doi: 10.12011/1000-6788(2018)07-1802-17 中图法分类号: N94 文献标志码: A

多层次复杂系统的资源优化配置方法

马占新 [1], 曹 莉 [2,3], 包斯琴高娃 [4]

(1. 内蒙古大学 经济管理学院, 呼和浩特 010021; 2. 内蒙古大学 数学科学学院, 呼和浩特 010021; 3. 内蒙古医科大学 计算机信息学院, 呼和浩特 010110; 4. 内蒙古工业大学 理学院, 呼和浩特 010051)

摘 要 数据包络分析 (data envelopment analysis, DEA) 是一种重要的效率评价方法, 特别适合复杂系统的评价问题. 但由于复杂系统指标体系的复杂性使得 DEA 方法在评价复杂系统效率问题时也遇到了一些无法回避的困难, 主要表现在评价结果过于强调次要指标的作用、常常出现多数单元有效、对投影的要求过于苛刻、指标集成后无法找到针对原始指标的改进信息等. 为了解决上述问题, 给出了一种用于复杂系统评价的数据包络分析模型, 并对相应的 DEA 有效性含义、模型性质以及模型的求解方法等进行了探讨. 通过实例比较可以看出, 本文方法不仅具有传统 DEA 方法的优点, 而且还很好地克服了上述缺点.

关键词 综合评价; 多目标决策; 数据包络分析; 样本单元; 指标集成

A resource optimized allocation method of multi-level complex system

MA Zhanxin[1], CAO Li[2,3], BAO Siqin'gaowa[4]

(1. School of Economics and Management, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China; 2. School of Mathematics Science, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China; 3. College of Computer and Information, Inner Mongolia Medical University, Hohhot 010110, China; 4. School of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China)

Abstract Data envelopment analysis (DEA) is an important efficiency evaluation method, and it is especially suitable for analyzing the complex systems. However, DEA method also has some disadvantages that cannot be overcome in practical application because of the complexity of index system. It mainly shows in the following aspects. Firstly, the evaluation result may excessively emphasize the secondary index function. Secondly, it often appears that most units are effective. Thirdly, the requirement to projection is too high. Fourthly, It can't find the improvement information for the original indexes. In order to solve above problem, a data envelopment analysis model for evaluating complex systems is given. The meaning of DEA efficiency, properties and solving method of this model are also discussed. By the comparison of examples, it can be found that the above model not only has the advantages of the traditional DEA method, but also overcomes the shortcomings of the traditional method.

Keywords comprehensive evaluation; multi-objective decision-making; data envelopment analysis; sample unit; integration of index

---

收稿日期: 2017-07-03

作者简介: 马占新 (1970–), 男, 蒙古族, 乌兰浩特人, 教授, 博士, 博士生导师, 研究方向: 综合评价与决策分析, 数据包络分析, E-mail: em_mazhanxin@imu.edu.cn; 曹莉 (1984–), 男, 汉, 自贡人, 讲师, 博士研究生, 研究方向: 综合评价与决策分析, 数据包络分析, E-mail: caolidd@sina.com; 包斯琴高娃 (1975–), 女, 蒙古族, 通辽人, 高级实验师, 博士研究生, 研究方向: 数据包络分析及其应用, E-mail: baosiqingaowa@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金 (71661025, 71261017); 内蒙古自然科学基金 (2016MS0705); 内蒙古草原英才项目 (12000-12102012); 内蒙古医科大学青年创新基金 (YKD2015QNCX007)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (71661025, 71261017); Natural Science Foundation of Inner Mongolia of China (2016MS0705); Inner Mongolia Prairie Excellence Specialist Project (12000-12102012); Foundation for Youths of Inner Mongolia Medical University (YKD2015QNCX007)

中文引用格式: 马占新, 曹莉, 包斯琴高娃. 多层次复杂系统的资源优化配置方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(7): 1802–1818.

英文引用格式: Ma Z X, Cao L, Bao S Q G W. A resource optimized allocation method of multi-level complex system[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2018, 38(7): 1802–1818.

1 引言

现实世界中, 很多系统都是复杂系统, 比如社会管理系统、区域经济系统、大型的人群网络系统等. 伴随着现代社会的不断进步和信息化程度的不断增强, 复杂系统越来越多的出现在社会的各个方面, 系统内部的联系越来越紧密、系统结构也日趋复杂, 对复杂系统的研究已经成为管理学研究的重点和难点问题. 数据包络分析 (data envelopment analysis, DEA) 方法是评价复杂系统问题的一类重要方法, 自 1978 年 Charnes 等提出 C^2R 模型以来 [1], DEA 方法在评价复杂经济社会系统问题时就显示出独特的优势. 在技术经济与管理 [2−5]、资源优化配置 [6,7]、物流与供应链管理 [8]、风险评估 [9,10]、组合博弈 [11] 、结构调整 [12] 等众多领域得到了广泛应用和快速发展 [13−16]. 尽管如此, 但当应用 DEA 方法评价复杂系统问题时还是遇到了很多困难. 比如 1) 对于复杂的多层次系统问题, 有时指标层次不同、地位相差悬殊, 比如全市 GDP 总量和城市有害固体废物处理率. 应用 C^2R 模型和 BC^2 模型时, 它们权重的地位是相同的, 这样会导致 DEA 评价结果过于强调次要因素的作用, 而使评价结果失去意义, 而加入权重限制又过多地增加了主观因素. 2) 当指标数目较多、具有多个层次时, DEA 方法的计算结果常常出现多数单元的效率值均为 1 的情况, 而无法提供有用的信息. 为了解决上述问题, 许多文献进行了积极探索, 其中将 DEA 方法和 AHP 方法相结合在处理具有多层次结构的复杂系统问题中取得了较好的效果. DEA 方法与 AHP 方法的结合能够把定性数据转换为定量数据 [17−20], 并有效地度量决策单元的有效性 [21], 对有效和无效决策单元进行排序 [22,23], 还能确定 DEA 中输出输入指标的权重改变量 [24], 限制和度量 DEA 模型中输入和输出指标的权重 [25−29], 估计缺失数据 [30], 构建凸的权重组合 [31] 等等. 从以上分析可以看出, 通过权重将部分指标集成为几个指标的方法, 在一定程度上可以有效解决上述问题, 但计算结果却只能获得集成后指标的改进信息, 而无法得到针对原始指标的改进信息. 同时, 从系统调整的角度看, 不一定所有的指标都必须同时改进, 比如通过适当转移第一产业劳动人数到第三产业, 而使 GDP 总量得到有效提升也是可取的, 但应用 DEA 方法与 AHP 方法结合并不能找到这种改进方案. 为了解决这些问题, 本文给出了一种用于多层次复杂系统评价的 DEA 模型 —— (ComD) 模型, 并对模型的含义、模型的性质以及模型的求解方法等进行了探讨. 通过实例比较可以看出, (ComD) 模型不仅具有传统 DEA 模型的优点, 而且还很好地克服了上述缺点.

2 用于分析多层次复杂系统资源优化配置的 DEA 模型

由于复杂系统一般系统规模较大、涉及的要素较多、系统内部关系复杂, 以下在分析原有 DEA 模型不足的基础上, 提出了评价多层次复杂系统的 DEA 模型.

2.1 复杂系统指标体系的层次结构描述

由于复杂系统的指标体系一般规模较大, 并呈现多层次的特点. 各指标从宏观指标到微观指标、从综合指标到个性指标也各不相同, 假设某类决策单元的指标体系可以分解成图 1 所示的层次结构.

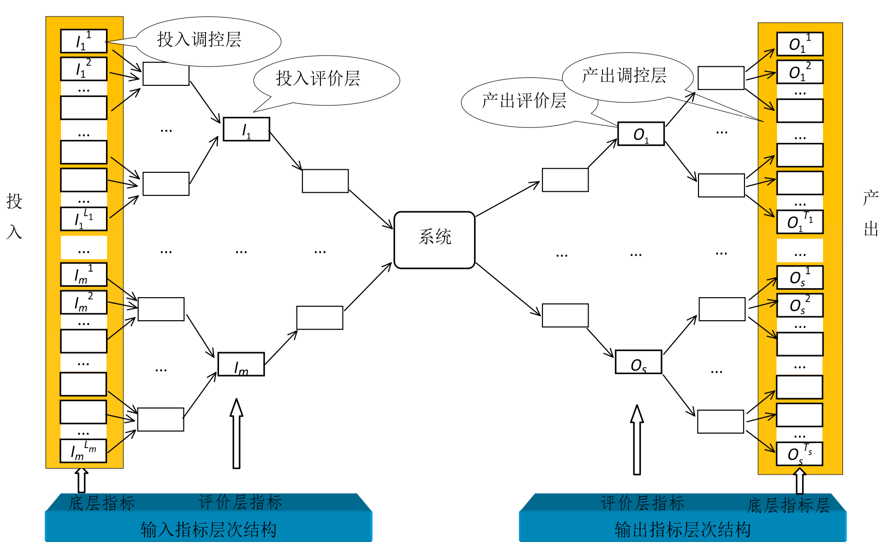

图 1 复杂系统多层次评价指标体系结构图

在评价中决策者通常根据评价目标, 选择某一层次的指标作为评价指标. 比如对于一个培训企业, 在投入方面决策者可能考虑人、财、物做为投入, 培训人数做为产出. 如果决策者希望进一步分析人力资本的结构配置与效率大小的关系时, 人力资本指标 (I_1) 可能会被考虑的更为详细. 比如再继续分解为高级培训师 (I_1^1)、中级培训师 (I_1^2)、初级培训师 (I_1^3) 等.

假设决策者用于评价的输入指标为 $I_1, I_2, \cdots, I_m$, 输出指标为 $O_1, O_2, \cdots, O_s$, 其中第 i 个输入指标又可以继续分解出 L_i 个底层指标; 第 r 个输出指标又可以继续分解出 T_r 个底层指标. 这里底层指标一般是决策者需要调控的指标, 也是决策者在进行效率改进时比较关注的指标.

2.2 传统 DEA 方法评价复杂系统效率存在的问题

假设有 n 个决策单元, 其中 $x_{ij}^{(l)}$ 表示第 j 个决策单元的第 i 个输入指标的第 l 个底层指标值, $y_{rj}^{(t)}$ 表示第 j 个决策单元的第 r 个输出指标的第 t 个底层指标值, 这里 $x_{ij}^{(l)}$, $y_{rj}^{(t)}$ 均为正数. 对上述底层指标直接应用传统 DEA 模型进行评价时, 对第 j_0 $(1 \leq j_0 \leq n)$ 个决策单元有以下模型

$$
(\text{CBFS})\left\{\begin{array}{ll}
\text{Min} & \theta-\varepsilon\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{L_i} s_i^{l-}+\sum_{r=1}^{s}\sum_{t=1}^{T_r} s_r^{t+}\right) \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(l)}\lambda_j+s_i^{l-}=\theta x_{ij_0}^{(l)}, l=1,2,\cdots,L_i, i=1,2,\cdots,m, \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_{rj}^{(t)}\lambda_j-s_r^{t+}=y_{rj_0}^{(t)}, t=1,2,\cdots,T_r, r=1,2,\cdots,s, \\
& \delta_1\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j-\delta_2(-1)^{\delta_3}\lambda_{n+1}\right)=\delta_1, \\
& \boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{0}, \lambda_{n+1}\geq 0, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-}\geq\mathbf{0}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+}\geq\mathbf{0}.
\end{array}\right. \tag{1}
$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, $\tilde{\boldsymbol{s}}^{-}=(s_1^{1-},\cdots,s_1^{L_1-},\cdots,s_m^{1-},\cdots,s_m^{L_m-})$, $\tilde{\boldsymbol{s}}^{+}=(s_1^{1+},\cdots,s_1^{T_1+},\cdots,s_s^{1+},\cdots,s_s^{T_s+})$, ε 为非阿基米德无穷小量. δ_1, δ_2, δ_3 是取值为 0, 1 的参数, 当 $\delta_1=0$ 时, 可测算 C^2R 模型效率; 当 $\delta_1=1$, $\delta_2=0$ 时, 可测算 BC^2 模型效率; 当 $\delta_1=1$, $\delta_2=1$, $\delta_3=1$ 时, 可测算 FG 模型效率; 当 $\delta_1=1$, $\delta_2=1$, $\delta_3=0$ 时, 可测算 ST 模型效率. 由于上述模型可以看成是 C^2R 模型 [1]、BC^2 模型 [3]、FG 模型 [4] 和 ST 模型 [5] 的直接应用, 所以由传统 DEA 理论 [1,3–5] 可以给出以下引理 1 和定义 1.

引理 1 如果模型 (CBFS) 的最优解 $\theta^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \lambda_{n+1}^0, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-0}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+0}$ 满足 $\theta^0=1, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-0}=0, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+0}=0$, 则称第 j_0 个决策单元为 DEA 有效 (CT).

定义 1 设 $\theta^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \lambda_{n+1}^0, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-0}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+0}$ 是模型 (CBFS) 的最优解, 令 $\hat{x}_{ij_0}^{(l)}=\theta^0 x_{ij_0}^{(l)}-s_i^{l-0}, \hat{y}_{rj_0}^{(t)}=y_{rj_0}^{(t)}+s_r^{t+0}$, $l=1,2,\cdots,L_i, i=1,2,\cdots,m, t=1,2,\cdots,T_r, r=1,2,\cdots,s$, 称

$$((\hat{x}_{1j_0}^{(1)},\cdots,\hat{x}_{1j_0}^{(L_1)},\cdots,\hat{x}_{mj_0}^{(1)},\cdots,\hat{x}_{mj_0}^{(L_m)}),(\hat{y}_{1j_0}^{(1)},\cdots,\hat{y}_{1j_0}^{(T_1)},\cdots,\hat{y}_{sj_0}^{(1)},\cdots,\hat{y}_{sj_0}^{(T_s)}))$$

为第 j_0 个决策单元在 DEA 的相对有效面上的投影 (CT).

记 $\Delta x_{ij_0}^{(l)}=x_{ij_0}^{(l)}-\hat{x}_{ij_0}^{(l)}, \Delta y_{rj_0}^{(t)}=\hat{y}_{rj_0}^{(t)}-y_{rj_0}^{(t)}$.

在应用 (CBFS) 模型评价多层次复杂系统效率时, 常常遇到以下问题.

1) 当指标数目较多、具有多个层次时, DEA 方法的计算结果常常出现多数单元的效率值均为 1 的情况, 而无法提供有用的信息.

2) 对于复杂的多层次系统问题, 有时指标层次不同、地位相差悬殊. 应用 C^2R 模型和 BC^2 模型时它们权重的地位是相同的, 这样会导致 DEA 评价结果过于强调次要因素的作用, 而使评价结果失去意义, 而加入权重限制又过多的增加了主观因素.

3) 从系统调整的角度看, 不一定所有的指标都必须同时改进, 但应用 DEA 方法与 AHP 方法结合并不能找到这种改进方案.

由于复杂系统问题的指标体系过于庞大, 常常会出现多数单元有效的情况, 为此, 一些改进的模型被提出. 比如采用主成分分析方法、指标集成的办法将评价指标合成为几个主要指标, 再进行评价. 下面是文 [32] 给出的一种通过将指标按不同层次进行加权降维的 DEA 模型.

$$
(\mathrm{NJD})\begin{cases}\mathrm{Min} & \theta-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}s_i^{-}+\sum_{r=1}^{s}s_r^{+}\right)\\ \mathrm{s.t.} & \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{L_i}(a_i^l x_{ij}^{(l)})\lambda_j+s_i^{-}=\theta\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l x_{ij_0}^{(l)}, i=1,2,\cdots,m,\\ & \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T_r}(b_r^t y_{rj}^{(t)})\lambda_j-s_r^{+}=\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t y_{rj_0}^{(t)}, r=1,2,\cdots,s,\\ & \delta_1\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j-\delta_2(-1)^{\delta_3}\lambda_{n+1}\right)=\delta_1,\\ & \boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{0},\lambda_{n+1}\geq 0,\boldsymbol{s}^{-}\geq\mathbf{0},\boldsymbol{s}^{+}\geq\mathbf{0}.\end{cases}\tag{2}
$$

其中 $\boldsymbol{s}^{-}=(s_1^{-},s_2^{-},\cdots,s_m^{-}),\boldsymbol{s}^{+}=(s_1^{+},s_2^{+},\cdots,s_s^{+}),a_i^l$ 表示第 i 个输入指标的第 l 种底层指标的相对权重, b_r^t 表示第 r 个输出指标的第 t 种底层指标的相对权重, $a_i^l>0,b_r^t>0$. $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ 的含义与模型 (CBFS) 相同.

引理 2 [32] 如果模型 (NJD) 的最优解 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0,\boldsymbol{s}^{-0},\boldsymbol{s}^{+0}$ 满足 $\theta^0=1,\boldsymbol{s}^{-0}=\mathbf{0},\boldsymbol{s}^{+0}=\mathbf{0}$, 则决策单元 j_0 为 DEA 有效 (NJ).

定义 2 [32] 设 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0,\boldsymbol{s}^{-0},\boldsymbol{s}^{+0}$ 是模型 (NJD) 的最优解, 令

$$\hat{X}_i=\theta^0\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l x_{ij_0}^{(l)}-s_i^{-0}, i=1,2,\cdots,m, \hat{Y}_r=\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t y_{rj_0}^{(t)}+s_r^{+0}, r=1,2,\cdots,s,$$

称 $((\hat{X}_1,\cdots,\hat{X}_m),(\hat{Y}_1,\cdots,\hat{Y}_s))$ 为决策单元 j_0 在 DEA 的相对有效面上的 "投影" (NJ).

记

$$\Delta X_i=\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l x_{ij_0}^{(l)}-\hat{X}_i, \Delta Y_r=\hat{Y}_r-\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t y_{rj_0}^{(t)}.$$

这种通过指标降维的方法尽管可以解决多数决策单元有效的问题, 但获得的决策单元投影只能是针对集成后指标的改进信息, 而无法得到针对原始指标的决策信息. 从而在很大程度上弱化了 DEA 投影方法的功能. 为了解决这些问题, 以下给出一种具有多层次指标系统的复杂系统效率评价方法.

2.3 一种用于复杂系统效率评价的 DEA 方法

对于决策单元 j_0, 给出以下模型

$$
(\mathrm{ComD})\begin{cases}\mathrm{Min} & \theta-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l s_i^{l-}+\sum_{r=1}^{s}\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t s_r^{t+}\right)\\ \mathrm{s.t.} & \sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{(l)}\lambda_j+s_i^{l-}=\theta x_{ij_0}^{(l)}, l=1,2,\cdots L_i, i=1,2,\cdots,m,\\ & \sum_{j=1}^{n}y_{rj}^{(t)}\lambda_j-s_r^{t+}=y_{rj_0}^{(t)}, t=1,2,\cdots,T_r, r=1,2,\cdots,s,\\ & \delta_1\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j-\delta_2(-1)^{\delta_3}\lambda_{n+1}\right)=\delta_1,\\ & \sum_{l=1}^{L_i}a_i^l s_i^{l-}\geq 0, i=1,2,\cdots,m,\\ & \sum_{t=1}^{T_r}b_r^t s_r^{t+}\geq 0, r=1,2,\cdots,s,\\ & \lambda_j\geq 0, j=1,2,\cdots,n+1.\end{cases}\tag{3}
$$

定义 3 如果模型 (ComD) 的最优解 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0,\tilde{\boldsymbol{s}}^{-0},\tilde{\boldsymbol{s}}^{+0}$ 满足 $\theta^0=1$ 且 $\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l s_i^{l-0}=0$, $i=1,2,\cdots,m$, $\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t s_r^{t+0}=0$, $r=1,2,\cdots,s$, 则称决策单元 j_0 为 DEA 有效 (FZ).

定义 4 假设模型 (ComD) 的最优解为 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0,\tilde{\boldsymbol{s}}^{-0},\tilde{\boldsymbol{s}}^{+0}$, 令

$$\tilde{x}_{ij_0}^{(l)}=\theta^0 x_{ij_0}^{(l)}-s_i^{l-0}, l=1,2,\cdots,L_i, i=1,2,\cdots,m, \tilde{y}_{rj_0}^{(t)}=y_{rj_0}^{(t)}+s_r^{t+0}, t=1,2,\cdots,T_r, r=1,2,\cdots,s,$$

称 $((\tilde{x}_{1j_0}^{(1)},\cdots,\tilde{x}_{1j_0}^{(L_1)},\cdots,\tilde{x}_{mj_0}^{(1)},\cdots,\tilde{x}_{mj_0}^{(L_m)}),(\tilde{y}_{1j_0}^{(1)},\cdots,\tilde{y}_{1j_0}^{(T_1)},\cdots,\tilde{y}_{sj_0}^{(1)},\cdots,\tilde{y}_{sj_0}^{(T_s)}))$ 为决策单元 j_0 在 DEA 的相对有效面上的 “投影” (FZ).

令 $\Delta x_{ij_0}^{(l)}=x_{ij_0}^{(l)}-\tilde{x}_{ij_0}^{(l)},\Delta y_{rj_0}^{(t)}=\tilde{y}_{rj_0}^{(t)}-y_{rj_0}^{(t)}$, 则其含义如下:

1) 如果 $\Delta x_{ij_0}^{(l)}>0$ (或 $\Delta x_{ij_0}^{(l)}<0$) 表示决策单元 j_0 在第 i 个输入指标的第 l 种底层指标上的投入过大 (或更为经济). 2) 如果 $\Delta y_{rj_0}^{(t)}>0$ (或 $\Delta y_{rj_0}^{(t)}\leq 0$) 表示决策单元 j_0 在第 r 个输出指标的第 t 种底层指标上输出亏空 (或更为有效).

以下应用一个例子来说明 (ComD) 模型的优势.

例 1 决策者要评价 5 个企业的生产效率, 通过效率评价找到效率无效原因和调整的方案. 假设选择的指标体系如图 2 所示. 其中投入指标为高级工工资 (I_1^1)、中级工工资 (I_1^2)、初级工工资 (I_1^3)、质检人员工资 (I_1^4)、资产投入总额 (I_2), 产出指标为企业生产利润 (O_1).

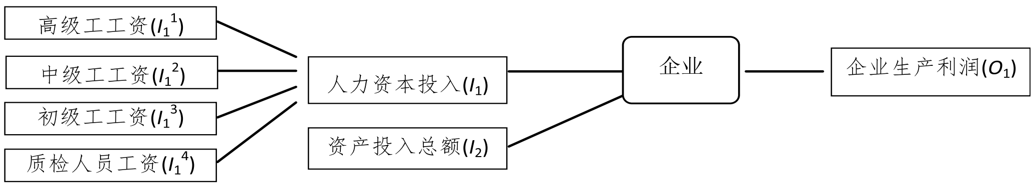

图 2 企业评价指标体系结构图

为了便于说明问题, 这里假设各企业的产出值相同, 并且决策单元的投入产出值满足规模收益不变, 决策单元的指标数据如表 1 所示.

表 1 某 5 个企业的指标数据

企业序号	1	2	3	4	5
高级工工资 (亿元)	4	4	4	20	100
中级工工资 (亿元)	8	100	80	50	200
初级工工资 (亿元)	200	20	50	1	1000
质检人员工资 (亿元)	2	2	2	10	1
资产投入总额 (亿元)	10	10	10	8	1000
企业生产利润 (亿元)	10	10	10	10	10

由于

$$人员工资\ (I_1)=高级工工资\ (I_1^1)+中级工工资\ (I_1^2)+初级工工资\ (I_1^3)+质检人员工资\ (I_1^4),$$

因此, 这里取 $a_1^1=1$, $a_1^2=1$, $a_1^3=1$, $a_1^4=1$. 同时, 由于资产投入总额 (I_2) 和企业生产利润 (O_1) 没有被继续分解, 只有一个指标, 故令 $a_2^1=1$, $b_1^1=1$. 应用模型 (CBFS)、模型 (NJD) 和模型 (ComD) 可以测得 5 个企业的效率值和投影值如表 2 所示.

1) 在效率测算方面的比较

首先, 从表 1 可以看出各决策单元的产出相同, 但决策单元 5 的总投入至少是其他单元的 10 倍以上. 然而应用 (CBFS) 模型所测得的决策单元效率值均为 1 (见表 2), 因此, 此时 (CBFS) 模型无法有效区分各决策单元的效率大小, 也无法给出决策单元改进的信息. 而 (ComD) 模型和 (NJD) 模型能够区分各企业效率值的大小.

其次, 从表 1 可以看出决策单元 5 在相同产出的条件下, 人力资本总投入超过其他单元 6 倍, 资产投入总额超过其他单元 100 倍, 效率明显低下. 但决策单元 5 仅仅由于质检人员工资的投入较小, 应用 (CBFS) 模型所测得的效率值即为 1 (见表 2), 这是不合理的. 而应用 (ComD) 模型和 (NJD) 则可以反映这种投入产出上的差距, 结果更具合理性.

2) 在投影分析方面的比较

首先, 从表 2 可以看出尽管决策单元 5 的效率值为 0.0085, 非常低下, 但此时 (CBFS) 模型给出的改进值均为 0, 因此, 无法给出改进信息. (NJD) 模型只能给出集成指标的改进信息, 而无法给出原始指标的改进信息, 而 (ComD) 模型可以给出原始指标的改进信息. 比如在人力资源的改进上, 尽管决策单元 5 的效率只有 0.0085, 而 (CBFS) 模型认为高级工、中级工、初级工、质检人员的结构无需改进. (NJD) 模型无法给出

表 2　应用不同模型获得的企业在规模收益不变情况下的改进值和效率值

模型	决策单元	改进值 ΔI_1^1	改进值 ΔI_1^2	改进值 ΔI_1^3	改进值 ΔI_1^4	改进值 ΔI_1	改进值 ΔI_2	改进值 ΔO_1	效率值
(CBFS)	1	0	0	0	0	-	0	0	1
	2	0	0	0	0	-	0	0	1
	3	0	0	0	0	-	0	0	1
	4	0	0	0	0	-	0	0	1
	5	0	0	0	0	-	0	0	1
(NJD)	1	-	-	-	-	133	2	0	0.8
	2	-	-	-	-	45	2	0	0.8
	3	-	-	-	-	55	2	0	0.8
	4	-	-	-	-	0	0	0	1
	5	-	-	-	-	1220	992	0	0.0085
(ComD)	1	-16	-42	199	-8	133	2	0	0.8
	2	-16	50	19	-8	45	2	0	0.8
	3	-16	30	49	-8	55	2	0	0.8
	4	0	0	0	0	0	0	0	1
	5	80	150	999	-9	1220	992	0	0.0085

这些指标的详细信息. 而 (ComD) 则可以给出合理的改进信息, 即高级工减少 72.7% (80/110), 中级工减少 75% (150/200)、初级工减少 99.9% (999/1000)、质检人员增加 900% (9/1).

3) 在实际决策中, 如果以个别指标上的较小代价可以换得整体效率的大幅度改进, 那么, 这种改进也是可取的, 但应用传统 DEA 方法并不能找到这种改进方案. 从上面的投影分析可以看出, 本文给出的 (ComD) 模型可以找到这样的方案. 比如 (ComD) 模型分析的结果认为如果决策单元 5 增加 8 位质检人员, 并大幅减少其他人员的数量, 则有可能会大幅提高自身的效率.

3　用于复杂系统资源优化配置模型的相关性质

为了给出复杂系统资源优化配置模型与其他 DEA 模型的关系, 进一步分析该模型的含义, 以下首先讨论 (ComD) 模型的相关性质.

定理 1　如果决策单元 j_0 为 DEA 有效 (FZ), 则决策单元 j_0 为 DEA 有效 (CT).

证明　假设决策单元 j_0 为 DEA 有效 (FZ), 由定义 3 可知模型 (ComD) 的最优解 $\theta^1, \boldsymbol{\lambda}^1, \lambda_{n+1}^1, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-1}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+1}$ 满足 $\theta^1 = 1$ 且 $\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l s_i^{l-1} = 0, i = 1, 2, \cdots, m, \sum_{t=1}^{T_r} b_r^t s_r^{t+1} = 0, r = 1, 2, \cdots, s$, 因此模型 (ComD) 的最优值为 1.

以下假设决策单元 j_0 不为 DEA 有效 (CT), 则模型 (CBFS) 存在最优解 $\theta^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \lambda_{n+1}^0, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-0}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+0}$ 满足 $\theta^0 < 1$ 或者 $\theta^0 = 1, (\tilde{\boldsymbol{s}}^{-0}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+0}) \neq \mathbf{0}$. 由于 $\theta^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \lambda_{n+1}^0, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-0}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+0}$ 是模型 (CBFS) 的最优解, 因此

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(l)} \lambda_j^0 + s_i^{l-0} = \theta^0 x_{ij_0}^{(l)}, l = 1, 2, \cdots, L_i, i = 1, 2, \cdots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj}^{(t)} \lambda_j^0 - s_r^{t+0} = y_{rj_0}^{(t)}, t = 1, 2, \cdots, T_r, r = 1, 2, \cdots, s,$$

$$\delta_1 \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^0 - \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{n+1}^0 \right) = \delta_1,$$

$$\boldsymbol{\lambda}^0 \geq \mathbf{0}, \lambda_{n+1}^0 \geq 0, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-0} \geq \mathbf{0}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+0} \geq \mathbf{0}.$$

由于 $a_i^l > 0, b_r^t > 0$, 所以

$$\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l s_i^{l-0} \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m, \sum_{t=1}^{T_r} b_r^t s_r^{t+0} \geq 0, r = 1, 2, \cdots, s,$$

因此, $\theta^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \lambda_{n+1}^0, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-0}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+0}$ 是模型 (ComD) 的可行解, 但

$$\theta^0 - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{L_i} a_i^l s_i^{l-0} + \sum_{r=1}^s \sum_{t=1}^{T_r} b_r^t s_r^{t+0} \right) < 1.$$

矛盾! 证毕.

定理 1 表明如果应用 (ComD) 模型评价时决策单元有效, 则应用模型 (CBFS) 评价时决策单元也有效.

定理 2 1) 假设 $\theta^1, \boldsymbol{\lambda}^1, \lambda^1_{n+1}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-1}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+1}$ 为模型 (ComD) 的最优解, 令

$$s_i^{-1}=\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l s_i^{l-1}, i=1,2,\cdots,m, s_r^{+1}=\sum_{t=1}^{T_r} b_r^t s_r^{t+1}, r=1,2,\cdots,s,$$
$$\boldsymbol{s}^{-1}=(s_1^{-1},s_2^{-1},\cdots,s_m^{-1}), \boldsymbol{s}^{+1}=(s_1^{+1},s_2^{+1},\cdots,s_s^{+1}),$$

则 $\theta^1, \boldsymbol{\lambda}^1, \lambda^1_{n+1}, \boldsymbol{s}^{-1}, \boldsymbol{s}^{+1}$ 是模型 (NJD) 的可行解.

2) 假设 $\theta^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \lambda^0_{n+1}, \boldsymbol{s}^{-0}, \boldsymbol{s}^{+0}$ 为模型 (NJD) 的最优解, 令

$$s_i^{l-2}=\theta^0 x_{ij_0}^{(l)}-\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(l)}\lambda_j^0, l=1,2,\cdots,L_i, i=1,2,\cdots,m,$$
$$s_r^{t+2}=\sum_{j=1}^{n} y_{rj}^{(t)}\lambda_j^0-y_{rj_0}^{(t)}, t=1,2,\cdots,T_r, r=1,2,\cdots,s,$$
$$\tilde{\boldsymbol{s}}^{-2}=(s_1^{1-2},\cdots,s_1^{L_1-2},\cdots,s_m^{1-2},\cdots,s_m^{L_m-2}), \tilde{\boldsymbol{s}}^{+2}=(s_1^{1+2},\cdots,s_1^{T_1+2},\cdots,s_s^{1+2},\cdots,s_s^{T_s+2}),$$

可得 $\theta^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \lambda^0_{n+1}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-2}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+2}$ 为 (ComD) 的可行解.

证明 1) 如果模型 (ComD) 的最优解为 $\theta^1, \boldsymbol{\lambda}^1, \lambda^1_{n+1}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-1}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+1}$, 则有

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(l)}\lambda_j^1+s_i^{l-1}=\theta^1 x_{ij_0}^{(l)}, l=1,2,\cdots,L_i, i=1,2,\cdots,m,$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}^{(t)}\lambda_j^1-s_r^{t+1}=y_{rj_0}^{(t)}, t=1,2,\cdots,T_r, r=1,2,\cdots,s,$$
$$\delta_1\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^1-\delta_2(-1)^{\delta_3}\lambda_{n+1}^1\right)=\delta_1,$$
$$\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l s_i^{l-1}\geq 0, i=1,2,\cdots,m, \sum_{t=1}^{T_r} b_r^t s_r^{t+1}\geq 0, r=1,2,\cdots,s,$$
$$\lambda_j^1\geq 0, j=1,2,\cdots,n+1,$$

由于 $a_i^l>0, b_r^t>0$, 可得

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{L_i}(a_i^l x_{ij}^{(l)})\lambda_j^1+\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l s_i^{l-1}=\theta^1\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l x_{ij_0}^{(l)}, i=1,\cdots,m,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T_r}(b_r^t y_{rj}^{(t)})\lambda_j^1-\sum_{t=1}^{T_r} b_r^t s_r^{t+1}=\sum_{t=1}^{T_r} b_r^t y_{rj_0}^{(t)}, r=1,\cdots,s,$$

令

$$s_i^{-1}=\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l s_i^{l-1}, i=1,2,\cdots,m, s_r^{+1}=\sum_{t=1}^{T_r} b_r^t s_r^{t+1}, r=1,2,\cdots,s,$$
$$\boldsymbol{s}^{-1}=(s_1^{-1},s_2^{-1},\cdots,s_m^{-1}), \boldsymbol{s}^{+1}=(s_1^{+1},s_2^{+1},\cdots,s_s^{+1}),$$

则 $\theta^1, \boldsymbol{\lambda}^1, \lambda^1_{n+1}, \boldsymbol{s}^{-1}, \boldsymbol{s}^{+1}$ 是模型 (NJD) 的可行解.

2) 如果模型 (NJD) 的最优解为 $\theta^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \lambda^0_{n+1}, \boldsymbol{s}^{-0}, \boldsymbol{s}^{+0}$, 则有

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{L_i}(a_i^l x_{ij}^{(l)})\lambda_j^0+s_i^{-0}=\theta^0\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l x_{ij_0}^{(l)}, i=1,2,\cdots,m,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T_r}(b_r^t y_{rj}^{(t)})\lambda_j^0-s_r^{+0}=\sum_{t=1}^{T_r} b_r^t y_{rj_0}^{(t)}, r=1,2,\cdots,s,$$

$$\begin{aligned}&\delta_1\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^0-\delta_2(-1)^{\delta_3}\lambda_{n+1}^0\right)=\delta_1,\\&s_i^{-0}\geq 0,i=1,2,\cdots,m,s_r^{+0}\geq 0,r=1,2,\cdots,s,\\&\lambda_j^0\geq 0,j=1,2,\cdots,n+1,\end{aligned}$$

令

$$s_i^{l-2}=\theta^0x_{ij_0}^{(l)}-\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{(l)}\lambda_j^0,l=1,2,\cdots,L_i,i=1,2,\cdots,m,$$

$$s_r^{t+2}=\sum_{j=1}^{n}y_{rj}^{(t)}\lambda_j^0-y_{rj_0}^{(t)},t=1,2,\cdots,T_r,r=1,2,\cdots,s,$$

可得

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{(l)}\lambda_j^0+s_i^{l-2}=\theta^0x_{ij_0}^{(l)},l=1,2,\cdots L_i,i=1,2,\cdots,m,\\&\sum_{j=1}^{n}y_{rj}^{(t)}\lambda_j^0-s_r^{t+2}=y_{rj_0}^{(t)},t=1,2,\cdots,T_r,r=1,2,\cdots,s,\\&\sum_{l=1}^{L_i}a_i^ls_i^{l-2}=\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l(\theta^0x_{ij_0}^{(l)}-\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{(l)}\lambda_j^0)=\theta^0\sum_{l=1}^{L_i}a_i^lx_{ij_0}^{(l)}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{L_i}(a_i^lx_{ij}^{(l)})\lambda_j^0=s_i^{-0}\geq 0,\\&\sum_{t=1}^{T_r}b_r^ts_r^{t+2}=\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t(\sum_{j=1}^{n}y_{rj}^{(t)}\lambda_j^0-y_{rj_0}^{(t)})=\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T_r}(b_r^ty_{rj}^{(t)})\lambda_j^0-\sum_{t=1}^{T_r}b_r^ty_{rj_0}^{(t)}=s_r^{+0}\geq 0,\end{aligned}$$

可得 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0,\tilde{\boldsymbol{s}}^{-2},\tilde{\boldsymbol{s}}^{+2}$ 为 (ComD) 的可行解. 证毕.

定理 3　假设模型 (ComD) 的最优解为 $\theta^1,\boldsymbol{\lambda}^1,\lambda_{n+1}^1,\tilde{\boldsymbol{s}}^{-1},\tilde{\boldsymbol{s}}^{+1}$, 模型 (NJD) 的最优解为 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0$, $\boldsymbol{s}^{-0},\boldsymbol{s}^{+0}$, 则 $\theta^0=\theta^1$.

证明　假设 $\theta^1,\boldsymbol{\lambda}^1,\lambda_{n+1}^1,\tilde{\boldsymbol{s}}^{-1},\tilde{\boldsymbol{s}}^{+1}$ 为模型 (ComD) 的最优解, 由定理 2 可知, 如果令

$$\begin{aligned}&s_i^{-1}=\sum_{l=1}^{L_i}a_i^ls_i^{l-1},i=1,2,\cdots,m,s_r^{+1}=\sum_{t=1}^{T_r}b_r^ts_r^{t+1},r=1,2,\cdots,s,\\&\boldsymbol{s}^{-1}=(s_1^{-1},s_2^{-1},\cdots,s_m^{-1}),\boldsymbol{s}^{+1}=(s_1^{+1},s_2^{+1},\cdots,s_s^{+1}),\end{aligned}$$

则 $\theta^1,\boldsymbol{\lambda}^1,\lambda_{n+1}^1$, $\boldsymbol{s}^{-1},\boldsymbol{s}^{+1}$ 是模型 (NJD) 的可行解. 因为 (NJD) 的最优解为 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0,\boldsymbol{s}^{-0},\boldsymbol{s}^{+0}$, 因此

$$\theta^1-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}s_i^{-1}+\sum_{r=1}^{s}s_r^{+1}\right)\geq\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}s_i^{-0}+\sum_{r=1}^{s}s_r^{+0}\right).$$

由于 ε 为非阿基米德无穷小量, 故有 $\theta^1\geq\theta^0$.

反过来, 如果模型 (NJD) 的最优解为 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0,\boldsymbol{s}^{-0},\boldsymbol{s}^{+0}$, 由定理 2 可知, 如果令

$$\begin{aligned}&s_i^{l-2}=\theta^0x_{ij_0}^{(l)}-\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{(l)}\lambda_j^0,l=1,2,\cdots,L_i,i=1,2,\cdots,m,\\&s_r^{t+2}=\sum_{j=1}^{n}y_{rj}^{(t)}\lambda_j^0-y_{rj_0}^{(t)},t=1,2,\cdots,T_r,r=1,2,\cdots,s,\\&\tilde{\boldsymbol{s}}^{-2}=(s_1^{1-2},\cdots,s_1^{L_1-2},\cdots,s_m^{1-2},\cdots,s_m^{L_m-2}),\tilde{\boldsymbol{s}}^{+2}=(s_1^{1+2},\cdots,s_1^{T_1+2},\cdots,s_s^{1+2},\cdots,s_s^{T_s+2}),\end{aligned}$$

则有 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0,\tilde{\boldsymbol{s}}^{-2},\tilde{\boldsymbol{s}}^{+2}$ 为 (ComD) 的可行解. 同理可得 $\theta^0\geq\theta^1$; 由上可得 $\theta^0=\theta^1$, 证毕.

定理 3 表明 (ComD) 模型给出的决策单元的效率值与模型 (NJD) 给出的效率值相等.

定理 4 决策单元 j_0 为 DEA 有效 (FZ) 当且仅当决策单元 j_0 为 DEA 有效 (NJ).

证明　(必要性) 若决策单元 j_0 为 DEA 有效 (FZ), 由定义 3 可知模型 (ComD) 的最优解 $\theta^1,\boldsymbol{\lambda}^1,\lambda_{n+1}^1$, $\tilde{\boldsymbol{s}}^{-1},\tilde{\boldsymbol{s}}^{+1}$ 满足 $\theta^1=1$ 且 $\tilde{\boldsymbol{s}}^{-1}=\mathbf{0},\tilde{\boldsymbol{s}}^{+1}=\mathbf{0}$. 模型 (ComD) 的最优值等于 1.

假设决策单元 j_0 不是 DEA 有效 (NJ), 则由引理 2 和定理 3 可知模型 (NJD) 存在最优解 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0$,

$\boldsymbol{s}^{-0}, \boldsymbol{s}^{+0}$ 满足 $\theta^0=\theta^1=1, (\boldsymbol{s}^{-0}, \boldsymbol{s}^{+0}) \neq \mathbf{0}$. 由定理 2 可知, 如果令

$$s_i^{l-2}=\theta^0 x_{ij_0}^{(l)}-\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(l)}\lambda_j^0, l=1,2,\cdots,L_i, i=1,2,\cdots,m,$$

$$s_r^{t+2}=\sum_{j=1}^n y_{rj}^{(t)}\lambda_j^0-y_{rj_0}^{(t)}, t=1,2,\cdots,T_r, r=1,2,\cdots,s,$$

$$\tilde{\boldsymbol{s}}^{-2}=(s_1^{1-2},\cdots,s_1^{L_1-2},\cdots,s_m^{1-2},\cdots,s_m^{L_m-2}), \tilde{\boldsymbol{s}}^{+2}=(s_1^{1+2},\cdots,s_1^{T_1+2},\cdots,s_s^{1+2},\cdots,s_s^{T_s+2}),$$

则 $\theta^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \lambda_{n+1}^0, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-2}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+2}$ 为 (ComD) 的可行解, 但

$$\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l s_i^{l-2}+\sum_{r=1}^s\sum_{t=1}^{T_r} b_r^t s_r^{t+2}\right)<1,$$

矛盾! 证毕.

(充分性) 若决策单元 j_0 为 DEA 有效 (NJ), 由引理 2 可知模型 (NJD) 的最优解 $\theta^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \lambda_{n+1}^0, \boldsymbol{s}^{-0}, \boldsymbol{s}^{+0}$ 满足 $\theta^0=1$, 且 $\boldsymbol{s}^{-0}=\mathbf{0}, \boldsymbol{s}^{+0}=\mathbf{0}$. 模型 (NJD) 的最优值等于 1. 假设决策单元 j_0 不是 DEA 有效 (FZ), 则由定义 3 和定理 3 可知模型 (ComD) 存在最优解 $\theta^1, \boldsymbol{\lambda}^1, \lambda_{n+1}^1, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-1}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+1}$ 满足 $\theta^0=\theta^1=1, (\tilde{\boldsymbol{s}}^{-1}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+1}) \neq \mathbf{0}$. 由定理 2 可知, 如果令

$$s_i^{-1}=\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l s_i^{l-1}, i=1,2,\cdots,m, s_r^{+1}=\sum_{t=1}^{T_r} b_r^t s_r^{t+1}, r=1,2,\cdots,s,$$

$$\boldsymbol{s}^{-1}=(s_1^{-1},s_2^{-1},\cdots,s_m^{-1}), \boldsymbol{s}^{+1}=(s_1^{+1},s_2^{+1},\cdots,s_s^{+1}),$$

则 $\theta^1, \boldsymbol{\lambda}^1, \lambda_{n+1}^1, \boldsymbol{s}^{-1}, \boldsymbol{s}^{+1}$ 是模型 (NJD) 的可行解. 但

$$\theta^1-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m s_i^{-1}+\sum_{r=1}^s s_r^{+1}\right)<1,$$

矛盾! 证毕.

定理 4 表明, (ComD) 模型与模型 (NJD) 给出的决策单元 j_0 的有效性相同.

定理 5 1) 假设 $\theta^1, \boldsymbol{\lambda}^1, \lambda_{n+1}^1, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-1}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+1}$ 为模型 (ComD) 的最优解, 令

$$s_i^{-1}=\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l s_i^{l-1}, i=1,2,\cdots,m, s_r^{+1}=\sum_{t=1}^{T_r} b_r^t s_r^{t+1}, r=1,2,\cdots,s,$$

$$\boldsymbol{s}^{-1}=(s_1^{-1},s_2^{-1},\cdots,s_m^{-1}), \boldsymbol{s}^{+1}=(s_1^{+1},s_2^{+1},\cdots,s_s^{+1}),$$

则 $\theta^1, \boldsymbol{\lambda}^1, \lambda_{n+1}^1, \boldsymbol{s}^{-1}, \boldsymbol{s}^{+1}$ 是模型 (NJD) 的最优解.

2) 假设 $\theta^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \lambda_{n+1}^0, \boldsymbol{s}^{-0}, \boldsymbol{s}^{+0}$ 为模型 (NJD) 的最优解, 令

$$s_i^{l-2}=\theta^0 x_{ij_0}^{(l)}-\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(l)}\lambda_j^0, l=1,2,\cdots,L_i, i=1,2,\cdots,m,$$

$$s_r^{t+2}=\sum_{j=1}^n y_{rj}^{(t)}\lambda_j^0-y_{rj_0}^{(t)}, t=1,2,\cdots,T_r, r=1,2,\cdots,s,$$

$$\tilde{\boldsymbol{s}}^{-2}=(s_1^{1-2},\cdots,s_1^{L_1-2},\cdots,s_m^{1-2},\cdots,s_m^{L_m-2}), \tilde{\boldsymbol{s}}^{+2}=(s_1^{1+2},\cdots,s_1^{T_1+2},\cdots,s_s^{1+2},\cdots,s_s^{T_s+2}),$$

则 $\theta^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \lambda_{n+1}^0, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-2}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+2}$ 为 (ComD) 的最优解.

证明 1) 反证法. 若 $\theta^1, \boldsymbol{\lambda}^1, \lambda_{n+1}^1, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-1}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+1}$ 为模型 (ComD) 的最优解, 由定理 2 知 $\theta^1, \boldsymbol{\lambda}^1, \lambda_{n+1}^1, \boldsymbol{s}^{-1}, \boldsymbol{s}^{+1}$ 是模型 (NJD) 的可行解. 假设 $\theta^1, \boldsymbol{\lambda}^1, \lambda_{n+1}^1, \boldsymbol{s}^{-1}, \boldsymbol{s}^{+1}$ 不是模型 (NJD) 的最优解, 则存在模型 (NJD) 的最优解 $\theta^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \lambda_{n+1}^0, \boldsymbol{s}^{-0}, \boldsymbol{s}^{+0}$ 使得

$$\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m s_i^{-0}+\sum_{r=1}^s s_r^{+0}\right)<\theta^1-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m s_i^{-1}+\sum_{r=1}^s s_r^{+1}\right),$$

因此, 可知

$$\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m s_i^{-0}+\sum_{r=1}^s s_r^{+0}\right)<\theta^1-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l s_i^{l-1}+\sum_{r=1}^s\sum_{t=1}^{T_r} b_r^t s_r^{t+1}\right). \tag{4}$$

同时, 由于 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0,\boldsymbol{s}^{-0},\boldsymbol{s}^{+0}$ 是模型 (NJD) 的最优解, 令

$$s_i^{l-2}=\theta^0 x_{ij_0}^{(l)}-\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(l)}\lambda_j^0, l=1,2,\cdots,L_i, i=1,2,\cdots,m,$$

$$s_r^{t+2}=\sum_{j=1}^n y_{rj}^{(t)}\lambda_j^0-y_{rj_0}^{(t)}, t=1,2,\cdots,T_r, r=1,2,\cdots,s,$$

$$\tilde{\boldsymbol{s}}^{-2}=(s_1^{1-2},\cdots,s_1^{L_1-2},\cdots,s_m^{1-2},\cdots,s_m^{L_m-2}), \tilde{\boldsymbol{s}}^{+2}=(s_1^{1+2},\cdots,s_1^{T_1+2},\cdots,s_s^{1+2},\cdots,s_s^{T_s+2}),$$

由定理 2 可知 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0,\tilde{\boldsymbol{s}}^{-2},\tilde{\boldsymbol{s}}^{+2}$ 为 (ComD) 的可行解. 故有

$$\theta^1-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l s_i^{l-1}+\sum_{r=1}^s\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t s_r^{t+1}\right)\leq\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l\left(\theta^0 x_{ij_0}^{(l)}-\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(l)}\lambda_j^0\right)+\sum_{r=1}^s\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t\left(\sum_{j=1}^n y_{rj}^{(t)}\lambda_j^0-y_{rj_0}^{(t)}\right)\right),$$

由于

$$\begin{aligned}&\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l\left(\theta^0 x_{ij_0}^{(l)}-\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(l)}\lambda_j^0\right)+\sum_{r=1}^s\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t\left(\sum_{j=1}^n y_{rj}^{(t)}\lambda_j^0-y_{rj_0}^{(t)}\right)\right)\\&=\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m\left(\theta^0\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l x_{ij_0}^{(l)}-\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^{L_i}(a_i^l x_{ij}^{(l)})\lambda_j^0\right)+\sum_{r=1}^s\left(\sum_{j=1}^n\sum_{t=1}^{T_r}(b_r^t y_{rj}^{(t)})\lambda_j^0-\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t y_{rj_0}^{(t)}\right)\right)\\&=\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m s_i^{-0}+\sum_{r=1}^s s_r^{+0}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\theta^1-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l s_i^{l-1}+\sum_{r=1}^s\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t s_r^{t+1}\right)\leq\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m s_i^{-0}+\sum_{r=1}^s s_r^{+0}\right),$$

这与式 (4) 矛盾!

2) 反证法. 如果 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0,\boldsymbol{s}^{-0},\boldsymbol{s}^{+0}$ 为模型 (NJD) 的最优解, 由定理 2 可知 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0,\tilde{\boldsymbol{s}}^{-2},\tilde{\boldsymbol{s}}^{+2}$ 是 (ComD) 的可行解, 假设 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0,\tilde{\boldsymbol{s}}^{-2},\tilde{\boldsymbol{s}}^{+2}$ 不是 (ComD) 的最优解, 则存在模型 (ComD) 的最优解 $\theta^1,\boldsymbol{\lambda}^1,\lambda_{n+1}^1,\tilde{\boldsymbol{s}}^{-1},\tilde{\boldsymbol{s}}^{+1}$ 使得

$$\theta^1-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l s_i^{l-1}+\sum_{r=1}^s\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t s_r^{t+1}\right)<\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l s_i^{l-2}+\sum_{r=1}^s\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t s_r^{t+2}\right),$$

由于

$$\begin{aligned}&\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l s_i^{l-2}+\sum_{r=1}^s\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t s_r^{t+2}\right)\\&=\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l\left(\theta^0 x_{ij_0}^{(l)}-\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(l)}\lambda_j^0\right)+\sum_{r=1}^s\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t\left(\sum_{j=1}^n y_{rj}^{(t)}\lambda_j^0-y_{rj_0}^{(t)}\right)\right)\\&=\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m\left(\theta^0\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l x_{ij_0}^{(l)}-\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^{L_i}(a_i^l x_{ij}^{(l)})\lambda_j^0\right)+\sum_{r=1}^s\left(\sum_{j=1}^n\sum_{t=1}^{T_r}(b_r^t y_{rj}^{(t)})\lambda_j^0-\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t y_{rj_0}^{(t)}\right)\right)\\&=\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m s_i^{-0}+\sum_{r=1}^s s_r^{+0}\right),\end{aligned}$$

因此, 可知

$$\theta^1-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l s_i^{l-1}+\sum_{r=1}^s\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t s_r^{t+1}\right)<\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m s_i^{-0}+\sum_{r=1}^s s_r^{+0}\right). \tag{5}$$

同时, 由于 $\theta^1,\boldsymbol{\lambda}^1,\lambda_{n+1}^1,\tilde{\boldsymbol{s}}^{-1},\tilde{\boldsymbol{s}}^{+1}$ 为模型 (ComD) 的最优解, 由定理 2 可知, 令

$$s_i^{-1}=\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l s_i^{l-1}, i=1,2,\cdots,m, s_r^{+1}=\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t s_r^{t+1}, r=1,2,\cdots,s,$$

$$\tilde{\boldsymbol{s}}^{-1}=(s_1^{-1},s_2^{-1},\cdots,s_m^{-1}), \tilde{\boldsymbol{s}}^{+1}=(s_1^{+1},s_2^{+1},\cdots,s_s^{+1}),$$

则 $\theta^1,\boldsymbol{\lambda}^1,\lambda_{n+1}^1,\boldsymbol{s}^{-1},\boldsymbol{s}^{+1}$ 是模型 (NJD) 的可行解. 故有

$$\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m s_i^{-0}+\sum_{r=1}^s s_r^{+0}\right)\le\theta^1-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m s_i^{-1}+\sum_{r=1}^s s_r^{+1}\right)=\theta^1-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l s_i^{l-1}+\sum_{r=1}^s\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t s_r^{t+1}\right),$$

这与式 (5) 矛盾! 证毕.

以下证明决策单元的投影为 DEA 有效.

定理 6 设 $\theta^0,\boldsymbol{\lambda}^0,\lambda_{n+1}^0,\boldsymbol{s}^{-0},\boldsymbol{s}^{+0}$ 是模型 (NJD) 的最优解, 则决策单元 j_0 的投影 $((\hat{X}_1,\cdots\hat{X}_m),(\hat{Y}_1,\cdots\hat{Y}_s))$ 为 DEA 有效 (NJ).

证明 假设 $((\hat{X}_1,\cdots\hat{X}_m),(\hat{Y}_1,\cdots\hat{Y}_s))$ 不为 DEA 有效 (NJ), 则存在 $\theta^1,\lambda_0^1,\boldsymbol{\lambda}^1,\lambda_{n+1}^1,\boldsymbol{s}^{-1},\boldsymbol{s}^{+1}$ 使得 $\theta^1\ne 1$ 或者 $\theta^1=1,(\boldsymbol{s}^{-1},\boldsymbol{s}^{+1})\ne\boldsymbol{0}$. 由模型 (NJD) 约束条件可知

$$\hat{X}_i\lambda_0^1+\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^{L_i}(a_i^l x_{ij}^{(l)})\lambda_j^1+s_i^{-1}=\theta^1\hat{X}_i, i=1,\cdots,m,$$

$$\hat{Y}_r\lambda_0^1+\sum_{j=1}^n\sum_{t=1}^{T_r}(b_r^t y_{rj}^{(t)})\lambda_j^1-s_r^{+1}=\hat{Y}_r, r=1,\cdots,s,$$

$$\delta_1\left(\lambda_0^1+\sum_{j=1}^n\lambda_j^1-\delta_2(-1)^{\delta_3}\lambda_{n+1}^1\right)=\delta_1.$$

由于

$$\hat{X}_i=\theta^0\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l x_{ij_0}^{(l)}-s_i^{-0}, i=1,2,\cdots,m, \hat{Y}_r=\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t y_{rj_0}^{(t)}+s_r^{+0}, r=1,2,\cdots,s,$$

故得

$$\left(\theta^0\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l x_{ij_0}^{(l)}-s_i^{-0}\right)\lambda_0^1+\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^{L_i}(a_i^l x_{ij}^{(l)})\lambda_j^1+s_i^{-1}=\theta^1\left(\theta^0\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l x_{ij_0}^{(l)}-s_i^{-0}\right), i=1,\cdots,m,$$

$$\left(\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t y_{rj_0}^{(t)}+s_r^{+0}\right)\lambda_0^1+\sum_{j=1}^n\sum_{t=1}^{T_r}(b_r^t y_{rj}^{(t)})\lambda_j^1-s_r^{+1}=\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t y_{rj_0}^{(t)}+s_r^{+0}, r=1,\cdots,s.$$

因此

$$\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^{L_i}(a_i^l x_{ij}^{(l)})\lambda_j^1+(s_i^{-1}+(1-\lambda_0^1)s_i^{-0})\le(1-\lambda_0^1)\left(\theta^0\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l x_{ij_0}^{(l)}\right), i=1,\cdots,m,$$

$$\sum_{j=1}^n\sum_{t=1}^{T_r}(b_r^t y_{rj}^{(t)})\lambda_j^1-(s_r^{+1}+(1-\lambda_0^1)s_r^{+0})=(1-\lambda_0^1)\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t y_{rj_0}^{(t)}, r=1,\cdots,s,$$

所以

$$\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^{L_i}(a_i^l x_{ij}^{(l)})(\lambda_j^1/(1-\lambda_0^1))+s_i^{-0}+(s_i^{-1}/(1-\lambda_0^1))\le\theta^0\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l x_{ij_0}^{(l)}, i=1,\cdots,m,$$

$$\sum_{j=1}^n\sum_{t=1}^{T_r}(b_r^t y_{rj}^{(t)})(\lambda_j^1/(1-\lambda_0^1))-s_r^{+0}-(s_r^{+1}/(1-\lambda_0^1))=\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t y_{rj_0}^{(t)}, r=1,\cdots,s,$$

$$\delta_1\left(\sum_{j=1}^n\lambda_j^1/(1-\lambda_0^1)-\delta_2(-1)^{\delta_3}(\lambda_{n+1}^1/(1-\lambda_0^1))\right)=\delta_1.$$

令

$$\bar{s_i}^-=\theta^0\sum_{l=1}^{L_i}a_i^l x_{ij_0}^{(l)}-\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^{L_i}(a_i^l x_{ij}^{(l)})(\lambda_j^1/(1-\lambda_0^1)),\ \ \bar{s_r}^+=\sum_{j=1}^n\sum_{t=1}^{T_r}(b_r^t y_{rj}^{(t)})(\lambda_j^1/(1-\lambda_0^1))-\sum_{t=1}^{T_r}b_r^t y_{rj_0}^{(t)},$$

可以验证 $\theta^0,\bar{\boldsymbol{s}}^-,\bar{\boldsymbol{s}}^+,\lambda_{n+1}^1/(1-\lambda_0^1),\lambda_j^1/(1-\lambda_0^1),j=1,2,\cdots,n$ 是模型 (NJD) 的可行解, 但

$$\begin{aligned}\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m\bar{s_i}^-+\sum_{r=1}^s\bar{s_r}^+\right)&\le\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m s_i^{-0}+\sum_{r=1}^s s_r^{+0}\right)-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m s_i^{-1}/(1-\lambda_0^1)+\sum_{r=1}^s s_r^{+1}/(1-\lambda_0^1)\right)\\&<\theta^0-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^m s_i^{-0}+\sum_{r=1}^s s_r^{+0}\right),\end{aligned}$$

这与假设 $\theta^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \lambda_{n+1}^0, \boldsymbol{s}^{-0}, \boldsymbol{s}^{+0}$ 是模型 (NJD) 的最优解矛盾! 证毕.

一般来说, 用于复杂系统评价的指标体系都比较庞大, 指标个数远远多于决策单元个数, 这有可能导致大部分决策单元均为 DEA 有效, 同时, 将不同层次的指标数据列入 DEA 模型或者选择的底层指标过多, 常常导致评价结果过于强调次要因素的作用, 而使得 DEA 方法的评价结果失去现实意义. 因此, 一般采用把底层指标凝聚成若干综合指标再应用 DEA 方法进行评价, 但这种处理方法只能求出针对上层指标的改进信息, 无法找到基于底层指标的改进信息. 上述讨论为决策者找到了基于底层指标改进的信息.

由定理 3 可知应用模型 (ComD) 获得的效率值和应用模型 (NJD) 获得的效率值相等. 即应用模型 (ComD) 可以获得模型 (NJD) 的效率评价结果. 同时, 由定理 5 可知, 如果

$$\Delta X_i = (1-\theta^0)\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l x_{ij_0}^{(l)} + s_i^{-0}, \Delta Y_r = s_r^{+0}, i=1,2,\cdots,m, r=1,2,\cdots,s$$

为决策单元 j_0 的改进值, 令

$$s_i^{l-2} = \theta^0 x_{ij_0}^{(l)} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(l)}\lambda_j^0, l=1,2,\cdots,L_i, i=1,2,\cdots,m,$$

$$s_r^{t+2} = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}^{(t)}\lambda_j^0 - y_{rj_0}^{(t)}, t=1,2,\cdots,T_r, r=1,2,\cdots,s,$$

则决策单元 j_0 的改进值可以分解如下:

$$\Delta x_{ij_0}^{(l)} = (1-\theta^0)x_{ij_0}^{(l)} + s_i^{l-2}, l=1,2,\cdots,L_i, i=1,2,\cdots,m,$$
$$\Delta y_{rj_0}^{(t)} = s_r^{t+2}, t=1,2,\cdots,T_r, r=1,2,\cdots,s,$$

由定理 6 可知通过该底层指标的调整, 可以使决策单元 j_0 在改进后达到 DEA 有效 (NJ).

4 用于复杂系统资源优化配置模型的拓展

为了进一步拓展复杂系统资源优化配置模型的应用范围, 以下将评价的样本集拓展到更一般的情况, 由于篇幅所限, 有关样本集的确定方法参见文献 [33, 34].

假设另有 $\bar{n}$ 个样本单元作为评价的参照样本, 其中 $\bar{x}_{ij}^{(l)}$ 表示第 j 个样本单元的第 i 个输入指标的第 l 个底层指标值, $\bar{y}_{rj}^{(t)}$ 表示第 j 个样本单元的第 r 个输出指标的第 t 个底层指标值, 这里 $\bar{x}_{ij}^{(l)}$, $\bar{y}_{rj}^{(t)}$ 均为正数. 其他符号含义不变, 则对第 $p(1\le p\le n)$ 个决策单元有以下模型.

$$(\text{G-Com})\left\{\begin{array}{ll}\text{Min} & \theta - \varepsilon\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l s_i^{l-} + \sum_{r=1}^{s}\sum_{t=1}^{T_r} b_r^t s_r^{t+}\right)\\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{x}_{ij}^{(l)}\lambda_j + s_i^{l-} = \theta x_{ip}^{(l)}, l=1,2,\cdots,L_i, i=1,2,\cdots,m,\\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{y}_{rj}^{(t)}\lambda_j - s_r^{t+} = y_{rp}^{(t)}, t=1,2,\cdots,T_r, r=1,2,\cdots,s,\\ & \delta_1\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{\bar{n}}\lambda_j - \delta_2(-1)^{\delta_3}\lambda_{\bar{n}+1}\right) = \delta_1,\\ & \displaystyle\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l s_i^{l-} \ge 0, i=1,2,\cdots,m,\\ & \displaystyle\sum_{t=1}^{T_r} b_r^t s_r^{t+} \ge 0, r=1,2,\cdots,s,\\ & \lambda_j \ge 0, j=1,2,\cdots,\bar{n}+1.\end{array}\right. \quad (6)$$

这里 $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{\bar{n}}), \tilde{\boldsymbol{s}}^- = (s_1^{1-},\cdots,s_1^{L_1-},\cdots,s_m^{1-},\cdots,s_m^{L_m-}), \tilde{\boldsymbol{s}}^+ = (s_1^{1+},\cdots,s_1^{T_1+},\cdots,s_s^{1+},\cdots,s_s^{T_s+})$.

定义 5　如果模型 (G-Com) 的最优解 $\theta^0, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^0, \lambda_{\bar{n}+1}^0, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-0}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+0}$ 满足以下条件之一:

1) $\theta^0 = 1$ 且 $\sum_{l=1}^{L_i} a_i^l s_i^{l-0} = 0, i=1,2,\cdots,m, \sum_{t=1}^{T_r} b_r^t s_r^{t+0} = 0, r=1,2,\cdots,s$,

2) $\theta^0 > 1$,

3) 模型 (G-Com) 无可行解,

则称决策单元 p 为 G-DEA 有效.

定义 6 假设模型 (G-Com) 的最优解为 $\theta^0, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^0, \lambda^0_{\bar{n}+1}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{-0}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{+0}$, 令

$$\tilde{x}^{(l)}_{ip} = \theta^0 x^{(l)}_{ip} - s^{l-0}_i, l = 1, 2, \cdots, L_i, i = 1, 2, \cdots, m,$$

$$\tilde{y}^{(t)}_{rp} = y^{(t)}_{rp} + s^{t+0}_r, t = 1, 2, \cdots, T_r, r = 1, 2, \cdots, s,$$

称 $((\tilde{x}^{(1)}_{1p}, \cdots, \tilde{x}^{(L_1)}_{1p}, \cdots, \tilde{x}^{(1)}_{mp}, \cdots, \tilde{x}^{(L_m)}_{mp}), (\tilde{y}^{(1)}_{1p}, \cdots, \tilde{y}^{(T_1)}_{1p}, \cdots, \tilde{y}^{(1)}_{sp}, \cdots, \tilde{y}^{(T_s)}_{sp}))$ 为决策单元 p 在样本有效面上的 "投影".

令 $\Delta x^{(l)}_{ip} = x^{(l)}_{ip} - \tilde{x}^{(l)}_{ip}, \Delta y^{(t)}_{rp} = \tilde{y}^{(t)}_{rp} - y^{(t)}_{rp}$, 则其含义如下:

1) 如果 $\Delta x^{(l)}_{ij_0} > 0$ (或 $\Delta x^{(l)}_{ij_0} < 0$) 表示和样本单元相比, 决策单元 j_0 在第 i 个输入指标的第 l 种底层指标上的投入过大 (或更为经济). 2) 如果 $\Delta y^{(t)}_{rj_0} > 0$ (或 $\Delta y^{(t)}_{rj_0} < 0$) 表示和样本单元相比, 决策单元 j_0 在第 r 个输出指标的第 t 种底层指标上输出亏空 (或更为有效).

5 中国城市经济社会整体发展投入产出效率分析

为了进行比较研究, 以下选取中国 15 个副省级城市 2015 年的经济社会发展的数据进行分析. 这 15 个副省级城市包括沈阳、大连、长春、哈尔滨、南京、杭州、宁波、厦门、济南、青岛、武汉、广州、深圳、成都、西安. 决策者希望从经济发展、科技进步、社会生活和生态保护较为宏观的层面对各个城市的经济社会发展效率作出全面的评估. 同时, 在进行经济社会结构调整中, 决策者又希望能够得到更加微观的调整信息, 这样制定的方案才更具体.

5.1 指标选取与权重确定

由于决策者的评价目标是希望从经济发展、科技进步、社会生活和生态保护几个方面综合考察中国城市经济社会发展的综合效率, 因此, 本文从这几个方面出发, 并参照文 [35]、[36] 关于经济社会发展指标体系的设计方法, 选取的投入指标为全社会劳动人数 (I_1) 和固定资产投资 (I_2). 宏观层面的产出指标分为经济综合指数 (O_1)、科技综合指数 (O_2)、社会生活综合指数 (O_3) 和生态综合指数 (O_4) 四类, 并认为这四个方面的重要性相同. 在微观层面上, 反映经济目标的指标包括地区生产总值 (O^1_1) 和人均地区生产总值 (O^2_1); 反映科技目标的指标包括科技人员占总人口比重 (O^1_2) 和专利申请数 (O^2_2); 反映社会生活目标的指标包括职工平均工资占生活支出的比重 (O^1_3) 和人均居住面积 (O^2_3); 反映生态目标的指标包括建成区绿化覆盖率 (O^1_4), 工业废水排放量 (O^2_4), 工业废气排放量 (O^3_4) 和工业固体废物产生量 (O^4_4). 指标之间的投入产出关系和指标权重如图 3 所示.

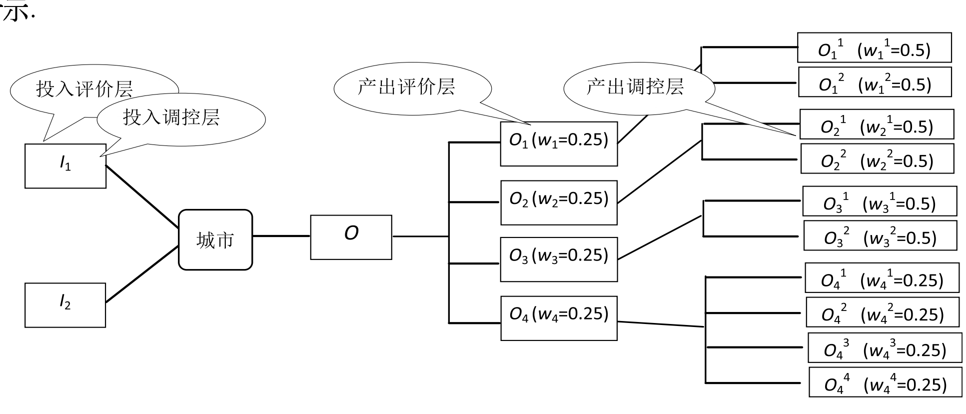

图 3 评价指标体系关系与权重选择

由于各指标的单位不同, 数量差距较大, 以下首先将数据进行归一化处理, 令

$$x'^{(l)}_{ij} = x^{(l)}_{ij} / \max_{1\le k\le n}\{x^{(l)}_{ik}\}, y'^{(t)}_{rj} = y^{(t)}_{rj} / \max_{1\le k\le n}\{y^{(t)}_{rk}\}.$$

由于第 j 个城市的输入指标为

$$x'^{(1)}_{1j} = x^{(1)}_{1j} / \max_{1\le k\le n}\{x^{(1)}_{1k}\}, x'^{(1)}_{2j} = x^{(1)}_{2j} / \max_{1\le k\le n}\{x^{(1)}_{2k}\}.$$

所以取 $a_1^1 = 1/\max\limits_{1\le k\le n}\{x_{1k}^{(1)}\}$, $a_2^1 = 1/\max\limits_{1\le k\le n}\{x_{2k}^{(1)}\}$, 第 j 个城市的总输出指标 (y_j) 中由于经济综合指数在四个指标中的权重为 0.25, 而 GDP 在反映经济综合指数的两个指标中的权重为 0.5, 因此, GDP 对输出的总权重为 $\omega_1\omega_1^1 = 0.25\times 0.5$.

$$\begin{aligned} y_j &= \omega_1\omega_1^1 y_{1j}^{(1)}/\max_{1\le k\le 15}\{y_{1k}^{(1)}\} + \omega_1\omega_1^2 y_{1j}^{(2)}/\max_{1\le k\le 15}\{y_{1k}^{(2)}\} + \cdots + \omega_4\omega_4^4 y_{4j}^{(4)}/\max_{1\le k\le 15}\{y_{4k}^{(4)}\} \\ &= \left(\omega_1\omega_1^1/\max_{1\le k\le 15}\{y_{1k}^{(1)}\}\right) y_{1j}^{(1)} + \left(\omega_1\omega_1^2/\max_{1\le k\le 15}\{y_{1k}^{(2)}\}\right) y_{1j}^{(2)} + \cdots + \left(\omega_4\omega_4^4/\max_{1\le k\le 15}\{y_{4k}^{(1)}\}\right) y_{4j}^{(4)}. \end{aligned} \tag{7}$$

所以取 $b_1^1 = \omega_1\omega_1^1/\max\limits_{1\le k\le 15}\{y_{1k}^{(1)}\}$, $b_1^2 = \omega_1\omega_1^2/\max\limits_{1\le k\le 15}\{y_{1k}^{(2)}\}, \cdots, b_4^4 = \omega_4\omega_4^4/\max\limits_{1\le k\le 15}\{y_{4k}^{(4)}\}$.

5.2 决策单元的有效性测评结果的比较

应用模型 (CBFS)、模型 (NJD) 和模型 (ComD) 可以测得 15 个城市的效率值如表 3 所示.

表 3 应用不同模型获得的 15 个计划单列市在规模收益可变情况下的效率值

模型	沈阳	大连	长春	哈尔滨	南京	杭州	宁波	厦门	济南	青岛	武汉	广州	深圳	成都	西安
(CBFS)	1	1	0.923	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(NJD)	0.762	1	0.815	0.902	0.838	0.719	1	1	0.915	0.687	0.704	0.761	1	0.553	0.811
(ComD)	0.762	1	0.815	0.902	0.838	0.719	1	1	0.915	0.687	0.704	0.761	1	0.553	0.811

从表 3 可见, 在规模收益可变情况下, 应用 BC^2 模型 (即 (CBFS) 模型) 获得的结果除了长春之外, 其他 14 个城市均为 DEA 有效, 因此, 应用 BC^2 模型无法区分各城市的有效性程度, 也无法给出进一步改进的信息. 而应用模型 (NJD) 和模型 (ComD) 测得的结果中只有深圳、大连、厦门、宁波有效, 其他单元均无效, 有效性次序为: 深圳、厦门、大连、宁波 > 济南 > 哈尔滨 > 南京 > 长春 > 西安 > 沈阳 > 广州 > 杭州 > 武汉 > 青岛 > 成都.

5.3 决策单元的投影分析结果比较

在规模收益可变情况下, 对于表 3 中的效率值, 应用定义 1、定义 2 和定义 4 的公式可以进一步得到 15 个城市的投影值如表 4 所示.

从表 4 可以看出, 应用 (CBFS) 模型给出的改进值除长春外均为 0. 应用 (NJD) 模型只能给出集成指标的改进信息, 而无法给出原始指标的改进信息. 而 (ComD) 模型可以给出原始指标的改进信息. 比如对于西安市测得的效率值为 0.811, 和最优目标值 1 还有一定的差距. 需要调整的方向为全社会劳动人数冗余 62 万人, 固定资产投资冗余 962.7 亿元, 地区生产总值和人均地区生产总值产出的不足量分别是 1333.1 亿元和 3.83 万元, 科技人员占总人口比重需要再增加 0.00745. 主要的优势表现在职工平均工资占生活支出的比重相对较高、专利申请数相对较大. 因此, 西安市的改进方向是努力提高资源的使用效率、努力提高 GDP 的产出量, 提高科技人员的引进力度、加大职工的进修和培训, 进而提高科技人员的占比. 同时尽管专利申请数较大, 但 GDP 的产出存在较大不足, 因此, 应努力提高科技成果转化的力度.

从长春的改进信息看, (CBFS) 模型只能给出决策单元的不足, 而 (ComD) 模型既可以给出决策单元的不足, 也能给出决策单元存在的优势.

从表 5 可以看出, 广州是经济大市, 在 GDP 和人均 GDP 上具有绝对的优势, 和有效水平相比超出 39.79% 和 12.29%, 但在劳动人员效率和固定资产投资效率方面还有待进一步提高, 特别是科技人员占总人口比重过低, 这也印证了劳动人员效率较低现象的存在, 也正是这些原因导致应用 (ComD) 模型评价出的广州经济效率不是很高的原因.

由于这里分析的是经济社会的综合结果, 并且把经济、科技、社会生活和生态环境放在同等重要位置去考虑而得出的结果, 从表 5 可以看出由于广州科技人员占总人口比重过低, 只有 0.775%, 要达到有效程度需要提高到 2.1%, 这和深圳的 5.8% 相比也并不是很高, 因此, 综合看广州的效率不高也是合理的. 当然如果决策者提高经济指标的权重或者单纯从经济目标去分析, 广州的效率会有较大提高.

总之, (ComD) 模型在评价复杂系统有效性方面不仅能有效区分各城市效率大小, 而且也能指出各城市的不足和优势, 具有比较重要的现实意义.

表 4 应用不同模型获得的 15 个计划单列市的指标改进值

改进值	模型	1 沈阳	2 大连	3 长春	4 哈尔滨	5 南京	6 杭州	7 宁波	8 厦门	9 济南	10 青岛	11 武汉	12 广州	13 深圳	14 成都	15 西安
	(CBFS)	0	0	23.3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I_1	(NJD)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	(ComD)	72.8	0	56.1	24. 3	86.6	150.6	0.0	0.0	24.9	131.9	131.7	165.9	0	346.4	62.0
	(CBFS)	0	0	679. 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I_2	(NJD)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	(ComD)	1266.7	0	799.7	448.6	1113.3	1562.9	0	0	298.6	2051.9	3158.1	1294.5	0	3105.4	962.7
	(CBFS)	0	0	796. 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O_1^1	(NJD)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	(ComD)	−325.8	0	554.7	1322.2	−192.5	−2203.0	0	0	−522.2	−1467.9	−2985.4	−7201.5	0	−2270	1333.1
	(CBFS)	0	0	15983. 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O_1^2	(NJD)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	(ComD)	18858	0	29519	48522	−6871	−8350	0	0	14057	3542	790	−16742	0	33907	38275
	(CBFS)	0	0	0. 00113	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O_2^1	(NJD)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	(ComD)	0.0059	0	0.008	0.0034	0.0041	0.0083	0	0	0.0094	0.0103	0.0079	0.021	0	0.0112	0.0075
	(CBFS)	0	0	4301. 8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O_2^2	(NJD)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	(ComD)	−4998	0	2631	−14025	3177	−3012	0	0	308	−13267	4518	3734	0	7072	−36348
	(CBFS)	0	0	0.514	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O_3^1	(NJD)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	(ComD)	0.222	0	0.427	0.086	−0.391	0. 191	0	0	−0.132	−0.067	0.351	0.250	0	−0.682	−0.234
	(CBFS)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O_3^2	(NJD)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	(ComD)	−7.862	0	−5.359	2.697	0.663	1.596	0	0	−5.708	3.557	−0.364	1.967	0	−4.197	−0.037
	(CBFS)	0	0	1. 89	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O_4^1	(NJD)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	(ComD)	2.29	0	4.94	8.95	−5.10	−1.12	0	0	3. 05	1.88	−2. 22	−1.17	0	0.13	0.02
	(CBFS)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O_4^2	(NJD)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	(ComD)	−10.24	0	−12.39	−19.09	5.11	6.23	0	0	−12.71	−6.48	−7. 97	1.20	0	−0.85	−5.60
	(CBFS)	0	0	5.73	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O_4^3	(NJD)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	(ComD)	−0.83	0	4.47	4.65	17.71	−11.40	0	0	−2.29	−9.14	−10.79	−7.22	0	−5.43	−1.29
	(CBFS)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O_4^4	(NJD)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	(ComD)	0	0	0	8.37	0	−0.01	0	0	0	0	0	4.76	0	−0.01	1.91

注: 正数表示需要改进的数量, 负数表示该指标好于投影单元的数量.

表 5 2015 年广州市的指标数据与改进值

指标	广州市指标值	15 个城市中的最大值	广州市指标改进值	改进值占指标值百分比
全社会劳动人数 (万人)	693.1993	906.186	165.9	23.93%
固定资产投资 (亿元)	5405.952	7680.886	1294.5	23.95%
地区生产总值 (亿元)	18100.41	18100.41	−7201.5	−39.79%
人均地区生产总值 (常住) 元	136188	157985	−16742.1	−12.29%
科技人员占总人口比重	0.00775	0.058122	0.02101	271.10%
职工平均工资占生活支出的比重 (城镇)	2.27039	3.16715	0.25	11.01%

6 结束语

复杂系统存在于经济社会发展的许多方面, 对它的研究意义重大. 尽管 DEA 方法在处理复杂系统问题方面获得了许多进展, 但也遇到了一些无法回避的困难. 本文提出的方法不仅具有传统 DEA 方法的优点, 而且还很好地克服了 DEA 方法在处理复杂系统问题时存在的一些缺陷, 为应用 DEA 方法评价多层次复杂系统问题提供了可行的思路和办法. 当然, 该方面的研究才刚刚开始, 许多问题有待进一步研究, 比如指标权重的确定方法等, 还有待未来的进一步丰富和发展.

参考文献

[1] Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units[J]. European Journal of Operational Research, 1978, 6(2): 429–444.

[2] Wei Q L, Yu G, Lu S J. The necessary and sufficient conditions for returns to scale properties in generalized data envelopment analysis models[J]. Science in China (Series E), 2002, 45(5): 503–517.

[3] Banker R D, Charnes A, Cooper W W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis[J]. Management Science, 1984, 30(9): 1078–1092.

[4] Fare R, Grosskopf S. A nonparametric cost approach to scale efficiency[J]. Scandinavian Journal of Economics, 1985, 87(4): 594–604.

[5] Seiford L M, Thrall R M. Recent development in DEA. The mathematical programming approach to frontier analysis[J]. Journal of Economics, 1990, 46(1–2): 7–38.

[6] Asmilda M, Paradib J C, Pastorc J T. Centralized resource allocation BCC models[J]. International Journal of Management Science, 2006: 1–10.

[7] Lozano S, Villa G. Centralized resource allocation using data envelopment analysis[J]. Journal of Productivity Analysis, 2004, 22: 143–161.

[8] Liang L, Yang F, Cook W D, et al. DEA models for supply chain efficiency evaluation[J]. Annals of Operations Research, 2006, 145: 35–49.

[9] 马占新, 任慧龙. 一种基于样本的综合评价方法及其在 FSA 中的应用研究 [J]. 系统工程理论与实践, 2003, 23(2): 95–101.
Ma Z X, Ren H L. An evaluation method based on some sample units and its applying on FSA[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2003, 23(2): 95–101.

[10] 马占新. 样本数据包络面的研究与应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2003, 23(12): 32–37.
Ma Z X. Frontier that formed by some sample units and its applying[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2003, 23(12): 32–37.

[11] Ma Z X, Zhang H J, Cui X H. Study on the combination efficiency of industrial enterprises[C]// Proceedings of International Conference on Management of Technology, Australia: Aussino Academic Publishing House, 2007: 225–230.

[12] 马占新, 郑雪琳, 安建业, 等. 一种含有中性指标的数据包络分析方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(2): 418–430.
Ma Z X, Zheng X L, An J Y, et al. Data envelopment analysis method with some neutral indexes[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2017, 37(2): 418–430.

[13] 马生昀, 马占新. 基于 C^2W 模型的广义数据包络分析方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(4): 899–909.
Ma S Y, Ma Z X. Generalized data envelopment analysis method based on C^2W model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(4): 899–909.

[14] 马占新. 数据包络分析方法的研究进展 [J]. 系统工程与电子技术, 2002, 24(3): 42–46.
Ma Z X. Research on the data envelopment analysis method[J]. Systems Engineering and Electronics, 2002, 24(3): 42–46.

[15] Cooper W W, Seiford L M, Zhu J. Handbook on data envelopment analysis[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.

[16] Cooper W W, Seiford L M, Thanassoulis E, et al. DEA and its uses in different countries[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 154(2): 337–344.

[17] Yang T, Kuo C. A hierarchical AHP/DEA methodology for the facilities layout design problem[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 147(1): 128–136.

[18] Ramanathan R. Supplier selection problem: Integrating DEA with the approaches of total cost of ownership and AHP[J]. Supply Chain Management, 2007, 12(4): 258–261.

[19] Lin M, Lee Y, Ho T. Applying integrated DEA/AHP to evaluate the economic performance of local governments in China[J]. European Journal of Operational Research, 2011, 209(2): 129–140.

[20] Raut R D. Environmental performance: A hybrid method for supplier selection using AHP/DEA[J]. International Journal of Business Insights & Transformation, 2011, 5(1): 16–29.
[21] Chen T Y. Measuring firm performance with DEA and prior information in Taiwan's banks[J]. Applied Economics Letters, 2002, 9(3): 201–204.
[22] Jablonsky J. Measuring the efficiency of production units by AHP models[J]. Mathematical & Computer Modelling, 2007, 46(7–8): 1091–1098.
[23] Ho C B, Oh K B. Selecting internet company stocks using a combined DEA and AHP approach[J]. International Journal of Systems Science, 2010, 41(3): 325–336.
[24] Villa G. Multi-objective target setting in data envelopment analysis using AHP[J]. Computers & Operations Research, 2009, 36(2): 549–564.
[25] Shang J, Sueyoshi T. Theory and methodology — A unified framework for the selection of a flexible manufacturing system[J]. European Journal of Operational Research, 1995, 85(2): 297–315.
[26] Premachandra I M. Controlling factor weights in data envelopment analysis by incorporating decision maker's value judgement: An approach based on AHP[J]. International Journal of Information & Management Sciences, 2001, 12(2): 67–82.
[27] Takamura Y, Tone K. A comparative site evaluation study for relocating Japanese government agencies out of Tokyo[J]. Socio-Economic Planning Sciences, 2003, 37(2): 85–102.
[28] Kong W H, Fu T T. Assessing the performance of business colleges in Taiwan using data envelopment analysis and student based value-added performance indicators[J]. Omega, 2012, 40(5): 541–549.
[29] Feng Y J, Lu H, Bi K. An AHP/DEA method for measurement of the efficiency of R&D management activities in universities[J]. International Transactions in Operational Research, 2010, 11(2): 181–191.
[30] Saen R F, Memariani A, Lotfi F H. Determining relative efficiency of slightly non-homogeneous decision making units by data envelopment analysis: A case study in IROST[J]. Applied Mathematics & Computation, 2005, 165(2): 313–328.
[31] Liu C C, Chen C Y. Incorporating value judgments into data envelopment analysis to improve decision quality for organization[J]. Journal of American Academy of Business, Cambridge, 2004, 5(1/2): 423–427.
[32] 马占新. 关于若干 DEA 模型与方法研究 [D]. 大连: 大连理工大学, 1999.
Ma Z X. Study on several DEA models and the methods[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 1999.
[33] 马占新. 广义参考集 DEA 模型及其相关性质 [J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(4): 709–714.
Ma Z X. DEA model with generalized reference set and its properties[J]. Systems Engineering and Electronics, 2012, 34(4): 709–714.
[34] 马占新. 数据包络分析 (第二卷): 广义数据包络分析方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2012.
Ma Z X. Generalized data envelopment analysis[M]. Beijing: Science Press, 2012.
[35] 王宗军, 冯珊. 我国计划单列城市整体发展水平的多目标多层次模糊综合评价研究 [J]. 系统工程与电子技术, 1993, 15(8): 29–40.
Wang Z J, Feng S. Study on the multiobjective multilayer fuzzy comprehensive evaluation of the whole development level of Chinese independent plan cities[J]. Systems Engineering and Electronics, 1993, 15(8): 29–40.
[36] 邓志刚, 汪星明, 李宝山, 等. 社会经济系统工程 [M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1994.
Deng Z G, Wang X M, Li B S, et al. Socio-economic systems engineering[M]. Beijing: Press of Renmin University of China, 1994.