离散 数学

计算机学院

冯伟森

Email：fws365@scu.edu.cn

2013年5月13日星期一

习题课三

基本要求

1. 正确理解幂集、笛卡尔集和关系的定义；
2. 能正确使用集合表达式，关系矩阵，关系图表示给定的二元关系；
3. 熟练掌握关系的各种运算，特别是复合运算和逆运算；
4. 牢记关系的5个性质的定义，对给定A上的关系R，能用三种方式（集合、矩阵、图）判断该关系R所具有的性质；

5. 正确理解关系运算的性质
6. 熟练掌握关系的**闭包**的概念和性质；
7. 掌握用矩阵计算传递闭包的Warshall(1962)算法；
8. 能正确理解闭包运算；
9. 熟练掌握**等价关系**、**等价类**的定义；
10. 正确理解集合的划分(分划)；
11. 熟练掌握**偏序关系**、**偏序集**、**哈斯图**等概念；
12. 熟练掌握由关系图得到哈斯图的方法；

13. 熟练掌握偏序集中特定元素的计算；

14. 掌握全序关系、良序关系、良序集等概念；

15. 掌握对给定的有限偏序集构造全序集的拓扑排序算法；

16. 能正确使用按定义证明的方法进行关系的性质和特殊关系的证明 。

例1

设$A=\{a, b, c, d, e, f\}$，定义在A上的关系

$R=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, f\rangle\}$，

$S=\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, f\rangle\}$，求$R^n$和$S^n$。

解 $R^1=R$,

$R^2=R\circ R=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle d, f\rangle\}$，

$R^3=R\circ R\circ R=R^2\circ R$

$=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, f\rangle\}$，

$R^4=R^3\circ R=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle b, f\rangle\}$，

$R^5=R^4\circ R=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle a, f\rangle\}$，

$R^6=R^5\circ R=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle a, f\rangle\}$

$=R^5$,

$R^7=R^6\circ R=R^5$, …, $R^n=R^5$ $(n>5)$。

例1（续）

$S^1 = S = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, f\rangle\}$，

$S^2 = S \circ S = \{\langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle d, f\rangle\}$，

$S^3 = S \circ S \circ S = S^2 \circ S = \{\langle a, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, f\rangle\}$，

$S^4 = S^3 \circ S = \{\langle a, e\rangle, \langle b, f\rangle\}$，

$S^5 = S^4 \circ S = \{\langle a, f\rangle\}$，

$S^6 = S^5 \circ S = \Phi$，

$S^7 = \Phi$，…，

$S^n = \Phi$ （$n > 5$）。

例2

设集合A的元素数为n，R是A上二元关系，那么存在自然数i，j($0\le i<j\le 2^{n^2}$)使得$R^i=R^j$。

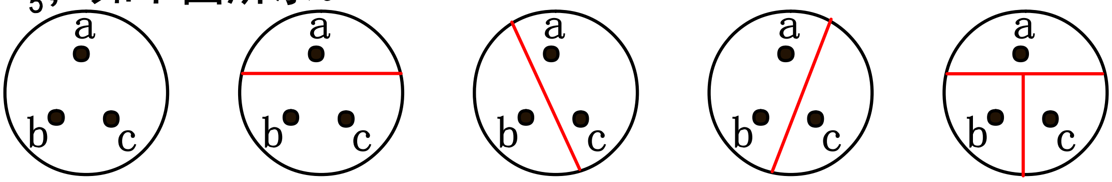
证明：由关系的特点知道，若|A|=n，则A上的关系有2^{n^2}个，因此，在 R^0，R^1，R^2，…，这 $2^{n^2}+1$个关系中，至少有两个是相同的（鸽巢原理），即有i,j($0\le i<j\le 2^{n^2}$)使得$R^i=R^j$。

如果$k+1$个或更多的物体放入k个盒子，那么至少有一个盒子包含了2个或更多的物体。

例3

设A={a, b, c}，求A上所有的等价关系。

解鍶先求A的划分：只有1个划分块的划分为Π_1，具有2个划分块的划分为Π_2、Π_3和Π_4，具有3个划分块的划分为Π_5，如下图所示。



设Π_i导出的等价关系为Π_i， i=1, 2, 3, 4, 5。则有

R_1={<a, a>, <a, b>, <a, c>, <b, a>, <b, b>, <b, c>, <c, a>, <c, b>, <c, c>}=A×A；

R_2={<a, a>, <b, b>, <b, c>, <c, b>, <c, c>}；

R_3={<a, a>, <a, c>, <b, b>, <c, a>, <c, c>}；

R_4={<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <c, c>}；

R_5={<a, a>, <b, b>, <c, c>}=I_A。

例4

设集合A＝{1, 2, 3, 4, 5, 6}的两个划分如下：

鎴$\Pi_1(A)=\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}$；

鎴$\Pi_2(A)=\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$.

求其相应的等价关系。

解： $R_1=\{1, 2, 3\}\times\{1, 2, 3\}\cup\{4, 5\}\times\{4, 5\}\cup\{6\}\times\{6\}$

鎴$=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle,$
$\langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 4\rangle, \langle 6, 6\rangle\}$；

鎴$R_2=\{1, 2, 3\}\times\{1, 2, 3\}\cup\{4, 5, 6\}\times\{4, 5, 6\}$鎴

$=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle,$
$\langle 3, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle, \langle 6, 6\rangle,$
$\langle 4, 5\rangle, \langle 5, 4\rangle, \langle 4, 6\rangle, \langle 6, 4\rangle, \langle 5, 6\rangle, \langle 6, 5\rangle\}$。

商集(*quotient set*)

设R是非空集合A上的等价关系，以R的所有不同等价类为元素作成的集合称为A的商集，简称A的商集，记作A/R。

A/R恰是集合 A 的一个划分。

设集合$A=\{1,2,3,...,10\}$，R是模3同余关系，则$A/R=\{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$，这里

$[1]_R=\{1,4,7,10\}$,

$[2]_R=\{2,5, 8\}$,

$[3]_R=\{3,6,9\}$

例5

设R是集合A上的一个传递关系和自反关系，S是A上的一个关系，使得对任意$a,b\in A$，$\langle a,b\rangle\in S$当且仅当$\langle a,b\rangle\in R$且$\langle b,a\rangle\in R$，试证明S是A上的一个等价关系。

证明：

1）对任意$a\in A$，因R是自反的，所以$\langle a,a\rangle\in R$。由$\langle a,a\rangle\in R$并且$\langle a,a\rangle\in R$，有$\langle a,a\rangle\in S$，即S是自反的。

2）对任意$a,b\in A$，若$\langle a,b\rangle\in S$，则由已知条件有$\langle a,b\rangle\in R$并且$\langle b,a\rangle\in R$，即有$\langle b,a\rangle\in R$并且$\langle a,b\rangle\in R$，

所以，$\langle b,a\rangle\in S$，即S是对称的。

3） 对任意a,b,c∈A，若<a,b>∈S，<b,c>∈S，则由已知条件有：<a,b>∈R并且<b,a>∈R和<b,c>∈R并且<c,b>∈R。所以，由<a,b>∈R并且<b,c>∈R，有<a,c>∈R；由<c,b>∈R并且<b,a>∈R，有<c,a>∈R；由：<a,c>∈R并且<c,a>∈R，有<a,c>∈S，即S是传递的。

- 由1),2),3)知，S是A上的一个等价关系。■

例6

设R是集合A上的一个关系，对∀a, b, c∈A，若<a, b>∈R并且<a, c>∈R，则有：<b, c>∈R，则R称为A上的**循环关系**。试证明R是A上的一个等价关系的充要条件是R是循环关系和自反关系。

证明：“⇒” 若R是等价关系。

1）显然R是自反的。

2）对任意a, b, c∈A，若<a, b>∈R, <a, c>∈R，则由R是对称的，有<b, a>∈R并且<a, c>∈R，由R是传递的，所以，<b, c>∈R。即R是循环的关系。

鏓由1)，2)知R是自反的和循环的。

例6（续）

“$\Leftarrow$” 若R是自反的和循环的。

1）显然R是自反性的；

2）对任意a, b∈A, 若<a, b>∈R, 则由R是自反的, 有<a, a>∈R，因R是循环的，所以，

$$\langle a,b\rangle\in R \text{且} \langle a,a\rangle\in R \Rightarrow \langle b,a\rangle\in R,$$

即R是对称的。

3）对任意a, b, c∈A，若<a, b>∈R，<b, c>∈R，则由R对称的，有<b, a>∈R并且<b, c>∈R；由R是循环的，所以<b, a>∈R且<b, c>∈R⇒<a, c>∈R，即R是传递的。

由1), 2), 3)知，R是A上的一个等价关系。■

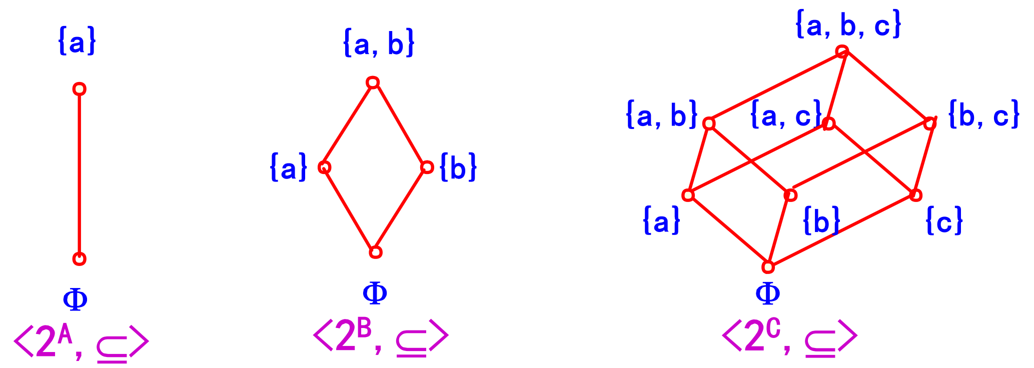
例7

设集合A＝{a}，B＝{a, b}，C＝{a, b, c} 。分别画出集合A、B、C之幂集 2^A、2^B、2^C 上定义的“⊆”的哈斯图。

$2^A=\{\Phi, \{a\}\}$

$2^B=\{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

$2^C=\{\Phi, \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$



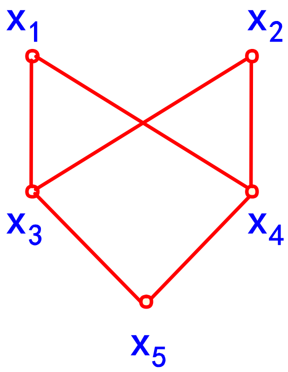
例8

设集合$A=\{a, b, c\}$，考虑2^A上的关系"$\subseteq$"，则$\langle 2^A, \subseteq \rangle$是偏序集。求$2^A$的子集：$B_1=\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, \{c\}, \Phi\}$，$B_2=\{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$，$B_3=2^A$的最大(小)元、极大(小)元、最小上界、最大下界。

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	最小上界	最大下界
B_1	无	Φ	{a, b}, {b, c}	Φ	{a, b, c}	Φ	{a, b, c}	Φ
B_2	{a, c}	无	{a, c}	{a}, {c}	{a, c}, {a, b, c}	Φ	{a, c}	Φ
B_3	{a, b, c}	Φ	{a, b, c}	Φ	{a, b, c}	Φ	{a, b, c}	Φ

例9

设A＝{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}，鍶A上定义偏序集<A, ≤>的哈斯图如下，求B＝{x_3, x_4, x_5}的最大(小)元、极大(小)元、上(下)界、最小上界、最大下界。



解：最大元：无；最小元：x_5；

极大元：x_3, x_4；极小元：x_5；

上鍶界：x_1, x_2；下鍶界：x_5；

最小上界：无；最大下界：x_5。

例10　　字典次序

- 计算机科学中常用的字典排序如下：设Σ是一有限的字母表。Σ上的字母组成的字母串叫Σ上的字；Σ*是包含空字“∧”的所有字组成的集合，建立Σ*上的字典次序关系L：

　　设　$x=x_1x_2x_3\ldots x_n$，$y=y_1y_2y_3\ldots y_m$，鎴其中：$x, y \in \Sigma^*$，$x_i, y_j \in \Sigma$（$i=1,2,...n$；$j=1,2,...m$）。

鎴①．当$x_1 \neq y_1$时，若$x_1 \leqslant y_1$（x_1、y_1的大小由它们的ASCII码号进行比较），则xLy；若$y_1 \leqslant x_1$，则yLx；

②.若存在最大的k且k<min(n,m)，使$x_i = y_i$鏍(i = 1,2,3,...,k)，而$x_{k+1} \neq y_{k+1}$，若$x_{k+1} \leq y_{k+1}$，则xLy；若$y_{k+1} \leq x_{k+1}$，则yLx；

③.若存在最大的k且k=min(n,m)，使$x_i = y_i$鏍(i=1,2,3,...,k),此时,若n≤m,则xLy；若m≤n,则yLx

显然，L是一个偏序关系，且也是一个全序关系。

如英语词典和汉语词典都是按字典次序排列的。

第二类Stirling数

将n个不同的球放入r个相同的盒中去，并且要求无空盒，有多少种不同的放法？这里要求n≥r。

不同的放球方法数即为n元集合A的不同的划分数，

- 设$\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}$表示将n个不同的球放入r个相同的盒中的方案数，称$\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}$为第二类Stirling数 。

第二类Stirling数的性质

（1） $\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix}=0,\ \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix}=1,\ \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix}=1$

$$\begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix}=C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^{n-1}=2^{n-1}-1,$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix}=C_n^2$$

(2)　满足如下的递推公式:

$$\binom{n}{r} = r\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

例11

集合A={a，b，c，d}上有多少不同的等价关系?

❖解：不同的划分个数为:

$$\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=1+2^{4-1}-1+C_4^2+1=15$$

不同的等价关系个数等于不同的划分个数，所以不同的等价关系个数为15。

习题解答

习题三　17

$(1) x \in 2^A \cup 2^B \Rightarrow x \in 2^A$ 或 $x \in 2^B$

$\Rightarrow x \subseteq \mathrm{A}$ 或 $x \subseteq \mathrm{B} \Rightarrow x \subseteq \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \Rightarrow x \in 2^{A \cup B}$

等号成立的条件为：$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \phi$

(2)　“$\Rightarrow$”$x \in 2^A \cap 2^B \Rightarrow x \in 2^A$ 和 $x \in 2^B$

$\Rightarrow x \subseteq \mathrm{A}$ 和 $x \subseteq \mathrm{B} \Rightarrow x \subseteq \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \Rightarrow x \in 2^{A \cap B}$

“$\Leftarrow$” 如 $x \in 2^{A \cap B}$，由于上述过程可逆 $\Rightarrow x \in 2^A \cap 2^B$

习题 四

- 13. 解：$\because R = R_1 U R_2$ ，
- 且 $R_1 \cap R_2 = \Phi$

$\therefore R^k = R_1^k U R_2^k \quad A = A_1 U A_2$

$\because \quad R_1^3 = I_{A_1} \qquad R_2^5 = I_{A_2}$ ，

- ∴ 需3｜k，5｜k
- $\Rightarrow \quad k = 15$ ，即 $n = 16$

$R^{16} = R_1^{16} \cup R_2^{16} = R_1 \cup R_2 = R$

- 故使 $R^m = R^n$ 的最小正整数

$m = 1, \quad n = 16$

15、解：

$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M_{t(R)}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

习题五

- 13. 证：i）自反性，对 $\forall b \in B \subseteq A$，$(b,b) \in R$，
- （R的自反性）$(b,b) \in B \times B$ $\therefore$ $(b,b) \in R \cap (B \times B)$
- 显然 $\forall a,b \in B$，$(a,b) \in R \cap (B \times B)$
- ii)反对称性，对 $(a,b) \in R$，
- 即，$(b,a) \notin R$
- 由R的反对称性，$(b,a) \notin R \cap (B \times B)$

$\forall a,b,c \in B$

- iii)传递性，对 $(a,b) \in R \cap (B \times B)$，$(b,c) \in R \cap (B \times B)$
- 设 ，

- 则 $(a,b)\in R$ ， $(b,c)\in R$ 。
- 由R的传递性，$(a,c)\in R$ ，
- 显然 $(a,c)\in B\times B$

$\therefore \quad (a,c)\in R\cap(B\times B)$

实验二

- 利用求传递闭包的**Warshall**算法，给定关系**R**，编写求**R**的可传递闭包的**C**语言程序并利用下列数据测试。
- 测试数据为：
- **1，0，0，0，**
- **1，1，0，1，**
- **0，1，1，0，**
- **1，0，1，1**