离散 数学

计算机学院

冯伟森

Email： fws365@scu.edu.cn

2013年5月13日星期一

主要内容

1、关系的闭包

2、Warshall算法（用矩阵计算传递闭包）

3、闭包运算的性质

§4.4 关系的闭包

- 设R是A上的关系，我们希望R具有某些有用的性质，比如自反性、对称性、传递性等。如果R不具有这些性质，可以通过在R中添加一些有序对来改造R，得到新关系R′，使R′具有上述性质，但又不希望R′与R相差太多，即添加的有序对要尽可能的少，满足这些要求的R′就称为R的闭包。

※定义4.7　设R是定义在A上的二元关系，若存在A上的关系R′满足：

1) R′是自反的(或对称的、或可传递的)，

2) R⊆R′，

3) 对A上任何其它满足1）和2）的关系R″，都有：R′⊆R″。（表明R′的最小性）

则称R′为R的自反闭包(或对称闭包、或传递闭包)，分别记为r(R)(s(R)或t(R))。

例4-4.1

设集合A＝{a, b, c}，R＝{<a, b>, <b, b>, <b, c>}是定义在A上的二元关系，求r(R), s(R), t(R)，并画出R，r(R), s(R), t(R)的关系图和求出相应的关系矩阵。

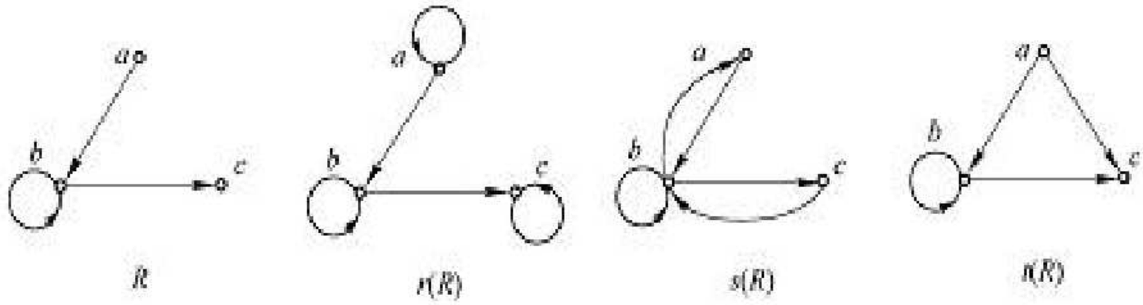
解：

1） r(R)＝{<a, b>, <b, b>, <b, c>, <a, a>, <c, c>}；

2） s(R)＝{<a, b>, <b, b>, <b, c>, <b, a>, <c, b>}；

3） t(R)＝{<a, b>, <b, b>, <b, c>, <a, c>}。

例4-4.1（续）



$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{r(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{s(R)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, M_{t(R)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

利用关系图和关系矩阵求闭包

1）求一个关系的自反闭包，即将图中的所有无环的节点加上环；关系矩阵中对角线上的值r_{ij}鍶全变为“1”。

2）求一个关系的对称闭包，则在图中，任何一对节点之间，若仅存在一条边，则加一条方向相反的另一条边；关系矩阵中则为：若有$r_{ij}=1(i\neq j)$，则令$r_{ji}=1$(若$r_{ji}\neq 1$)，即$M_{s(R)}=M_R\vee M_{R^{-1}}$。

3）求一个关系的传递闭包，则在图中，对任意节点a，b，c，若a到b有一条边，同时b到c也有一条边，则从a到c必增加一条边(当a到c无边时)；在关系矩阵中，若$r_{ij}=1$，$r_{jk}=1$，则令$r_{ik}=1$(若$r_{ik}\neq 1$)。

定理4.5

设R是集合A上的二元关系，则：

1) $r(R)=R\cup I_A$。

2) $s(R)=R\cup R^{-1}$。

3) $t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$。

证明 3）可采用二种方法，一种是证明$\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$是传递闭包（按定义证明）；一种是直接证明 $t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$。

方法一、设$R_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

为什么？

(1) 显然$R \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R_1$ 。

(2) 对任意$a, b, c \in A$，若$\langle a, b\rangle \in R_1$，$\langle b, c\rangle \in R_1$，
则由$R_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$，必存在$R^j, R^k (1 \leqslant j, k < \infty)$，使得
$\langle a, b\rangle \in R^j$，$\langle b, c\rangle \in R^k$，即$\langle a, c\rangle \in R^{j+k} (1 \leqslant j+k < \infty)$，
$\because R^{j+k} \subseteq R_1$，所以 $\langle a, c\rangle \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R_1$，即$R_1$是传递的。

(3) 设R_2是任何一个关系，且有$R \subseteq R_2 \subseteq A \times A$，$R_2$是传递的。
对任意$\langle a, b\rangle \in R_1$，存在$R^j (1 \leqslant j < \infty)$，使得
$\langle a, b\rangle \in R^j$，所以存在$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{j-1} \in A$，使得：

$\langle a, c_1\rangle \in R, \langle c_1, c_2\rangle \in R, \langle c_2, c_3\rangle \in R, \ldots\ldots, \langle c_{j-1}, b\rangle \in R$。

因$R \subseteq R_2$, 所以

$\langle a, c_1\rangle \in R_2, \langle c_1, c_2\rangle \in R_2, \langle c_2, c_3\rangle \in R_2, \ldots, \langle c_{j-1}, b\rangle \in R_2$。

由R_2是传递的，有：

$\langle a, c_2\rangle \in R_2, \langle c_2, c_3\rangle \in R_2, \langle c_3, c_4\rangle \in R_2, \ldots, \langle c_{j-1}, b\rangle \in R_2$。

一直下去，最终有：$\langle a, b\rangle \in R_2$。

所以，$R_1 \subseteq R_2$。

由(1),(2),(3)知：R_1是R的传递闭包，即$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$。

方法二、设$t(R)$是R的传递闭包，证明$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$。

(1) 证明$t(R)\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$，

∵ $\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$ 是可传递的，同时$R\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$

∴ 由传递闭包的定义知： $t(R)\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$ 。

(2) 证明$\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i\subseteq t(R)$。只需证对任意的$i\in N^+$，有$R^i\subseteq t(R)$。

当$i=1$时，因$R\subseteq t(R)$，所以结论成立。

设$i=k$时，有$R^k\subseteq t(R)$结论成立。

当$i=k+1$时，对任意$\langle a,b\rangle\in R^{k+1}$，则存在$c\in A$，使得$\langle a,c\rangle\in R^k$，$\langle c,b\rangle\in R$由归纳假设有：$\langle a,c\rangle\in t(R)$，$\langle c,b\rangle\in t(R)$，由$t(R)$可传递，所以$\langle a,b\rangle\in t(R)$，

即有：$R^{k+1}\subseteq t(R)$。

由归纳法知，对任意有的$i \in N^+$,有$R^i \subseteq t(R)$。

所以

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)。$$

由(1)、(2)知：$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 。■

定理4.6

设A是n个元素的集合，R是集合A上的二元关系，则∃正整数k，k≤n，使t(R)＝ $\bigcup_{i=1}^{k} R^i$ 。

这个定理为我们计算 t（R)减少了很多不必要的劳动,但是,仍要一步一步地计算出各个 R^i 。当 n 较大时,工作量也是相当庞大的。

下面介绍Warshall(1962)算法---用矩阵计算传递闭包的一种有效方法(为计算机解决分类问题奠定了基础)。

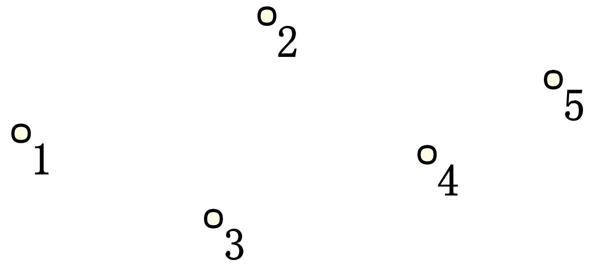
Warshall算法的基本思想

在关系矩阵中，每列（结点）的每个等于1的元素反映的是该元素所在行（结点）到该结点有一条有向边；每行（结点）的每个等于1的元素反映的是该结点到该元素所在列（结点）有一条有向边。

对每个结点（从第一列开始），找出所有具有到该结点的有向边的结点（即该列中元素为1的所在行的结点），再将这些结点所在行同该结点所在行进行逻辑加后作为这些结点所在的新行（添加新的有向边）。

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

上述构造从几何上反映了如果这些结点没有到其它结点的有向边，但有到该结点的有向边，再通过该结点间接到达其它结点，根据传递闭包的定义，这些结点就必然有一条有向边到达其它结点。



Warshall(1962)算法

- 设R是集合上的二元关系,Mr是R的关系矩阵
- (1)置新矩阵A:=Mr
- (2)置(列)　j:=1
- (3) 对所有的i(1≤i≤n)

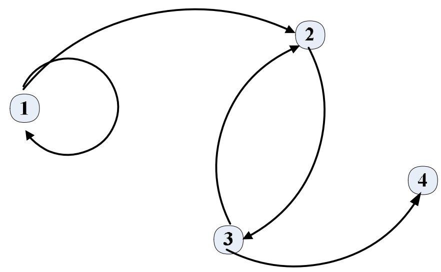
　　如A(i, j)=1,则对k=1, 2, ..., n

　　　A(i, k):=A(i, k) ∨ A(j, k)
- (即将A的第i行与A的第j行进行逻辑加后送回A的第i行)
- (4)j:=j+1
- (5)如j≤n转(3),否则停止。

例4-4.2

- 设R={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,4>}

$$M=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

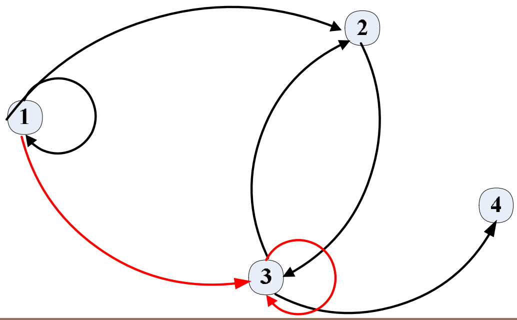


- j:=1; ∵ j=1时,A的第一列中只有A(1,1)=1,将A的第一行上元素与本身作逻辑加,结果送该行,A不变。
- j:=j+1; j=2,A 的 第 二 列 有 两 个 1, 即 A(1,2)=A(3,2)=1

例4-4.2（续1）

- 分别将A的第1行和第3行与第二行对应元素作逻辑加，将结果分别送1，3行得：

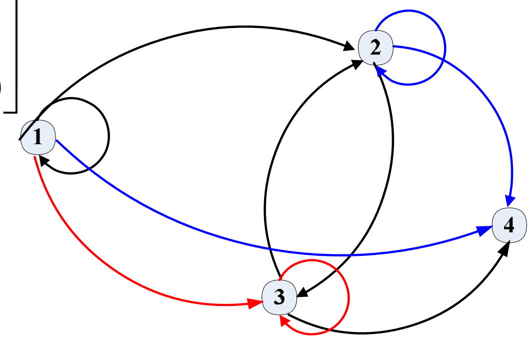
$$M=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$



例4-4.2（续2）

- j:=j+1;　j=3,A 的 第 3 列 有 3 个 1, 即 A(1,3)=A(2,3)=A(3,3)=1,
- 分别将A的第1,2,3行与第3行对应元素作逻辑加,将结果分别送1,2,3行得:

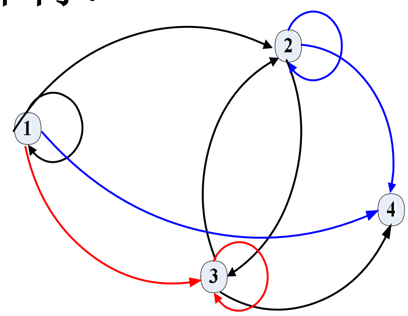
$$M=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$



例4-4.2（续3）

- j:=j+1； j=4,A的第4行全为0,A不变。
- j:=j+1； j=5>4=n,停止,即得：

$$M_R^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



闭包运算的性质

定理4.7　设R_1，R_2是集合A上的关系，且$R_1 \subseteq R_2$，则：

1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

定理4.8　设R是集合A上的关系，则：

1) 若R是自反的，则s(R),t(R)也是自反的

2) 若R是对称的，则r(R),t(R)也是对称的

3) 若R是传递的，则r(R)也是传递的

多重闭包

1） 集合A上的关系的自反对称闭包定义为鍶rs(R) ＝r(s(R))

2） 集合A上的关系的自反传递闭包定义为rt(R) ＝r(t(R))

3） 集合A上的关系的对称传递闭包定义为st(R) ＝s(t(R))

鍶同上，我们还可定义sr(R), tr(R), ts(R), …

定理4.9　设R是集合A上的关系，则：

1)rs(R)＝sr(R)　　　　2)rt(R)＝tr(R)

3)st(R)$\subseteq$ts(R)

例4-4.3

设A＝{1, 2}, R＝{<1, 2>}, 则：

$st(R)=s(t(R))=s(\{\langle 1,2\rangle\})$
$\quad=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

$ts(R)=t(s(R))=t(\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\})$

鍶 $\quad=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

即：$st(R)\subseteq ts(R)$

传递闭包和自反传递闭包，常用于形式语言与程序设计中，在计算机文献中，常把关系R的传递闭包t(R)记作R^+，而自反传递闭包rt(R)记作R^*。显然有$(R^+)^+=R^+$。

习题四

12、13、15、16