§ 5.3 二次型与对称矩阵的有定性

根据二次型的标准形和规范形, 将二次型进行分类在理论上具有重要意义, 在工程技术和最优化等问题中有着广泛应用. 其中, 最常用的是二次型标准形系数全为正或全为负的情形.

定义5.4(二次型的有定性)

具有对称矩阵A的二次型

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

如果对于任何$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$, 都有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0\ (\text{或}<0)$$

成立, 则称$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$为正定(负定)二次型, 矩阵$\boldsymbol{A}$称为正定矩阵(负定矩阵).

如果对于任何$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 都有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq 0\ (\text{或}\leq 0)$$

且有$\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$, 使$\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$, 则称二次型$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$为半正定(半负定)二次型, 矩阵$\boldsymbol{A}$称为半正定(半负定)矩阵.

例1 二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

是正定二次型, 矩阵$\boldsymbol{I}_n$是正定矩阵.

这是因为, 当$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}\neq\mathbf{0}$时, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)>0$.

例2 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=-x_1^2-2x_1x_2+4x_1x_3-x_2^2+4x_2x_3-4x_3^2$$

是半负定二次型.

这是因为$f(x_1, x_2, x_3)=-(x_1+x_2-2x_3)^2\leq 0$, 且$f(1, 1, 1)=0$.

矩阵$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$是半负定矩阵.

例3 $f(x_1, x_2)=x_1^2-2x_2^2$是不定二次型, 因为其符号有时正有时负, 例如$f(1, 1)=-1<0$, $f(2, 1)=2>0$.

定理5.6

设$\boldsymbol{A}$为正定矩阵, 如果$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{B}$也是正定矩阵.

证: 由$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$可知, 存在非奇异矩阵$\boldsymbol{C}$, 使$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

令$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, $|\boldsymbol{C}|\neq 0$, 对任意$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$均有$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. 因此,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}&=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0\ (\text{因}\boldsymbol{A}\text{为正定矩阵})\end{aligned}$$

即$\boldsymbol{B}$是正定矩阵.

定理5.6

设$\boldsymbol{A}$为正定矩阵, 如果$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{B}$也是正定矩阵.

定理5.7(对角矩阵正定性判别法)

对角矩阵

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

为正定矩阵的充分必要条件是: $d_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$.

定理5.8(正定性判别法)

矩阵$\boldsymbol{A}$为正定矩阵的充分必要条件是存在非奇异矩阵$\boldsymbol{C}$, 使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$, 即$\boldsymbol{A}$合同于单位矩阵.

推论1(用惯性指标判别正定性)

矩阵$\boldsymbol{A}$为正定矩阵的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$的正惯性指标$p=n$.

推论2

如果$\boldsymbol{A}$为正定矩阵, 则$|\boldsymbol{A}|>0$.

分析

当$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$时, 则有

$$\boldsymbol{A}\simeq\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_p & 0 & 0\\ 0 & -\boldsymbol{I}_{r-p} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由定理5.6及定理5.7可知, 若$\boldsymbol{A}$为正定矩阵, 则正惯性指标$p=n$, 即$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{I}_n$.

反之, 若$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{I}_n$, 则$\boldsymbol{A}$正定, 即存在非奇异矩阵$\boldsymbol{C}$, 使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$.

此时$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{C}|^2>0$.

定理5.8(正定性判别法)

矩阵$\boldsymbol{A}$为正定矩阵的充分必要条件是存在非奇异矩阵$\boldsymbol{C}$, 使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$, 即$\boldsymbol{A}$合同于单位矩阵.

推论1(用惯性指标判别正定性)

矩阵$\boldsymbol{A}$为正定矩阵的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$的正惯性指标$p=n$.

推论2

如果$\boldsymbol{A}$为正定矩阵, 则$|\boldsymbol{A}|>0$.

说明

注意: 反之, 结论未必成立, 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, |\boldsymbol{A}|=1>0$$

但$\boldsymbol{A}$不是正定矩阵.

定理5.8(正定性判别法)

矩阵$\boldsymbol{A}$为正定矩阵的充分必要条件是存在非奇异矩阵$\boldsymbol{C}$,使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$, 即$\boldsymbol{A}$合同于单位矩阵.

推论1(用惯性指标判别正定性)

矩阵$\boldsymbol{A}$为正定矩阵的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$的正惯性指标$p=n$.

推论2

如果$\boldsymbol{A}$为正定矩阵, 则$|\boldsymbol{A}|>0$.

定理5.9

对称矩阵$\boldsymbol{A}$为正定矩阵的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$的所有特征值都是正数.

定义5.5(顺序主子式)

设n阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

行列式

$$|A_k|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}(k=1, 2, \cdots, n)$$

称为A的k阶顺序主子式.

举例

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$的顺序主子式为

$|A_1|=1$, $|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4$

$|A_3|=|A|=-8$

定理5.10(正定性的判别法)

矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为正定矩阵的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$的所有的顺序主子式都大于零, 即$|\boldsymbol{A}_k|>0$ ($k=1, 2, \cdots, n$).

矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为负定矩阵的充分必要条件是:

$$(-1)^k|\boldsymbol{A}_k|>0 \ (k=1, 2, \cdots, n)$$

半正定(半负定)的判别法

(1)对称矩阵$\boldsymbol{A}$是半正定(半负定)矩阵的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$的所有主子式大于(小于)或等于零.

(2)对称矩阵$\boldsymbol{A}$是半正定(半负定)矩阵的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$的全部特征值大于(小于)或等于零.

应注意的问题

一个实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的顺序主子式全大于零或等于零时, $\boldsymbol{A}$未必是半正定的.

例 4 判断 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$ 是否为正定二次型.

解: 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

A 的各顺序主子式

$$|A_1| = 3 > 0,\ |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0,\ |A_3| = |A| = 3 > 0$$

因此, $f(x_1, x_2, x_3)$ 为正定.

例 5　当λ取何值时，二次型$f(x_1, x_2, x_3)$为正定，其中

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+\lambda x_3^2$$

解：二次型$f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & \lambda\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$的各顺序主子式

$$|\boldsymbol{A}_1|=1>0,\quad |\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1>0,\ |\boldsymbol{A}_3|=|\boldsymbol{A}|=\lambda-5>0$$

故$\lambda>5$时，$\boldsymbol{A}$的各顺序主子式都大于零，二次型$f(x_1, x_2, x_3)$为正定二次型.

例6 证明: 如果$\boldsymbol{A}$为正定矩阵, 则$\boldsymbol{A}^{-1}$也是正定矩阵.

证: 若$\boldsymbol{A}$为正定矩阵, 则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$. 所以

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$$

即$\boldsymbol{A}^{-1}$也是对称矩阵.

根据定理5.9, $\boldsymbol{A}$的所有特征值$\lambda_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$.

A^{-1}的所有特征值为$\dfrac{1}{\lambda_i}>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. 所以A^{-1}仍是正定矩阵.