

宁波大学 2017 年硕士研究生招生考试初试试题 (A 卷)

(答案必须写在考点提供的答题纸上)

科目代码: 671

科目名称:

数学分析

适用专业:

基础数学 应用数学

一、单项选择题: 本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。

1. 关于数列极限下列叙述正确的是 ()

- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的充要条件是在 a 的任意小邻域内有 $\{a_n\}$ 中的无限多个点;
B. 若数列 $\{a_n\}$ 存在极限, 则数列 $\{a_n\}$ 一定为一有界数列;
C. 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - a_n) = 0$, 则数列 $\{b_n\}$ 一定收敛;
D. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$, 则数列 $\{a_n\}$ 一定收敛.

2. 下列叙述正确的是 ()

- A. 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $f(x)$ 在 I 上一定有界;
B. 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定有界;
C. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 令 $F(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$, 则有 $F'(x) = f(x)$;
D. 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则一定存在 x_0 的某邻域, 使得 $f(x)$ 在该邻域内连续.

3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则下列必收敛的级数为 ()

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} u_n$; B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$; C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} u_n$; D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$.

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{n+1}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$, 下列叙述正确的是 ()

- A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点;
B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点;
C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导;
D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

5. 下列函数在 $(0,0)$ 处存在重极限的是 ()

- A. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$; B. $f(x, y) = \frac{(x-y^2)^2}{x^2 + y^4}$;
C. $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$; D. $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^3}$.

宁波大学 2017 年硕士研究生招生考试初试试题 (A 卷)

(答案必须写在考点提供的答题纸上)

科目代码: 671

科目名称: _____

数学分析

适用专业: _____

基础数学 应用数学

二、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$ 的收敛域为 _____;

2. $\int_{-1}^1 \frac{1+x^2 \sin x}{1+\cos x} dx =$ _____;

3. $(e^x \sin x)^{(n)} =$ _____;

三、计算题与证明题: 本大题共 5 小题, 每小题 10 分, 共 50 分。

1. 求极限 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(\cos t) dt}{x^2 \tan^2 x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}$

2. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

(1) 判断 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处是否连续? 并给出证明;

(2) 判断 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的偏导数是否存在? 若存在, 求 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处关于 x 的偏导数;

(3) 判断该函数在 $(0, 0)$ 处的可微性.

3. 求 $z = \frac{1}{2}(x^4 + y^4)$ 在条件 $x + y = a$ 下的最小值, 其中 $x \geq 0, y \geq 0, a$ 为常数.

并证明不等式 $\frac{x^4 + y^4}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^4$.

4. 求第二类曲线积分

$\int_L [e^x \sin y - b(x+y)] dx + (e^x \cos y - ax) dy$, 其中 a, b 是正常数

L 为从点 $A(2a, 0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点 $O(0, 0)$ 的一曲线段

5. 求曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x-y+z) dydz + (y-z+x) dzdx + (z-x-y) dxdy$.

其中 Σ 为闭曲面 $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x-y| = 1$, 方向取外侧.

宁波大学 2017 年硕士研究生招生考试初试试题 (A 卷)

(答案必须写在考点提供的答题纸上)

科目代码: 671

科目名称:

数学分析

适用专业:

基础数学 应用数学

四、证明题: 本大题共 5 小题, 共 65 分。

1(10分). 设 $u_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4}}, n=1, 2, \dots$

(1) 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上一致收敛;

(2) 讨论其和函数的连续性、可积性与可微性。

2(15分). (1) 叙述函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的定义。

(2) 证明 $f(x) = \sin x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续, 但在 $[0, A]$ 上一致连续 (A 为一有限常数)。

3(15分). 已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $x_0=0, f(0)=1, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n=1, 2, \dots$).

证明: (1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$.

4(10分). 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(0)=1, f'(1)=0, f(2)=\frac{5}{3}$

证明存在 $\xi \in (0, 2)$ 使 $f'''(\xi)=2$.

5(15分). (1) 叙述实数系基本定理中的确界存在定理与闭区间套定理;

(2) 试用闭区间套定理证明确界存在定理。