汕头大学 2018 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：814

科目名称：高等代数

适用专业：基础数学、应用数学

考生须知

答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用黑色字迹签字笔作答，答题要写清题号，不必抄原题。

一．(20 分) (1) 求$(x-1)^2$除$x^{2018}+3$的余式.

(2) 判断x^2+x+1能否整除$x^{20}+x^{10}+1$，并说明理由.

(3) 设$f(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$，$g(x)=x^5+x^3+2x^2+2$. 求$f(x)$与$g(x)$的首一最大公因式$d(x)$，并求多项式$u(x),v(x)$，使得

$$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x).$$

二．(20 分) 用rank(A)表示矩阵A的秩，用A^T表示矩阵A的转置矩阵.

(1) 设$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22}\end{pmatrix}$，证明：$\mathrm{rank}(A)\geq \mathrm{rank}(A_{11})+\mathrm{rank}(A_{22})$.

(2) 设A, B分别是$m\times n$和$n\times p$矩阵，证明：

$$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-n\leq \mathrm{rank}(AB)\leq \min(\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)).$$

(3) 设A是$m\times n$实矩阵，b是m维列向量．证明：线性方程组$A^TAx=A^Tb$有解.

三．(20 分)（1）设$H_n=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$，求行列式$\det(H_n)$和逆阵$H_n^{-1}$.

（2）求n阶矩阵$A_n=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$的特征值.

四．(20 分) (1) 设$A\in R^{n\times n}$为实反对称矩阵，即$A^T=-A$．证明A的特征值为 0 或纯虚数.

(2) 设A为n阶方阵，存在正整数$k\geq 2$使得$A^k=0, A^{k-1}\neq 0$. 证明$I-A$可逆，并求出逆阵的表达式.

(3) 设A,B为n阶方阵. 证明：若$A+B=AB$，则$AB=BA$.

五.（20分）设$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$. (1) 求相似变换矩阵$T$，使得$T^{-1}AT$为对角阵.

(2) 求出A^{30}.

六．（15 分）设W_1, W_2是$\mathbb{R}^4$的两个线性子空间，其中W_1是由$\alpha_1=(1,1,1-1)^T, \alpha_2=(1,3,2,4)^T, \alpha_3=(3,5,4,2)^T$张成的子空间，$W_2$是由$\beta_1=(1,2,1,2)^T, \beta_2=(3,5,3,3)^T$张成的子空间. 分别求$W_1+W_2$和$W_1\cap W_2$的一组基.

七.（20分）(1) 设$\mathcal{A},\mathcal{B}$都是线性空间V上的线性变换，定义它们的乘积如下：

$$\mathcal{C}(\alpha)=\mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha)),\quad \alpha\in V.$$

证明：$\mathcal{C}$是线性空间V上的线性变换.

(2) 设在V中取定一组基$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$，$\mathcal{A},\mathcal{B}$在基$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$下的矩阵分别是$A$, B. 证明：$\mathcal{C}$在基$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$下的矩阵为$AB$.

(3) 设有线性空间$M_2(\mathbb{R})$(由2阶矩阵组成的集合)上的线性变换

$$\mathcal{A}(X)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}).$$

求$\mathcal{A}$在基$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$下的矩阵.

八.（15分）(1) 写出实数域上n维线性空间V_n中内积的定义.

(2) 设有$n\times n$实数矩阵$A=(a_{ij})$，$a_{ij}=\dfrac{1}{i+j-1}$. 定义$f(\alpha,\beta)=\alpha^T A\beta$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$，试问$f$是不是$\mathbb{R}^n$上的内积，写出理由.