离散 数学

计算机学院

冯伟森

Email：fws365@scu.edu.cn

2013年5月13日星期一

主要内容

1. 集合的基数

2. 有限集、无限集

3. 可数集和不可数集

§6.4 集合的基数、可数集和不可数集

先看几个问题：

① 有限集同无限集的区别是什么？两个无限集之间可不可以比较大小？

② 自然数集中元素的个数同有理数集中元素的个数那一个多？

③ 有理数集中元素的个数同无理数集中元素的个数那一个多？

④ 无理数集中元素的个数同实数集中元素的个数那一个多？

⑤ 有没有最大的集合，它包含了所有的集合？

集合的基数

集合的基数就是集合中元素的个数,是集合容量的度量。一般是在两个集合的元素间建立一一对应关系,其中一个作为尺度。比如我们在计算一群人和一堆物品时，就是将人和物品同数字1、2、3等一一对应起来，其本质就是在两个集合的元素之间建立了一一对应关系（即双射）。

定义6.7　设X，Y是两个集合，若在X，Y之间存在1-1对应的关系（在集合X和Y之间建立双射），则称集合X与Y是对等的或等势的，记为：

$$X \sim Y$$

集合X的基数一般记为card(X),如果A是有限集合,A的基数通常记为|A|（它是A中元素的个数）。

一般地：

若X＝Y，则 X~Y。反之不然。

定理6.4

等势是集合族上的等价关系。

即对任意的集合A、B、C，

① A~A

② A~B ⇒ B~A

③ A~B、 B~C ⇒ A~C

而等价关系决定等价类，因此，所有等势的集合构成一个等价类。

记 $N_m=\{x|x$是正整数，且$x\leqslant m\}$

问题：对同一个集合X，是否会出现$X\sim N_m$，同时又出现$X\sim N_n$， 而$m\neq n$?

定理6.5

如果正整数$m<n$，则不存在从N_n到N_m的单射。

定义6.8 设X，Y是两个集合，若存在从X到Y的单射，则card(X) ≤card(Y)；如果不存在从X到Y的双射，则card(X) <card(Y)。

下面，我们对集合按照基数进行分类。

自然数集合N的定义

二十世纪初，集合成为数学的基本概念之后，由冯•诺依曼（Von Neumann，J.）用集合的方式来定义自然数取得了成功。

1. $\Phi \in N$，
2. 若$n \in N$，则$n' := n \cup \{n\} \in N$。

也即：

- $0 := \Phi$，
- $1 := \Phi \cup \{\Phi\} = \{\Phi\} = \{0\}$，
- $2 := \{\Phi\} \cup \{\{\Phi\}\} = \{\Phi, \{\Phi\}\} = \{0, 1\}$
- ....
- $n := \{0, 1, 2, 3, \ldots n-1\}$
- ....

$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

定义6.9

如果X是空集,或者∃自然数m，∍ $X \sim N_m$,则称X为有限集,否则称X为无限集。

定理6.6

自然数集N是无限集。

定理6.7

非空集合X是无限集当且仅当存在从N到X的单射。

将自然数集N的基数记为 $\aleph_0$ （读为“阿列夫0”）。

可数集

定义6.10　凡是与自然数集合等势的集合，统称为可数集合或可列集合。

例6.8　下列集合都是可数集合：

1) $O^{+}=\{x \mid x \in N, x\text{是奇数}\}$

2) $E^{+}=\{x \mid x \in N-\{0\}, x\text{是偶数}\}$

3) $P=\{x \mid x \in N, x\text{是素数}\}$

4) 整数集合Z

解：（1）

在0^+与N之间建立1-1对应的关系 f：$N \to 0^+$ 如下：

f：$N \to 0^+$ f（n）=2n+1

N	0	1	2	3	4	...	n	...
f	↓	↓	↓	↓	↓	...	↓	...
0^+	1	3	5	7	9	...	2n+1	...

所以，0^+也是可数集合。

（2）

在N与E^+之间建立1-1对应的关系f：N→E^+ 如下：

f：N→E^+ f（n)=2n+2

N	0	1	2	3	4	...	n	...
f	↓	↓	↓	↓	↓	...	↓	...
E^+	2	4	6	8	10	...	2n+2	...

所以，E^+也是可数集合。

（3）

在P与N之间建立1-1对应的关系f：N→P如下：

$$\left.\begin{array}{lllllll} N & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ f & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\ P & 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & \ldots \end{array}\right\} \text{枚举法}$$

所以，P也是可数集合。

（4）

在N与Z之间建立1-1对应的关系f：N→Z如下：

f：N→Z

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{(n+1)}{2} & n\text{为奇数}\\[2ex] -\dfrac{n}{2} & n\text{为偶数}\end{cases}$$

N	0	1	2	3	4	...	2n-1	2n	...
f	↓	↓	↓	↓	↓	...	↓	↓	...
Z	0	1	-1	2	-2	...	n	-n	...

所以，Z也是可数集合。

可数集的性质

定理6.8　每个无限集必含有子集是可数集。

定理6.9　可数个可数集的并集为可数集。

推论6.9.1:

　N×N是可数集。

证明:

令　$A_i=\{(i,0),(i,1),(i,2),\cdots\}$，$i\geqslant 0$

　显然，$A_i\ (i\geqslant 0)$ 是可数集

　$N\times N=A_0\cup A_1\cup A_2\cup A_3\cdots\cdots$

　　由定理6.9知，N×N是可数集。

定理6.10　有理数是可数集。

证明：

由推论6.9.1知：$N \times N$是可数集。

构造　$S=\{(m,n) \in N \times N \mid m$和$n$互素且$mn \neq 0\}$

显然，S是可数集。

令 $g:S \to Q^+$, ∋　$g((m,n))=m/n$，则g是双射，

所以，正有理数集是可数集。

同理，可证负有理数集也是可数集。

再由定理6.9知，$Q=Q^+ \cup \{0\} \cup Q^-$是可数集。

不可数集

定理6.11

实数集合R是不可数集合。

证明：1)首先证明（0，1）是不可数集。

约定（0，1）中的任何数都可用无限位小数表示。例如0.32用无限位小数表示时应为0.31999…。假设（0，1）是可数集，那么，可在（0，1）和N之间建立双射，即（0，1）中的元素可依序 a_0，a_1，a_2，a_3，… 为 。

设这些元素的无限位为

$$a_0 = 0.a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}\cdots$$
$$a_1 = 0.a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$
$$a_2 = 0.a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$
$$\vdots$$

现在构造实数，$r = 0.b_1b_2b_3\cdots$ 其中

$$b_i = \begin{cases} 1, & a_{ii} \neq 1 \\ 0, & a_{ii} = 1 \end{cases} \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

可 a_0，a_1，a_2，a_3，$\cdots$ 不同。
但是，r∈（0，1），这与（0，1）是可数集相

矛盾，所以（0，1）不是可数集。

2）要证明实数集合R是不可数集合，只需证明R与（0，1）等势就行了。

建立映射f：R→（0，1）

$f(y)=(\arctan y)/\pi+1/2 \quad \forall y\in R$

（∵当$x\in(-\pi/2,\pi/2)$，$y=\tan x\in R$

∴$x=\arctan y\in(-\pi/2,\pi/2)$，

那么 $x/\pi+1/2\in(0,1)$，

即 $f(y)=(\arctan y)/\pi+1/2\in(0,1)$）

显然，函数f是一个双射，所以R~（0，1）

本定理中使用的证明方法，是一种著名的对角化方法。

① 开区间(0, 1)称为不可数集合，其基数设为

$\aleph$ (读作阿列夫)；

② 凡是与区间(0, 1)等势的集合都是不可数集合。

Cantor定理

设M是任意集合，S是M的幂集，那么，

card(M)<card(S) ($|M|<|\rho(M)|$)

证明：1）当$M=\Phi$时，$S=\{\Phi\}$，则card(M)=0，

card(S)=1，结论成立。

2）当$M\neq\Phi$时，构造$f:M\to S$，对$\forall a\in M$有

$f(a)=\{a\}$，

则$f(M)\subseteq S$，∴ card(M)≤card(S)

下面证明等号不成立（反证法）

设 ∃φ:M→S（φ是双射），

构造 B={x∈M|x ... φ(x)} 则

∵φ是双射，∴∃c∈M

①如果c∈B，由B的定

②如果c∉B，由B的定

∴ φ不可能是双射

故 card(M)＜card(S)

对∀a∈M，如果a∈φ(x)时称a为关于φ的内部元素，否则称为外部元素

此定理表明：

没有最大基数的集合，也就没有最大的集合，因此就不存在无所不包的集合。

$$|A| \le \aleph_0 \le \aleph$$

习题六

- 18、20、21、22