汕头大学 2017 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：612

科目名称：数学分析

适用专业：基础数学、应用数学

考 生 须 知

答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用黑色字迹签字笔作答，答题要写清题号，不必抄原题。

本试题中 $\mathbb{R}$ 表示全体实数.

一. 计算下列各题(每小题 8 分, 共 40 分).

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(t^2)dt}{x^3}$;
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$;
3. $\int_0^1 x^2\sin x dx$;
4. $u = xye^{\sin(xyz)}$, 求 u_x, u_z;
5. 求函数 $f(x)=\frac{x^3+x+1}{x^2+1}$ 的渐进线.

二. (10分) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导且导函数有界，证明存在常数 $L>0$ 使得对任意的 $a,b\in\mathbb{R}$, $|f(a)-f(b)|\le L|a-b|$.

三. (10分) 过曲线 $y=x^2-1$ $(x>0)$ 上的点 P 作切线, 与坐标轴交于 M,N. 设 O 点为坐标原点, 求 P 的坐标使得 ΔOMN 的面积最小.

四. (10分) 设 $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ 连续, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续的充分必要条件是存在连续函数 $\bar{f}\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ 使得对任意的 $x\in(a,b)$, $\bar{f}(x)=f(x)$.

五. (12分) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的函数. 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛是指对任意的 $a\in\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{a}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 均收敛.

(1) 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛当且仅当存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得 $\int_{-\infty}^{a}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 均收敛.

(2) 证明若 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx$ 收敛.

(3) 问(2)的逆命题是否成立, 说明理由.

六. (12分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增, 在 0 点右连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A<+\infty$. 对任意的 $x>0$, 令

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

(1) 证明 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续;
(2) 定义 $F(0)$ 使得 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续;
(3) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

汕头大学 2017 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

七. (10分) 计算第一型曲面积分 $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}dS$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

八. (10分) 将函数 $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{4},\ x\in[0,\pi),\\ \frac{\pi}{4},\ x\in[-\pi,0),\end{cases}$ 以 2π 为周期展开成傅里叶(Fourier)级数, 并讨论其收敛性.

九. (10分) 试证明二次型

$$f(x,y)=Ax^2+By^2+2Cxy$$

在单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上的最大值和最小值恰好为矩阵

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}$$

的两个特征值.

十. (10分) (1) 若 L 是从点 (x_1,y_1) 到点 (x_2,y_2)的有向线段, 证明

$$\int_L xdy-ydx=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

(2) 若一平面多边形的顶点按边界的正向依次为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$, 证明该多边形的面积 A 为:

$$A=\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}\right).$$

十一. (8分) 设 $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ 表示全体正整数集. 对于 $\mathbb{N}$ 中有限子集 S, 令 $\#(S)$ 表示 S 中所含元素个数. 设 $A,B\subset\mathbb{N}$ (未必有限). 证明:

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\#(A\cap\{1,2,\dots,n\})}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\#(B\cap\{1,2,\dots,n\})}{n}=0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#((A\cup B)\cap\{1,2,\dots,n\})}{n}=0.$$

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\#(A\cap\{1,2,\dots,n\})}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\#(B\cap\{1,2,\dots,n\})}{n}=1$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#((A\cap B)\cap\{1,2,\dots,n\})}{n}=1.$$

十二. (8分) 设 $a_n=\int_{n\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛.