

文章编号:1673-0062(2017)03-0081-05

## 基于蚁群优化算法求解最大团问题的研究

尹 皓,宋 晗

(四川大学 软件学院,四川 成都 610207)

**摘 要:**蚁群算法是一种通过模拟自然界中蚂蚁觅食行为而发展而来的新型启发式仿生优化算法,提出至今被研究人员广泛应用于各种组合优化问题.最大团问题是图论中著名的 NPC 问题,本文对于基本蚁群算法进行了分析与讨论,针对基本蚁群算法的容易陷入局部最优解、收敛速度慢等问题进行了改进,提出了一种新型蚁群优化算法.本文提出的新型蚁群优化算法增加了结点度和历史选择次数表策略影响蚂蚁选点;另外提出了构造独立的局部信息素更新机制.最后通过对比实验验证,数据结果证明新提出的优化算法相对于基本蚁群算法的优越性和可行性.

**关键词:**蚁群优化算法;最大团问题;蚂蚁选路策略

**中图分类号:**TP301.6      **文献标志码:**A

## The Research of Ant Colony Optimization Algorithm for Maximum Clique Problem

YIN Hao, SONG Han

(Software College, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610207, China)

**Abstract:** Ant colony algorithm is a new heuristic bionic optimization algorithm developed by simulating ant foraging behavior in nature. It has been widely used by researchers to solve all kinds of combinatorial optimization problems. In this paper, the basic ant colony algorithm is analyzed and discussed. In view of the problem that the basic ant colony algorithm is easy to fall into the local optimal solution and the convergence speed is slow, it proposes a kind of New Ant Colony Optimization Algorithm. In this paper, the new ant colony optimization algorithm is proposed to increase the number of nodes and the number of historical selections to influence the ant selection points. In addition, an independent local pheromone updating mechanism is presented. Finally, the experimental results show that the feasibility of the proposed algorithm is superior to the basic ant colony algorithm.

收稿日期:2017-07-18

基金项目:四川省科技厅项目(2016JY0084)

作者简介:尹 皓(1975-),男,讲师,博士,主要从事医学超声信号与图像处理,并行计算等方面的研究. E-mail: yinhao@scu.edu.cn

**key words:** ant colony optimization algorithm; maximum group problem; Ant routing strategy

## 0 引言

最大团问题是图论分支中的一个经典的 NP 难问题,其研究在众多领域中都有着重要的理论和实际意义.蚁群算法是上世纪 90 年代提出的一种启发式算法<sup>[1]</sup>,蚁群算法对于传统的精确性算法具有较强的鲁棒性、并行性和独特的正反馈机制,使其能在面对复杂度高的问题时,具有十分优良的性能,例如面对复杂度很高的最大团问题时,蚁群算法就展现了其强大的实力.

## 1 蚁群算法及最大团问题描述

### 1.1 最大团问题描述

给定一个无向图  $G = (V, E)$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  是图  $G$  的节点集合,  $E$  是图  $G$  边的集合,并且满足  $E \subseteq V \times V$ .用无序对  $(v_i, v_j)$  表示图  $G$  的边,其中  $v_i, v_j \in V, (v_i, v_j) \in E$ .

**引理 1**  $U = (V', E')$  是无向图  $G = (V, E)$  的完全子图,当且仅当对于任意给定的无向图  $G = (V, E)$ ,若  $V' \in V, E' \in E$ ,且对于  $\forall u, v \in V'$ ,有  $(u, v) \in E'$ .

**引理 2** 称无向图  $G$  的完全子图  $U$  是  $G$  的一个团,当且仅当完全子图  $U$  不包含在图  $G$  的更大完全子图中.

**引理 3** 称无向图  $G$  的最大团  $C$  为图中包含顶点数最多的团.最大团问题即求解图  $G$  的最大团  $C$ .

由引理可知,团  $C$  是图  $G$  的节点集合  $V$  的一个子集,记作  $C, C \subseteq V, C$  中任意两个节点均相连,即团  $C$  是图  $G$  的一个完全子图,包含节点数最多的图  $G$  的子集  $C$  即为最大团.

### 1.2 蚁群算法描述

随着科学技术的发展,人们在仿生学领域中发现了许多自然界生物在它们日常行为活动中的一些智能行为,当研究人员在研究蚁群觅食行为时发现,蚂蚁会释放一种特殊的生物信息物质,蚂蚁群体们正是根据这种物质在道路上的强度来决定他们的觅食道路.而这种生物信息物质在自然条件下,会随着时间发生挥发,蚂蚁群体们依靠道路上存在的信息物浓度在小区域范围内进行运动方向的判定并最终找到食物,下面将给出蚁群算法的通用描述:

Step 1:各算子参数的初始化;

Step 2:开始进行第  $t$  次迭代,每次迭代前将当前迭代最大团  $C_{iter}$  初始化.在每次迭代中,有  $n_{Ants}$  只蚂蚁将在无向图上进行选路,每一只蚂蚁  $k$  将会构造一个团  $C$ ;

Step 3:当第  $k$  只蚂蚁进行完搜索后,与本次迭代的最大团  $C_{iter}$  进行比较,当  $n_{Ants}$  只蚂蚁完成搜索后,得到  $C_{iter}$ ;

Step 4:当第  $t$  次迭代完成后,进行全局信息素更新,并将  $C_{iter}$  与  $C_{best}$  进行比较,判断  $t$  是否达到设置的最大迭代次数,或是  $C_{best}$  达到最优解,如果不是则返回 step 2,进行  $t=t+1$  次迭代;

Step 5:最后当达成算法终止条件时结束循环,得到最大团  $C_{best}$ .

其中  $t$  为迭代次数,  $k$  为每次迭代中的蚂蚁序号,  $n_{Ants}$  为一次迭代中的蚂蚁总数,团  $C$  委每只蚂蚁构造的极大团,  $C_{iter}$  为每次迭代中得到的最大团,  $C_{best}$  为当前算法下得到的最大团.

## 2 蚁群算法求解最大团问题算法优化

不断发展和改善的新型蚁群算法,如基于优化排序的蚁群算法<sup>[2]</sup>、最大最小蚂蚁系统<sup>[3]</sup>,带有局部搜索策略的蚁群算法<sup>[4]</sup>等,更好地解决了诸如最大团问题以及其类似相关数学难题.2003年, Serge Fenet 和 Christine Solnon 率先提出了使用蚁群算法解决最大团问题的思想,记为 Ant-Clique 算法<sup>[5]</sup>.

### 2.1 结点度的启发式策略

在经典 Vertex-AC 算法<sup>[6]</sup>中,蚂蚁选路过程中采取的是轮盘赌伪随机选点策略,在这里,我们将提出一种新型的选路策略,我们同时将每个结点的度和该结点被选择过的次数加入影响因子之中,公式如(1)(2)所示:

$$\eta(j) = \frac{d_j}{\sum d_u}, j \in \text{candidates}, u \in \text{candidates} \quad (1)$$

$$p(j) = \begin{cases} \frac{(\tau_j)^\alpha (\eta_j)^\beta}{\sum (\tau_u)^\alpha (\eta_u)^\beta} & j \in \text{candidates}, u \in \text{candidates} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $p(j)$  表示结点  $j$  的概率公式,  $(\tau_j)$  表示结点  $j$  上的信息素浓度,  $\eta(j)$  表示结点  $j$  概率公式受到

度数启发的影响公式,  $d_j$  表示结点  $j$  的度数, candidates 表示所有候选结点集合.

## 2.2 结点历史选择次数的轮盘赌策略

在测试经典的 Vertex-AC 算法中我们发现, 算法得到最优解往往在迭代测试的前 200 次迭代过程中, 于是我们考虑到在更为有效地增加蚂蚁选路的随机性, 于是我们增加了顶点历史选择次数这一参数作为影响因子加入蚂蚁选路的概率之中, 其中蚂蚁对各顶点的选择概率如公式 (3) 所示:

$$p(j) = \frac{\text{Max } n_{ch\_t(i)} - n_{ch\_t(j)}}{\sum [\text{max } n_{ch\_t(u)} - n_{ch\_t(u)}]}, \quad (3)$$

$i, j, u \in \text{candidates}$

其中  $ch\_t(j)$  为结点  $V_j$  的历史选择次数, 为候选集中最大的历史选择次数的结点  $V_i$ , 每个结点的选择次数与每个结点的选择概率成反比.

## 2.3 独立结构的局部信息素更新策略

在蚁群算法搜索的过程中, 循环迭代次数十分庞大, 在每只蚂蚁寻找完极大团后都要进行一次局部信息素更新, 这使得图中各顶点的信息素浓度的变化是波动振荡且不确定的, 因此, 这里提出构造一个独立的局部信息素更新结构 Local\_pheromone.

在蚁群算法的每次迭代过程中, 需要独立在每个顶点上构建一个局部信息素变量 local\_pheromone, 计算每次迭代内  $n_{Ants}$  只蚂蚁构建完极大团对每个顶点上信息素的影响, 然后在算法的蚂蚁选路策略模块计算每个顶点概率时, 顶点信息素含量应加上局部信息素含量 local\_pheromone 的负值, 再计算每个顶点的相应概率, 公式如 (4) 所示:

$$f(c_k) = - \frac{\tau_{\min} \cdot \|c_{\text{best}}\|}{\|c_k\|} \quad (4)$$

其中,  $\tau_{\min}$  为信息素下限,  $C_{\text{best}}$  为算法已获得到的最大团,  $C_k$  为当前蚂蚁构造的极大团,  $\|$  表示团的数量.

## 3 实验测试与结果分析

将新提出的带有优化机制的蚁群算法与经典蚁群优化算法进行比较, 为了使实验对比结果更加的准确有效, 还将与文献 [7-8] 中的近期研究广泛的精确性算法 [7] 和其他智能启发算法 [8] 在部

分 DIMACS 国际基准图例库上进行比较, 从多方面验证本文所提出算法的优越性.

这里将两算法都设置在适当的相同参数条件下进行实验, 其中  $q_0, q$  和信息素上下限  $\tau_{\min}, \tau_{\max}$  等算子取值在参考文献 [9-10] 的基础上进行设置, 具体取值为:

$$n_{Ants} = 30, n_{iter} = 2000, q_0 = 100, q = 20, \\ \alpha = 1, \beta = 1, \rho = 0.05, \tau_{\min} = 0.01, \tau_{\max} = 4.0$$

表 1 给出了本文新提出的蚁群优化算法与经典蚁群优化算法在部分 DIMACS 国际基准图例库上运行 20 次的结果对比, 其中 Max 为该图例下能得到的最优解, Avg 为运行 20 次的平均最优解, AvgIter 为平均迭代次数, AvgTime 为平均迭代时间, BR (best result) 为该图例的现已知最优解; 表 2 给出了新提出蚁群算法与精确性算法——分支限界法 (branch and bound) 以及启发式算法——遗传算法 (genetic algorithm, GA) 的比较, 其中 Max 为该图例能得到的最优解, AvgTime 为平均迭代时间. 详细数据见表 1、表 2.

从表 1 中我们可以看出, 在经过国际基准图例库 DIMACS 的 14 个经典图例的测试中, 本文提出的新型蚁群算法 Vertex-AC 在 12 个图例上获得了最优解 BR, 而经典算法中只有 10 个图例上得到了最优解 BR; 而对于平均求解的质量, 在 10 个图例上新型蚁群算法 Vertex-AC 要优于经典蚁群算法 Vertex-AC, 仅有 2 个图例上经典蚁群算法 Vertex-AC 的平均求解质量优于新型蚁群算法 Vertex-AC, 所以从上表中对于 DIMACS 部分图例的测试中, 新型蚁群算法显著提升了经典蚁群算法 Vertex-AC 的求解质量和效率.

根据文献 [7-8] 所得到的实验数据与本实验数据进行对比, 从表 2 中我们可以看出算法在求解上十分显著的差别, 在顶点数与边数都较大的图例如 C1000.9、hamming10\_4、p\_hat1500\_3 中, 精确性算法所耗费的时间极大以至于不能完成搜索, 但在图例顶点和边数规模较小时, 精确性算法 MMC 所耗费的时间更少且精准, 但是随着图例规模的增加, 算法搜索的局限性随之增加; 在与同为智能启发式算法的遗传算法作比较时发现, 结果的优越性相差无几, 但在时效性上在大多数图例上本篇提出的算法相比遗传算法都有所提高, 所以这也进一步验证了本文提出的算法的优越性.

表1 DIMACS 基准图库运行结果  
Table 1 The results of the DIMACS based graphs

Graph	经典蚁群优化算法				新型蚁群优化算法				BR
	vertex-AC				vertex-AC				
	Max	Avg	AvgIter	AvgTime	Max	Avg	AvgIter	AvgTime	
C125.9	34	34	36.05	0.39	34	34	34.7	0.52	34
C1000.9	65	61.2	2 000.0	135.84	67	64.8	1 932.5	155.5	68
DSJC500.5	13	12.9	406.9	5.78	13	12.8	782.5	11.81	13
DSJC1000.5	15	14.3	1 542.0	68.93	15	14.1	1 832.7	89.73	15
Brock200_2	12	11.2	1 847.2	13.65	12	11.5	832.8	11.97	12
Brock400_2	25	23.6	2 000.0	35.3	29	25.1	1 878.4	33.49	29
gen200_p0.9_44	44	42.6	1016.6	13.85	44	44	501.3	6.83	44
gen400_p0.9_55	53	50.2	2 000.0	196.55	55	52.3	1 788.2	192.45	55
hamming8_4	16	16	50.7	0.37	16	16	49.9	0.37	16
Hamming10_4	39	37.2	2 000.0	188.14	39	38	2 000.0	198.35	40
keller 5	27	26.8	603.5	54.52	27	27	499.2	35.65	27
p_hat300_3	36	35.7	416.7	12.74	36	35.9	279.4	9.44	36
p_hat700_3	62	61.8	618.9	113.44	62	62	353.6	62.48	62
p_hat1500_3	94	93.2	552.3	204.76	94	93.5	409.1	208.32	94

表2 DIMACS 基准图库对比运行结果  
Table 2 The compared results of the DIMACS based graphs

Graph	蚁群优化算法 vertex-AC		分支限界法		遗传算法 GA	
	Max	AvgTime	Max	AvgTime	Max	AvgTime
C125.9	34	0.52	-	-	34	0.68
C1000.9	67	155.5	-	-	67	122.75
DSJC500.5	13	11.81	13	1.62	-	-
DSJC1000.5	15	89.73	15	189.05	-	-
Brock400_2	29	33.49	29	452.15	-	-
Brock400_4	25	39.27	33	39.27	-	-
gen200_p0.9_44	44	6.83	44	1.98	44	12.19
gen200_p0.9_55	53	1.31	55	0.03	53	1.01
hamming8_4	16	0.37	-	-	16	11.79
hamming10_4	39	198.35	-	-	40	226.8
keller 5	27	35.67	-	-	27	199.1
p_hat300_3	36	9.44	36	1.01	-	-
p_hat700_3	62	62.48	62	981.47	-	-
p_hat1500_3	94	208.32	-	>100 000	-	-

## 4 总结

随着蚁群算法的日益发展,其应用的范围也越来越广,尤其是对于组合优化问题如在最大团

问题方面近年来也取得了越来越多的研究成果.本文根据前人获取的研究发展成果,提出了新型的蚁群优化算法,在一定程度上提高了求解的性能,但不可避免的仍存在着某些不足.现今蚁群算

法趋于与其他启发式算法相结合进行研究,随着人工智能研究领域在世界舞台上不断开拓和发展,更多学者们开始关注带有群体智能特征的算法,而作为典型的一项群体智能启发算法,蚁群算法正广泛受到学术界的广泛关注,且因蚁群算法自身强鲁棒性,分布式能力和正反馈机制等优势,日后必将在更多领域上有着重要的成就出现。

#### 参考文献:

- [1] COLORNI A, DORIGO M, MANIEZZO V, et al. Ant system for job-shop scheduling [J]. *Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science*, 1994, 34(1): 39-53.
- [2] MANIEZZO V, COLORNI A. The ant system applied to the quadratic assignment problem [J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 1999, 11(5): 769-778.
- [3] STUTZLE T, HOOS H H. Max-min ant system [J]. *Future Generation Computer Systems*, 2000, 16(8): 889-914.
- [4] 段征宇, 杨东援, 王上. 时间依赖型车辆路径问题的一种改进蚁群算法 [J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(11): 1557-1563.
- [5] FENET S, SOLNON C. Searching for maximum cliques with ant colony optimization [C] // *International Conference on Applications of Evolutionary Computing*. Springer-Verlag, 2003: 236-245.
- [6] SOLNON C, FENET S. A study of ACO capabilities for solving the maximum clique problem [J]. *Journal of Heuristics*, 2006, 12(3): 155-180.
- [7] 周阳. 最大团问题的精确算法研究 [D]. 武汉: 华中科技大学, 2015.
- [8] 胡能发, 唐为萍. 遗传算法求解最大团问题研究 [J]. *湖北大学学报(自科版)*, 2011, 33(2): 256-259.
- [9] 郑伟, 刘静, 曾建潮. 人工蜂群算法及其在组合优化中的应用研究 [J]. *太原科技大学学报*, 2010, 31(6): 467-471.
- [10] 邵娜娜. 蚁群算法求解最大团问题研究与应用 [D]. 天津: 河北工业大学, 2014.