离散 数学

计算机学院

冯伟森

Email： fws365@scu.edu.cn

2013年5月13日星期一

习题课一

消解法（原理）（归结推理法）

利用规则推理有很大的随意性，不易机械执行，归结推理法是仅有一条推理规则的机械推理法,容易以程序实现，是定理机器证明的重要方法。是反证法的特殊情况。

根据基本蕴涵式I_8（析取三段论）

即　$P, \sim P \vee Q \Rightarrow Q$

和基本蕴涵式I_{13}（归结原理）

$(P \vee Q) \wedge (\sim P \vee R) \Rightarrow Q \vee R$

消解规则（归结式定义）

- 设 $C_1=L \vee C_1'$ ， $C_2=\sim L \vee C_2'$ 是两个子句，有互补对L和～L，则新子句

  $R(C_1, C_2)=C_1' \vee C_2'$

  称作C_1和C_2的消解式（归结式）。

  为了证明

  $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$

  根据反证法，即需证明

  $A_1, A_2, \ldots, A_n, \sim B \Rightarrow R \wedge \sim R$

利用消解规则进行推理，其过程为：

- 1）从$\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \sim B\}$出发。

- 2） 将$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \sim B$转化成合取范式，如

  P∧（P∨R）∧（~P∨Q）∧（~P∨R）的形式

  3） 将合取范式中的所有子句（析取式）构成子句集合S，如

  S={P，P∨R，~P∨Q，~P∨R}

  4） 对S使用消解规则

  对S的子句作归结，即消除互补式（互反对），如子句P∨R与~P∨Q作归结，得归结式R∨Q并将这归结式仍放S中，重复这一过程。

  5） 直至归结出矛盾式（称为空子句，记为□）

因此，其消解过程就是对S的子句求消解式的过程。

$R(C_1,C_2)=C_1' \vee C_2'$ 仅三种情况：

① $C_1=A \vee B$，$C_2=\sim A \vee D$，

则（$(A \vee B)$，$(\sim A \vee D)$）$\Rightarrow B \vee D$

② $C_1=A$，$C_2=\sim A \vee B$

则 $(A, \sim A \vee B) \Rightarrow B$

③ $C_1=A$，$C_2=\sim A$

则（A，$\sim A$）$\Rightarrow F$ ($\square$)

消解方法的机械性是很明显的，其复杂性就是怎样寻找包含互反句节的子句。不同的寻找方式就产生了各种方式的消解算法。

例1-7．5

- 如果公司的利润高，那么公司有个好经理或它是一个好企业及大体上是个好的经营年份。现在的情况是：公司的利润高,不是一个好的经营年份。要证明，公司有个好经理。
- 解：设A：公司的利润高

  B：公司有个好经理

  C：公司是个好企业

  D：大体上是个好的经营年份

  则原题可符号化为：
- $(A\rightarrow(B\vee(C\wedge D)))\wedge A\wedge\sim D\Rightarrow B$

- $P_1: A \rightarrow (B \vee (C \wedge D)) \Leftrightarrow$

  $\sim A \vee (B \vee (C \wedge D)) \Leftrightarrow$

  $\sim A \vee ((B \vee C) \wedge (B \vee D)) \Leftrightarrow$

  $(\sim A \vee B \vee C) \wedge (\sim A \vee B \vee D)$
- P_2: A
- P_3: ~D
- S={~A∨B∨C，~A∨B∨D，A，~D，~B}
- 归结过程（消解步骤）

- （1） ～A∨B∨C　P 引用子句
- （2） ～A∨B∨D　P
- （3） A　P
- （4） ～D　P
- （5） ～B　P
- （6） B∨D　由（2),(3)归结
- （7） B　由（4），（6）归结
- （8） FLASE □　由（5），（7）归结
  导出空子句

第一章小结

一、基本概念

命题

命题的解释

原子命题、复合命题

逻辑联结词（～、∨、∧、∇、→、↔）

命题公式

公式的解释

永真式(重言式)

永假式(矛盾式，不可满足公式)

可满足式

命题公式的等价

替换定理

对偶式

对偶原理

基本等价式——命题定律

范式

句节、子句、短语、析取范式、合取范式

极小项---主析取范式

极大项---主合取范式

命题公式的蕴涵

基本蕴含（关系）式

推理规则

① P规则（称为前提引用规则）

② T规则（逻辑结果引用规则）

③ C P规则（附加前提规则）

二、基本方法

1、应用基本等价式及置换规则进行等价演算

2、求主析取（主合取）范式的方法

1）公式转换法

2）真值表技术法

主合取范式----在命题公式的真值表中，使公式取值0时的解释所对应的全部极大项的合取式。

主析取范式----在命题公式的真值表中，使公式取值1时的解释所对应的全部极小项的析取式。

3、推理的各种方法

- （1）直接法
- （2）利用CP规则
- （3）反证法

4、消解法

三、典型例题

1、证明$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$

证：$P \to (Q \to R)$

$\Leftrightarrow \sim P \vee (Q \to R)$ （蕴涵式）

$\Leftrightarrow \sim P \vee (\sim Q \vee R)$ （蕴涵式）

$\Leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q) \vee R$ （结合律）

$\Leftrightarrow \sim (P \wedge Q) \vee R$ (De Morgan定律)

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$ （蕴涵式）

2、试证明

$$(P\wedge(Q\vee R))\vee(P\wedge \sim Q\wedge \sim R)\Leftrightarrow P$$

证明：$(P\wedge(Q\vee R))\vee(P\wedge \sim Q\wedge \sim R)$

$\Leftrightarrow P\wedge((Q\vee R)\vee(\sim Q\wedge \sim R))$（分配律）

$\Leftrightarrow P\wedge((Q\vee R)\vee\sim(Q\vee R))$ (De Morgan定律)

$\Leftrightarrow P\wedge T$（矛盾律）

$\Leftrightarrow P$ (同一律)

3、证明 $((P\vee Q)\wedge\sim(P\wedge Q))\Leftrightarrow\sim(P\leftrightarrow Q)$

$((P\vee Q)\wedge\sim(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow ((P\vee Q)\wedge(\sim P\vee\sim Q))$ (De Morgan定律)

$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge\sim P)\vee((P\vee Q)\wedge\sim Q))$ （分配律）

$\Leftrightarrow((P\wedge\sim P)\vee(Q\wedge\sim P))\vee((P\wedge\sim Q)\vee(Q\wedge\sim Q))$

$\Leftrightarrow (Q\wedge\sim P)\vee(P\wedge\sim Q)$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow \sim(\sim Q\vee P)\vee\sim(\sim P\vee Q)$ (De Morgan定律)

$\Leftrightarrow\sim((Q\rightarrow P)\wedge(P\rightarrow Q))$ （蕴涵式）

$\Leftrightarrow\sim(P\leftrightarrow Q)$ （等价式）

4、 G=～(P→Q)∨R，求主析取和主合取范式。

解：首先列出其真值表如下：

P Q R	P→Q	～（P→Q）	～(P→Q)∨R
0 0 0	1	0	0
0 0 1	1	0	1
0 1 0	1	0	0
0 1 1	1	0	1
1 0 0	0	1	1
1 0 1	0	1	1
1 1 0	1	0	0
1 1 1	1	0	1

极大项

极小项

P∨Q∨R
～P∧～Q∧R
P∨～Q∨R
～P∧Q∧R
P∧～Q∧～R
P∧～Q∧R
～P∨～Q∨R
P∧Q∧R

主析取范式=（～P∧～Q∧R）∨（～P∧Q∧R）∨
（P∧～Q∧～R）∨（P∧～Q∧R）∨（P∧Q∧R）

主合取范式=（ P∨Q∨R ）∧（ P∨～Q∨R ）∧（～P∨～Q∨R）

- 5、用公式转换法求上题中的主析取和主合取范式
- $\sim(P\rightarrow Q)\vee R \Leftrightarrow \sim(\sim P\vee Q)\vee R \Leftrightarrow (P\wedge\sim Q)\vee R$
- $\Leftrightarrow (P\vee R)\wedge(\sim Q\vee R)$
- $\Leftrightarrow (P\vee R\vee(\sim Q\wedge Q))\wedge(\sim Q\vee R\vee(\sim P\wedge P))$
- $\Leftrightarrow (P\vee R\vee\sim Q)\wedge(P\vee R\vee Q)\wedge(\sim Q\vee R\vee\sim P)\wedge(\sim Q\vee R\vee P)$
- $\Leftrightarrow (P\vee R\vee\sim Q)\wedge(P\vee R\vee Q)\wedge(\sim Q\vee R\vee\sim P)$ （主合取范式）

- $\sim(P\rightarrow Q)\vee R \Leftrightarrow \sim(\sim P\vee Q)\vee R \Leftrightarrow (P\wedge\sim Q)\vee R$
- $\Leftrightarrow (P\wedge\sim Q\wedge(R\vee\sim R))\vee(R\wedge(P\vee\sim P)\wedge(Q\vee\sim Q))$
- $\Leftrightarrow (P\wedge\sim Q\wedge R)\vee(P\wedge\sim Q\wedge\sim R))\vee(R\wedge P)\vee(R\wedge\sim P)$
- $\Leftrightarrow (P\wedge\sim Q\wedge R)\vee(P\wedge\sim Q\wedge\sim R))\vee(R\wedge P\wedge(Q\vee\sim Q))$
- $\vee(R\wedge\sim P\wedge(Q\vee\sim Q))$
- $\Leftrightarrow (P\wedge\sim Q\wedge R)\vee(P\wedge\sim Q\wedge\sim R)\vee(R\wedge P\wedge Q)$
  $\vee(R\wedge P\wedge\sim Q)\vee(R\wedge\sim P\wedge Q)\vee(R\wedge\sim P\wedge\sim Q)$
  （主析取范式）

6、将下面一段程序简化

```
If  A∧B  then
    If  B∨C then
        X
    Else
        Y
    End
Else
    If  A∧C  then
        Y
    Else
        X
    End
End
```

执行程序段X 的条件为

((A∧B)∧（B ∨ C））∨（┑（A∧B)∧┑（A∧C））

⇔ ┑（A∧┑B∧C)

执行程序段Y的条件为

((A∧B)∧┑（B ∨ C））∨（┑（A∧B)∧（A∧C））

⇔ A∧┑B∧C

```
If  A∧┑B∧C  then
        Y
    Else
        X
    End
```

7、习题一 14题

解：由题设 A：A去，B：B去，C：C去，D：D去

则满足条件的选派应满足如下范式：

（A→（C∇D））∧～（B∧C）∧～（C∧D）

构造和以上范式等价的主析取范式（为什么？）

（A→（C∇D））∧～（B∧C）∧～（C∧D）

⇔（～A∧～B∧ ～C ∧D ）∨（～A∧～B∧～C∧～D）

∨（～A∧～B∧C∧～D）∨（～A∧B∧～C∧～D）

∨（A∧～B∧C∧～D）∨（A∧～B∧～C∧D）

∨（～A∧B∧～C∧D）∨（A∧B∧～C∧D）

共有八个极小项，但根据题意，需派两人出差，所以，只有其中三项满足要求：

（A∧～B∧C∧～D），（A∧～B∧～C∧D），（～A∧B∧～C∧D）

即有三种方案：A和C去或者A和D去或者B和D去。

8、如果今天是星期一，则要进行离散数学或数据结构两门课程中的一门课的考试；如果数据结构课的老师生病，则不考数据结构；今天是星期一，并且数据结构的老师生病。所以今天进行离散数学的考试。

- 解：设P：今天是星期一；

Q：要进行离散数学考试；

R：要进行数据结构考试；

S：数据结构课的老师生病；

则$P \rightarrow Q \nabla R$，$S \rightarrow \sim R$，$P \wedge S \Rightarrow Q$。

证：

(1)	$P \wedge S$	P
(2)	S	T, (1), I_2
(3)	$S \rightarrow \sim R$	P
(4)	$\sim R$	T, (2), (3), I_3
(5)	P	T, (1), I_2
(6)	$P \rightarrow Q \nabla R$	P
(7)	$Q \nabla R$	T, (5), (6), I_3
(8)	Q	T, (4), (7), I_5

9、一位计算机工作者协助公安员审查一件谋杀案，他认为下列情况是真的；

- （1）会计张某或邻居王某谋害了厂长。
- （2）如果会计张某谋害了厂长，则谋害不能发生在半夜。
- （3）如果邻居王某的证词是正确的，则谋害发生在半夜。
- （4）如果邻居王某的证词不正确，则半夜时屋里灯光未灭。
- （5）半夜时屋里灯光灭了，且会计张某曾贪污过。
- 计算机工作者用他的数理逻辑知识，很快推断出谋害者是谁？请问:谁是谋害者？怎样推理发现他？

- 解：设P：会计张某谋害了厂长

  Q：邻居王某谋害了厂长

  N：谋害发生在半夜。

  O：邻居王某的证词是正确的。

  R：半夜时屋里灯光灭了。

  A：会计张某曾贪污过。

- 上述案情有如下命题公式：

  （1）$P \vee Q$

  （2）$P \rightarrow \sim N$

  （3）$O \rightarrow N$

  （4）$\sim O \rightarrow \sim R$

  （5）$R \wedge A$

- 问题是需求证：

  $\{P \vee Q,\ P \rightarrow \sim N,\ O \rightarrow N,\ \sim O \rightarrow \sim R,\ R \wedge A\} \Rightarrow ?$

- 证：

①	$R \wedge A$	P
②	R	T，①，I_2
③	$\sim O \rightarrow \sim R$	P
④	O	T，②，③，I_4，E_{19}
⑤	$O \rightarrow N$	P
⑥	N	T，④，⑤，I_3
⑦	$P \rightarrow \sim N$	P
⑧	$\sim P$	T，⑥，⑦，I

∴ $\{P \vee Q,\ P \rightarrow \sim N,\ O \rightarrow N,\ \sim O \rightarrow \sim R,\ R \wedge A\} \Rightarrow Q$

- 结论是：邻居王某谋害了厂长。

10、证明下面论述的有效性。

在意甲比赛中，假如有四只球队，其比赛情况如下：如果国际米兰队获得冠军，则AC米兰队或尤文图斯队获得亚军；若尤文图斯队获得亚军，国际米兰队不能获得冠军；若拉齐奥队获得亚军，则AC米兰队不能获得亚军；最后，国际米兰队获得冠军。所以，拉齐奥队不能获得亚军。

- 解：设P：国际米兰队获得冠军；

  Q：AC米兰队获得亚军；

  R：尤文图斯队获得亚军；

  S：拉齐奥队获得亚军；

  则原命题可符号化为：

  $P \rightarrow Q \vee R$，$R \rightarrow \sim P$，$S \rightarrow \sim Q$，$P \Rightarrow \sim S$

- (1) $\sim(\sim S)$ P（附加前提）
- (2) S T, (1), E_{19}
- (3) $S \to \sim Q$ P
- (4) $\sim Q$ T, (2), (3), I_2
- (5) $P \to Q \nabla R$ P
- (6) P P
- (7) $Q \nabla R$ T, (5), (6), I_2
- (8) R T, (4), (7), I_5
- (9) $R \to \sim P$ P
- (10) $\sim P$ T, (8), (9), I_2
- (11) $P \wedge \sim P (\Leftrightarrow F)$ T, (6), (10), E_{18}

所以，拉齐奥队不能获得亚军

11、P_{19}　4

解：根据给定的条件有下述命题：

P：珍宝藏在东厢房

Q：藏宝的房子靠近池塘

R：房子的前院栽有大柏树

S：珍宝藏在花园正中地下

T：后院栽有香樟树

（Q→～P）∧（R→P）∧Q∧（R∨S）∧（T→M）

⇒～P∧（R→P）∧（R∨S）∧（T→M）

⇒～R∧（R∨S）∧（T→M）

⇒S∧（T→M）

⇒S　　即珍宝藏在花园正中地下

①	P	P
②	S→～P	P
③	～S	T①②I
④	～S→～R	P
⑤	～R	T③④I
⑥	Q∨R	P
⑦	Q	T⑤⑥I
⑧	Q→T	P
⑨	T	T⑦⑧I

即 金刚是偷窃者

13、若n是偶数，并且n大于5，则m是奇数。只有n是偶数，m才大于6。n是大于5，所以，若m大于6，则m是奇数。

解：设p：n是偶数，q：n大于5,

r：m是奇数，s：m大于6.

前提：$(p\wedge q)\rightarrow r, s\rightarrow p, q$

结论：$s\rightarrow r$

证明:

① q　　P

② $\sim s\vee q$　　①扩充法则　（关键）

③	$s \to q$	②蕴涵式
④	$s \to p$	P
⑤	$(s \to p) \wedge (s \to q)$	③④合取
⑥	$s \to (p \wedge q)$	⑤蕴涵式
⑦	$(p \wedge q) \to r$	P
⑧	$s \to r$	⑥⑦ 假言三段论