汕头大学2018年攻读硕士学位研究生入学考试试题

七、(15分) 先求幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+1)^n}{n}$的收敛区间，再求$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n n}$的和。

八、(15分) 求极限$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\tan x - x(1+x)}{x^3}$。

九、(15分) 证明：对$0<a<b$，则存在$\zeta\in(a,b)$，使得

$$\frac{\sin b-\sin a}{\cos\zeta}=\zeta\cdot\ln\frac{b}{a}。$$

十、(5分) 设D为平面上的有界域，$f(x,y)$在D上可微，在$\overline{D}$上连续，在$\overline{D}$的边界上$f(x,y)=0$，且在D上满足

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2=f(x,y)。$$

试证明在$\overline{D}$上 $f(x,y)\equiv 0$。

十一、(5分) 求积分

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{\sec^2 x+x\sin^2 x+x}{1+\tan^2 x}dx+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx。$$

十二、(5分) 已知$f(x)$在$[0,1]$上二次可微，且$f(0)=f(1)$，对任意$x\in[0,1]$有$|f''(x)|\le 1$。证明 $|f'(x)|\le\frac{1}{2}$对任意$x\in[0,1]$成立。

汕头大学 2018 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：612

科目名称：数学分析

适用专业：基础数学、应用数学

考 生 须 知

答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用黑色字迹签字笔作答，答题要写清题号，不必抄原题。

一、（15 分） 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{\sin n}{n}+\frac{1}{1+n}+\frac{1}{2+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right\}。$$

二、（15 分）求极限 $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{a^t+b^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}+2}$ $(a>0,b>0)$。

三、（15 分） 设 $a>0$，$a_1=\sqrt{a}$，$a_{n+1}=\sqrt{a+a_n}$。

（1）证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在；（2）求 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$。

四、（15 分） 设 $f(x,y,z)$ 连续，求

$$\lim_{r\to+0}\frac{\iiint\limits_{\Omega}f\left(x^2+y^2+z^2,1-\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2},\tan(x^2+y^2+z^2)\right)dxdydz}{r^3},$$

其中 $\Omega=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le r^2\right\}$。

五、（15 分） 已知 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\sin\dfrac{1}{x^3}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$。假设 $f(x)$ 在原点处可导，求 λ 的取值范围。

六、(15 分) 证明方程 $2^x x-1=0$ 有且只有一个小于 1 的正根。