.

[15] 宋光兴, 杨德礼. 模糊判断矩阵排序向量的确定方法研究 [J]. 模糊系统与数学, 2004, 18(2): 73–82.
Song G X, Yang D L. Study on approaches for determining the priority weight vector of fuzzy judgement matrix[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2004, 18(2): 73–82.

[16] 宋光兴, 杨德礼. 确定模糊判断矩阵排序向量的两类方法 [J]. 系统工程理论方法应用, 2004, 13(2): 161–166.
Song G X, Yang D L. Two kinds of approaches for determining the priority weight vector of fuzzy judgement matrix[J]. Systems Engineering — Theory Methodology Applications, 2004, 13(2): 161–166.

[17] Michele F, Matteo B. On the priority vector associated with a reciprocal relation and a pairwise comparison matrix[J]. Soft Computing: A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications, 2010(14): 639–645.

[18] 吕跃进, 程宏涛, 覃菊莹. 基于相对熵的互补判断矩阵排序方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(7): 1328–1333.
Lü Y J, Cheng H T, Tan J Y. Complementary judgement matrix ranking method based on relative entropy[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2011, 31(7): 1328–1333.

[19] 樊治平, 姜艳萍, 肖四汉. 模糊判断矩阵的一致性及其性质 [J]. 控制与决策, 2001, 16(1): 69–71.
Fan Z P, Jiang Y P, Xiao S H. Consistency of fuzzy judgement matrix and its properties[J]. Control and Decision, 2001, 16(1): 69–71.

[20] 樊治平, 李洪燕. 基于 Fuzzy 偏好关系的一种方法排序方法 [J]. 东北大学学报 (自然科学版), 1999, 20(6): 651–653.
Fan Z P, Li H Y. A ranking method for alternatives based on fuzzy preference relation[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 1999, 20(6): 651–653.

[21] 樊治平, 李洪燕, 胡国奋. 一类 Fuzzy 判断矩阵及方案排序的目标规划方法 [J]. 东北大学学报 (自然科学版), 2000, 21(1): 60–62.
Fan Z P, Li H Y, Hu G F. Fuzzy judgement matrix and the goal programming method for ranking alternatives[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2000, 21(1): 60–62.

[22] Xu Z S, Da Q L. A least deviation method to obtain a priority vector of a fuzzy preference relation[J]. European Journal of Operational Research, 2005, 164(1): 206–216.

[23] 徐泽水. 互补判断矩阵的两种排序方法 —— 权的最小平方法及特征向量法 [J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(7): 71–75.
Xu Z S. Two methods for priorities of complementary judgement matrices — Weighted least-square method and eigenvector method[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2002, 22(7): 71–75.

[24] 姜艳萍, 樊治平. 一种用于模糊判断矩阵排序的 χ^2 方法 [J]. 东北大学学报 (自然科学版), 2000, 21(5): 573–575.
Jiang Y P, Fan Z P. Chi-square ranking method for the fuzzy judgement matrix[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2000, 21(5): 573–575.

[25] 孔松泉, 达庆利, 徐泽水. 互补判断矩阵排序的广义 χ^2 法 [J]. 东南大学学报 (自然科学版), 2002, 32(4): 659–662.
Kong S Q, Da Q L, Xu Z S. Generalized chi square method for priorities of complementary judgement matrices[J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2002, 32(4): 659–662.

[26] 刘卫锋, 何霞. 模糊判断矩阵排序向量的最小偏差法 [J]. 模糊系统与数学, 2012, 26(6): 132–136.
Liu W F, He X. A Least deviation method of priority vector for deriving priority of fuzzy judgement matrix[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2012, 26(6): 132–136.

[27] Masamichi S. Fuzzy sets concept in rank-ordering objects[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1973, 43(3): 717–733.

[28] Tesuzo T. Fuzzy preference orderings in group decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12(2): 117–131.

[29] Saaty T L, Luis G V. Inconsistency and rank preservation[J]. Journal of Mathematical Psychology, 1984, 28(2): 205–214.