§4.2 相似矩阵与矩阵对角化

(一)相似矩阵及其性质

(二) n阶矩阵与对角矩阵相似的条件

※(三)关于约当形矩阵的概念

(一)相似矩阵及其性质

定义4.3(相似矩阵)

设A, B为n阶矩阵, 如果有n阶非奇异矩阵P存在, 使得

$$P^{-1}AP=B$$

成立, 则称矩阵A与B相似, 记为$A\sim B$.

例如, $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}$, 因为

$$P^{-1}=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=B$$

所以, $A\sim B$, 即$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

(一)相似矩阵及其性质

定义4.3(相似矩阵)

设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$为n阶矩阵, 如果有n阶非奇异矩阵$\boldsymbol{P}$存在, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

成立, 则称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似, 记为$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

定理4.5(相似矩阵的特征值)

如果n阶矩阵$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$相似, 则它们有相同的特征值.

证: 因$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 所以存在$n$阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 有$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|$$

$$=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}|\cdot|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{P}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$$

得$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$有相同的特征多项式, 所以它们有相同的特征值.

(一)相似矩阵及其性质

定义4.3(相似矩阵)

设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$为n阶矩阵, 如果有n阶非奇异矩阵$\boldsymbol{P}$存在, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

成立, 则称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似, 记为$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

定理4.5(相似矩阵的特征值)

如果n阶矩阵$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$相似, 则它们有相同的特征值.

相似矩阵的性质

(1)相似矩阵有相同的秩.

(2)相似矩阵的行列式相等.

这是因为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}\Rightarrow|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{B}|\Rightarrow|\boldsymbol{P}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{B}|\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$$

(一)相似矩阵及其性质

定义4.3(相似矩阵)

设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$为n阶矩阵, 如果有n阶非奇异矩阵$\boldsymbol{P}$存在, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

成立, 则称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似, 记为$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

定理4.5(相似矩阵的特征值)

如果n阶矩阵$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$相似, 则它们有相同的特征值.

相似矩阵的性质

(1)相似矩阵有相同的秩.

(2)相似矩阵的行列式相等.

(3)相似矩阵或都可逆或都不可逆. 当它们可逆时, 它们的逆矩阵也相似.

(二) n阶矩阵与对角矩阵相似的条件

定理4.6(矩阵可对角化的条件)

n阶矩阵$\boldsymbol{A}$与n阶对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$相似的充分必要条件为矩阵$\boldsymbol{A}$有$n$个线性无关的特征向量.

推论

若n阶矩阵$\boldsymbol{A}$有n个相异的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则$\boldsymbol{A}$与对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$相似.

说明

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(二) n阶矩阵与对角矩阵相似的条件

定理4.6(矩阵可对角化的条件)

n阶矩阵$\boldsymbol{A}$与n阶对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$相似的充分必要条件为矩阵$\boldsymbol{A}$有$n$个线性无关的特征向量.

推论

若n阶矩阵$\boldsymbol{A}$有n个相异的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则$\boldsymbol{A}$与对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$相似.

说明

$\boldsymbol{A}$有n个相异特征值只是$\boldsymbol{A}$可化为对角矩阵的充分条件, 而不是必要条件.

(二) n阶矩阵与对角矩阵相似的条件

定理4.6(矩阵可对角化的条件)

n阶矩阵$\boldsymbol{A}$与n阶对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$相似的充分必要条件为矩阵$\boldsymbol{A}$有$n$个线性无关的特征向量.

推论

若n阶矩阵$\boldsymbol{A}$有n个相异的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则$\boldsymbol{A}$与对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$相似.

定理4.7

n阶矩阵$\boldsymbol{A}$与对角矩阵相似的充分必要条件是对每一个n_i重特征值λ_i, 矩阵$\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$的秩是$n-n_i$.

例1 试判断A是否可与对角矩阵相似, 并求A^5, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

解: 矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I - A| = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

A的特征值为$\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$.

当$\lambda_1=1$时, 解齐次线性方程组$(I-A)x=0$,

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

例1 试判断$\boldsymbol{A}$是否可与对角矩阵相似, 并求$\boldsymbol{A}^5$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

解: 矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$.

当$\lambda_1=1$时, 解齐次线性方程组$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例1 试判断$\boldsymbol{A}$是否可与对角矩阵相似, 并求$\boldsymbol{A}^5$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

解: 矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$.

当$\lambda_1=1$时, 解齐次线性方程组$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$$

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时, 解齐次线性方程组$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 1, 0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

因为矩阵$\boldsymbol{A}$有三个线性无关的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, 所以$\boldsymbol{A}$可与对角矩阵相似.

解：矩阵A的特征值为$\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$.

特征值$\lambda_1=1$对应的特征向量为$\alpha_1=(1, 2, 2)^T$, $\lambda_2=\lambda_3=2$对应的特征向量为$\alpha_2=(1, 1, 0)^T$, $\alpha_3=(-1, 0, 1)^T$. 令

$$P=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

则$P^{-1}AP=\Lambda$, 于是$A=P\Lambda P^{-1}$, 从而有

$$\begin{aligned} A^5 &= (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1}) \\ &= P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)\Lambda P^{-1} \\ &= P\Lambda^5 P^{-1} \end{aligned}$$

解: 矩阵A的特征值为$\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$.

特征值$\lambda_1=1$对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 2)^T$, $\lambda_2=\lambda_3=2$对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1, 0, 1)^T$. 令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$$

则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$, 于是$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而有

$$\boldsymbol{A}^5=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})\cdots(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^5\boldsymbol{P}^{-1}$$

求得 $$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

于是 $$\boldsymbol{A}^5=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^5 & & \\ & 2^5 & \\ & & 2^5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 31 & -31\\ -62 & 94 & -62\\ -62 & 62 & -30\end{pmatrix}$$

※(三)关于约当形矩阵的概念

定义4.4(约当形矩阵)

在n阶矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$中, 如果

$a_{ii}=\lambda\ (i=1, 2, \cdots, n)$

$a_{i\,i+1}=1\ (i=1, 2, \cdots, n-1)$

$a_{ij}=0\ (j\neq i, j\neq i+1)$

即
$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

则称$\boldsymbol{J}$为约当块.

约当块举例:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

※(三)关于约当形矩阵的概念

定义4.4(约当形矩阵)

在n阶矩阵$A=(a_{ij})$中, 如果

$a_{ii}=\lambda$ ($i=1, 2, \cdots, n$)

$a_{i\,i+1}=1$ ($i=1, 2, \cdots, n-1$)

$a_{ij}=0$ ($j\neq i, j\neq i+1$)

即
$$J=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

则称J为约当块.

如果一个分块对角矩阵的所有子块都是约当块, 即

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

中J_l($l=1, 2, \cdots, s$)都是约当块, 则称J为约当形矩阵, 或称约当标准形.

※(三)关于约当形矩阵的概念

约当形矩阵举例:

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc:c:ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

如果一个分块对角矩阵的所有子块都是约当块, 即

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s \end{pmatrix}$$

中 $\boldsymbol{J}_l\,(l=1, 2, \cdots, s)$都是约当块, 则称 $\boldsymbol{J}$ 为约当形矩阵, 或称约当标准形.

定理4.8

任意一个n阶矩阵$\boldsymbol{A}$, 都存在n阶可逆矩阵$\boldsymbol{T}$, 使得$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{J}$, 即任意一个$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$都与$n$阶约当矩阵$\boldsymbol{J}$相似.

例如, 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

有两个特征值$\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$, 并仅有两个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$$

所以它不与对角矩阵相似, 但它与约当形矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

相似. 这时

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$