离散 数学

计算机学院

冯伟森

Email：fws365@scu.edu.cn

2013年5月13日星期一

主要内容

- 1、函数的基本概念
- 2、单射 、满射、双射和逆函数
- 3、置换和循环

第六章　函数

- 　　函数是一种特殊的二元关系,我们可以把函数看作输入输出关系:它把一个集合(输入集合)的元素变成另一个集合(输出集合)的元素。在高等数学中，函数的概念是从变量的角度提出来，而且是在实数集合上讨论，这种函数一般是连续或间断连续的函数。这里，将连续变量的概念推广到对离散量的讨论。前面所讨论的有关集合或关系的运算和性质，对于函数完全适用。

任何程序在计算机中的实现,都包含种种这样或那样的变换。如编译程序把一个源程序变换成机器语言的指令集合—目标程序。或者说,计算机中的程序可以把一定范围内的任一组数据变换成另一组数据。

函数是许多数学工具的基础,计算机科学中大量用到函数,如数据结构,程序语言的设计与实现,开关理论,自动机理论,代数结构,可计算性理论,计算复杂化,程序正确性证明等。

§6.1 一般集合的函数概念

定义6.1 设f是集合A到B的关系，如果对每个x∈A，都存在惟一的y∈B，使得<x,y>∈f，则称关系f为A到B的函数（或映射、变换），记为f：A→B。当<x,y>∈f时，通常记为y=f(x)，这时称x为函数的自变量，称y为x在f下的函数值（或映像）。

由函数的定义显然有：

1） domf=A，称为函数f的定义域；

2） ranf=B，称为函数f的值域，并称f(A)为A在f下的像；

3） $\langle x,y\rangle \in f \wedge \langle x,z\rangle \in f \Rightarrow y=z$；

4） $|f|=|A|$。

大家注意，f(x)仅表示一个变值，但f则代表一个集合，因此f≠f(x)。

函数与关系的差别

鎴鎴如果记

$$f=\{(x,y)\mid x\in X, y\in Y, f(x)=y\}$$

由此可以知道，函数确是一种特殊的关系，它与一般关系比较具备如下差别：

1） A×B的任何一个子集，都是A到B的二元关系，因此，从A到B的不同的关系有$2^{|A|\times|B|}$个；但从A到B的不同的函数却仅有$|B|^{|A|}$个。
2） 每一个函数的基数都为|A|个，但关系的基数却可以从零一直到|A|×|B|。
3） 每一个函数中序偶的第一个元素一定是互不相同的。

例6.1

设$A=\{a,b\}$，$B=\{1,2\}$，$A\times B=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$，

此时从A到B的不同的关系有$2^4=16$个。分别如下：

$R_0=\Phi$；鍶$R_1=\{\langle a,1\rangle\}$；鍶$R_2=\{\langle a,2\rangle\}$；鍶$R_3=\{\langle b,1\rangle\}$；

$R_4=\{\langle b,2\rangle\}$；$R_5=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle\}$；鍶$R_6=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$；鍶

$R_7=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle\}$；$R_8=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle\}$；鍶

$R_9=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle\}$；$R_{10}=\{\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$；鍶

$R_{11}=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle\}$；$R_{12}=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle\}$；鍶

$R_{13}=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$；$R_{14}=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$；

$R_{15}=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$。

从A到B的不同的函数仅有$2^2=4$个。分别如下：

鍶$f_1=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle\}$；鍶$f_2=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$；

鍶$f_3=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle\}$；鍶$f_4=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle\}$。

常将从A到B的一切函数构成的集合记为B^A：$B^A=\{f\mid f:A\to B\}$

函数相等

定义6.2　设f和g：X→Y是两个函数，如果对 $\forall x \in X$，都有 $f(x)=g(x)$，则称f与g相等，记为 $f=g$。

§6.2　单射 、满射和双射

定义6.3　设f是从X到Y的函数，若f满足：

1）对任意$x_1, x_2 \in X$，若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称f为从X到Y的单射或1-1映射；

2）若ranf＝Y，则称f为从X到Y的满射或从X到Y上的映射；

3）若f既是从X到Y的满射，又是从X到Y的单射，则称f为从X到Y的双射或一一对应的映射。

4) 若X＝Y，则称f为X上的函数；当X上的函数f是双射时，称f为X上的变换。

5) 若X＝Y，且对任意x∈X, f(x)＝x, 则称f为X上的单位（恒等）函数，记为I_X。

6) 若存在b∈Y，且对任意x∈X, f(x)＝b, 则称f为X上的常值函数。

函数的复合运算

定义6.4　设f：X→Y，g：Y→Z是两个函数，称

$g \circ f=\{\langle x, z\rangle \mid (\exists y \in Y)[y=f($

注意和复合关系记法上的区别

称为函数f与g的复合函数，记为

$$g \circ f : X \rightarrow Z。$$

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))$$

函数复合的性质

1)函数复合是可结合的(∵关系的复合是可结合的)

2)函数复合一般是不可交换的,

置 换

定义6.5 设A是有限集合，A={$a_1, a_2, \ldots, a_n$}。A上的双射函数称为A上的n阶置换或排列，记为π：A→A，n称为置换的阶。常表示为：

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \pi(a_1) & \pi(a_2) & \cdots & \pi(a_n) \end{pmatrix}$$

∵A上的每一个置换结果都得到A中元素的一种排列。

∴A上的n阶置换的数目为n!。

把每个元素映射到自身的置换称为单位(恒等)置换。

例6.2

- 集合A={1,2,3}上的置换共有6个:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

第一个为单位置换。

循 环

假设π：A→A为n阶置换，$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$。对$a_i \in A$，考虑序列

$$a_i,\ \pi(a_i),\ \pi^2(a_i), \ldots$$

由于$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$是有限集，序列中一定会有重复出现的项。存在最小正整数t，使得

$$\pi^k(a_i) = \pi^t(a_i)$$

其中$0 \leq k < t \leq n$。用$\pi^0(a_i)$记a_i，

令$r_i = t-k$，则$\pi^{r_i}(a_i) = a_i$（$1 \leq r_i \leq n$）。

上述序列呈周期性变化：

$a_i, \pi(a_i), \pi^2(a_i), \ldots, \pi^{r_i-1}(a_i), a_i, \pi(a_i), \pi^2(a_i), \ldots, \pi^{r_i-1}(a_i), a_i, \pi(a_i), \pi^2(a_i), \ldots \pi^{r_i-1}(a_i)$

其中a_i，$\pi(a_i)$，$\pi^2(a_i), \ldots$，$\pi^{r_i-1}(a_i)$互不相同，写成$(a_i, \pi(a_i), \pi^2(a_i), \ldots)$，称之为阶$r_i$的一个循环。

当$r_i<n$时，至少有一个$a_j\in A$不包含在上述循环中。对a_j重复与a_i相同的过程得到$(a_j,\ \pi(a_j),\ \pi^2(a_j),\ldots,\ \pi^{r_j-1}(a_j))$。

如a_i的循环与a_j的循环中没有相同的元素时，称它们不相交。

继续这个过程，$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$可以被分成若干子集，这些子集组成不同循环。一般是如下形式

$$(a_i,\ \pi(a_i),\ldots,\ \pi^{r_i-1}(a_i)),(a_j,\ \pi(a_j),\ldots,\ \pi^{r_j-1}(a_j)),\ \ldots,(a_m,\ \pi(a_m),\ldots,\ \pi^{r_m-1}(a_m))。$$

这样置换就可以表示成循环的积。

如 $\pi(a_i)=a_i$，$(a_i,\ \pi(a_i))$可以省略不写；

单位置换可表示成一个元素1构成的循环（1）。

循环的积

- 一个置换可能由一个单一的循环表示出来，也可能由多个循环连接在一起表示，称之为循环的积（置换的复合）。
- 当两个循环没有公共元素时，它们的积仍是原来的两个循环；当两个循环有公共元素时，它们的积按照复合的意义变成了新的循环的积。
- 例如 $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 6\ 5\ 2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2\,4\,3), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (3\,4\,1), (1\,2\,4\,3)(3\,4\,1) = (2\ 4)$$

例6.3

- 设

$$\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&6&5&4&2\end{pmatrix},\ \pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&3&5&6&4\end{pmatrix}$$

$$\pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix},\ \pi_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&6&4&2&5\end{pmatrix}$$

则：

$$\pi_1\circ\pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&6&4&2&5\end{pmatrix},$$

$$\pi_2\circ\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&6&5&1\end{pmatrix}$$

循环的积

$$\pi_1 = (2\ 3\ 6)(5\ 4) \quad \pi_2 = (1\ 2)(4\ 5\ 6)$$

$$\pi_1 \circ \pi_2 = (2\ 3\ 6)(5\ 4)(1\ 2)(4\ 5\ 6)$$

$$= (1\ \ 3\ \ 6\ \ 5\ \ 2)$$

$$\pi_2 \circ \pi_1 = (1\ 2)(4\ 5\ 6)(2\ 3\ 6)(5\ 4)$$

$$= (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 6)$$

$$\pi_3 = (1) \quad \pi_4 = (1\ 3\ 6\ 5\ 2)$$

定理6.1 设f和g分别是X到Y和从Y到Z的函数，则：

1） 如f, g是满射，则gοf也是从X到Z的满射；

2） 如f, g是单射，则gοf也是从X到Z的单射；

3） 如f, g是双射，则gοf也是从X到Z的双射。

证明 1） 对任意c∈Z，由于g是满射，所以存在b∈Y，使得g(b)＝c。

按定义证明

对于b∈Y，又因f是满射，所以存在a∈X，使得f(a)＝b。

从而有鍶g(b)＝g(f(a))＝gof (a)＝c。

即存在a∈X，使得：gof (a)＝c，所以gof是满射。

2） 对任意$a_1, a_2 \in X$，$a_1 \neq a_2$，

由于f是单射，所以$f(a_1) \neq f(a_2)$。

令$b_1 = f(a_1)$，$b_2 = f(a_2)$，由于g是单射，所以$g(b_1) \neq g(b_2)$，即$g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$。

从而有鍶

$$gof\ (a_1) \neq gof\ (a_2),$$

所以gof是单射。

3） 是1)，2)的直接结果。■

逆函数

定义6.6 设f：X→Y是一个函数，如果存在一个函数g：Y→X ，使得

$$(\forall x)[(g\circ f)(x)=x]\wedge(\forall y)[(f\circ g)(y)=y],$$

则称g是f的逆函数，记为f^{-1}。

- 定理6.2　函数f存在逆函数当且仅当f是双射。

证明：　如果f有逆函数f^{-1}，对$\forall y \in Y$，有$f(f^{-1}(y))=y$。

令 $x=f^{-1}(y)$，则　$f(x)=y$，　即f是满射。

又设　$s,t \in x$　使得　$f(s)=f(t)$，

则　$f^{-1}(f(s))= f^{-1}(f(t))$，即$s=t$，　f是单射。

所以，　f是双射。

反之，　f为从X到Y的双射，根据定义，对每个$y \in Y$，有且仅有一个$x \in X$ 使得$f(x)=y$。因此可定义一个映射$g:Y \to X$，使得　$g(y)=x$，　所以

对$\forall x \in X$　都有$(g \circ f)(x)=x$，

对$\forall y \in Y$　都有$(f \circ g)(y)=y$，

由逆函数的定义，g是f的逆函数。

例6.4鎴设f：$R \to R$，满足：

鎴1）$f=\{\langle x, x^2\rangle \mid x \in R\}$；

鎴2）$f=\{\langle x, x+1\rangle \mid x \in R\}$。求$f^{-1}$。

解　1）对任意$x \in R$，有$f(x)=x^2=(-x)^2=f(-x)$，所以f不是单射函数，即f非双射函数，因此f的逆函数不存在。

鎴2）因f是双射函数，所以f^{-1}存在，且有：

$$f^{-1}=\{\langle x, x-1\rangle \mid x \in R\}。$$

定理6.3　若f：X → Y，g：Y → Z且f和g都是可逆的，则 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

函数f与f^{-1}的关系

（1）若f：X → Y是一个双射函数，则f^{-1}也是一个双射函数，且有 f^{-1}：Y → X

（2）如果函数f是可逆的，则$f^{-1}\circ f=I_x$，

$f\circ f^{-1}=I_y$

（3）如果f是双射函数则 $(f^{-1})^{-1}=f$

（4）如果f：X → Y，g：Y → X，

$g\circ f=I_x$，$f\circ g=I_y$ 当且仅当 $g=f^{-1}$。

习题六

6、8、10、11、13、14、15、16