

# 离散



# 数学

计算机学院

冯伟森

Email: [fws365@scu.edu.cn](mailto:fws365@scu.edu.cn)

2013年5月13日星期一



# 主要内容

- 1、命题公式的蕴涵
  - 1) 九类蕴涵关系
  - 2) 蕴涵关系的基本性质
- 2、推理的基本概念和推理形式
- 3、推理规则
  - 1) P规则
  - 2) T规则
  - 3) CP规则



## § 1. 6 命题公式的蕴涵

- **定义1.18** 设A和B是两个合适公式，如果在任何解释下，A取值1时B也取值1，则称公式A蕴涵公式B，并记 $A \Rightarrow B$ 。
- **定理1.11**  
 $A \Rightarrow B$  iff  $A \rightarrow B$ 为永真式。
- **注意：**蕴涵和条件联结词 $\rightarrow$ 是完全不同的。  
 $\rightarrow$ 是命题联结词， $A \rightarrow B$ 是一个命题公式；  
 $\Rightarrow$ 是**公式间关系符**， $A \Rightarrow B$ 不是一个命题公式，仅表示A，B间的蕴涵关系。



## 基本蕴涵（关系）式（蕴涵定律）

$$I_1: P \wedge Q \Rightarrow P, \quad P \wedge Q \Rightarrow Q \quad \text{简化法则}$$

$$I_2: \sim (P \rightarrow Q) \Rightarrow P, \quad \sim (P \rightarrow Q) \Rightarrow \sim Q$$

**解释：**利用 $P \rightarrow Q$ 的真值表， $P \rightarrow Q$ 不成立只有一种情况，前件即 $P$ 成立；同样， $P \rightarrow Q$ 不成立只有一种情况，后件即 $Q$ 不成立。

$$I_3: P \Rightarrow P \vee Q, \quad Q \Rightarrow P \vee Q$$

$$I_4: \sim P \Rightarrow P \rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow P \rightarrow Q$$

扩充法则

**解释：**类似 $I_1, I_2$ ，自己思考。



✓ I<sub>5</sub>:  $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$       假言推论

✓ I<sub>6</sub>:  $\sim Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \sim P$

拒取式 (否定式假言推论)

解释: 类似 I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>, 自己思考。

✓ I<sub>7</sub>:  $\sim P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$       析取三段论

✓ I<sub>8</sub>:  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$

假言三段论

解释: 假如我是川大的学生, 则我拥有川大的学籍; 假如我拥有川大的学籍, 则我有川大的学生证。所以, 假如我是川大的学生, 则我有川大的学生证。



## 基本蕴涵（关系）式（续）

$$\checkmark I_9: (P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$$

二难推论

解释：和假言推论联系起来思考

$I_{10}$ :

$$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S)$$

$$\checkmark I_{11}: (P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$$

等价三段论

$$\checkmark I_{12}: (P \vee Q) \wedge (\sim P \vee R) \Rightarrow Q \vee R$$

归结原理

$$[\text{解释}: (\sim P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \Rightarrow Q \vee R]$$



## 蕴涵关系的性质

■ ① 自反性  $A \Rightarrow A$

■ ② 反对称性:

如果  $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A,$

iff  $A \Leftrightarrow B$

■ ③  $A \Rightarrow B$  且  $A$  为永真式, 则  $B$  必为永真式



④传递性，如果 $A \Rightarrow B$ ， $B \Rightarrow C$ ，则 $A \Rightarrow C$

【证明】 由已知条件 $A \Rightarrow B$ ，且  $B \Rightarrow C$ ，  
根据**定理1.11**

$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$  是永真式；

再由假言三段论，应有

$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C$  ；

再根据性质3，  $A \rightarrow C$ 也必是永真式，

即 $A \Rightarrow C$  。 ■





- ⑤ 如  $A \Rightarrow B$ ,  $A \Rightarrow C$ , iff  $A \Rightarrow B \wedge C$

【证明】“ $\Rightarrow$ ” 由  $A \Rightarrow B$  且  $A \Rightarrow C$   
得到  $A \rightarrow B$  和  $A \rightarrow C$  都是永真式，于是

$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$  也是永真式；但是，

$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$

$\Leftrightarrow (\sim A \vee B) \wedge (\sim A \vee C)$

$\Leftrightarrow \sim A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow A \rightarrow (B \wedge C)$ ,

所以  $A \rightarrow (B \wedge C)$  是永真式，即  $A \Rightarrow B \wedge C$ 。



“ $\Leftarrow$ ”从证明过程看，性质5反过来也对，即由  
 $A \Rightarrow B \wedge C$ 可以得到 $A \Rightarrow B$  且  $A \Rightarrow C$  。

- ⑥ 如 $A \Rightarrow B, C \Rightarrow B$ , 则 $A \vee C \Rightarrow B$
- ⑦  $A \wedge B \Rightarrow C$  iff  $A \Rightarrow B \rightarrow C$

该性质是推理演绎中CP规则的基础

- ⑧  $A \Rightarrow B$  iff  $A \wedge \sim B$ 是矛盾式

该性质是反证法的基础



## 定理1.12

$$A \Rightarrow B \quad \text{iff} \quad \sim B \Rightarrow \sim A$$

该定理提供了逆向思维的基础



## 例1-6.1

考虑以下语句，并将其前提和结论符号化。

■ 1)、前提：

- 1. 如果明天天晴，我们准备外出旅游。  $P \rightarrow Q$
- 2. 明天的确天晴。  $P$

■ 结论：我们外出旅游。 總  $Q$

■ 上述例子可描述为：  $P \rightarrow Q, P \Rightarrow Q$  (假言推论)

■ 2)、前提：

- 1. 如果一个人是单身汉，则他不幸福。  $P \rightarrow Q$
- 2. 如果一个人不幸福，则他死得早。  $Q \rightarrow R$

■ 结论：单身汉死得早。  $P \rightarrow R$

■ 上述例子可描述为：

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$  (假言三段论)



## 例1-6.1(续1)

- 3)、某女子在某日晚归家途中被杀害，据多方调查确证，凶手必为王某或陈某，但后又查证，作案之晚王某在工厂值夜班，没有外出，根据上述案情可得前提如下：
  - 前提：
    - 1. 凶手为王某或陈某。  $P \vee Q$
    - 2. 如果王某是凶手，则他在作案当晚必外出。  $P \rightarrow R$
    - 3. 王某案发之晚并未外出。  $\sim R$
  - 结论：陈某是凶手。  $Q$
  - 则上述例子可描述为：
    - $P \rightarrow R, \sim R \Rightarrow \sim P$  (拒取式)
    - $P \vee Q, \sim P \Rightarrow Q$  (析取三段论)



## 例1-6.1(续2)

### 4)、前提:

- 1. 如果某同学为省二级以上运动员, 则他将被大学录取。  $P \rightarrow R$
- 2. 如果某同学高考总分在560分以上, 则将被大学录取。  $Q \rightarrow R$
- 3. 某同学高考总分在560分以上或者是省二级运动员。  $P \vee Q$

■ 结论: 该同学被大学录取。  $R$

■ 则上述例子可描述为:

- $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$  (二难推论)



## § 1. 7 命题逻辑的推理方法

命题演算的一个主要任务在于提供一种正确的思维规律，即**推理规则**，应用此规则从一些前提中推导出一个结论来，这种推导过程称为**演绎或形式证明**。

**定义1.19** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ 是公式, 如果

$$A_1, A_2, \dots, A_n \Rightarrow B$$

则称 $B$ 是  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的**逻辑结果**（**有效结论**）。

也可以说由 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 推出结论 $B$ 。



在更一般意义上，我们有下述定义

**定义1.20** 设G是由一组命题公式组成的集合，如果存在命题公式的有限序列：

$$A_1, A_2, \dots, A_n (=B)$$

其中， $A_i$  ( $i < n-1$ ) 或者是G中的某个公式，或者是前面的某些 $A_j$  ( $j < i$ ) 的有效结论，并且 $A_n$ 就是B，则称**公式B是G的逻辑结果（有效结论）**，或者称由G演绎出结论B来。





我们有下述结论：

公式 $B$ 是公式集合 $G = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 的  
逻辑结果当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ 为永  
真公式。



# 解释

1) 这里需要特别注意的是：**推理的有效性和结论的真实性是不同的**，**有效的推理不一定产生真实的结论**；而产生真实结论的推理过程未必是有效的，**因为有效的推理中可能包含为“假”的前提**，而无效的推理却可能包含为“真”的前提。



## 解释

2) 由此可见，推理的有效性是一回事，前提与结论的真实与否是另一回事。所谓推理有效，指的是它的结论是在它的前提下合乎逻辑的结果。也即，如果它的前提都为真，那么所得的结论也必然为真，而并不是要求前提或结论一定为真或为假，如果推理是有效的话，那么不可能它的前提都为真时，而它的结论为假。



# 推理规则

在数理逻辑中，主要的推理规则有：

- ① P规则（称为前提引用规则）：在推导的过程中，可随时引入前提集中的任意一个前提；
- ② T规则（逻辑结果引用规则）：在推导的过程中，利用基本等价式和蕴涵式，由证明过程中某些中间公式变换出新的公式，若依据的是等价式，规则标明为TE，若依据的是蕴涵式，规则标明为TI。



## 推理规则

③ C P 规则（附加前提规则）：如果能从给定的前提集合G与公式P推导出S，则能从此前提集合G推导出 $P \rightarrow S$ 。

$$\text{即 } G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow P \rightarrow S$$

当且仅当

$$G_1, G_2, \dots, G_n, P \Rightarrow S$$



## 1. 真值表法

根据前提 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 和结论 $B$ , 构造条件式 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ 的真值表, 若它为永真式, 则结论 $B$ 是有效的。

真值表法原则上可以解决推理的有效性  
问题, 但当出现在公式中的命题变元数目很大  
时, 此法显得不切实用, 且烦琐乏味, 对培养  
逻辑推理能力及训练推理技巧毫无帮助。



## 2、演绎法

演绎法是从前提（假设）出发，依据公认的推理规则，推导出一个结论来。

1) 直接法

2) 利用CP规则

## 3、间接证明法（反证法）



## 直接证明法

- 例1-7. 1 求证 $S \vee R$ 是前提 $\{P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S\}$ 的有效结论。(构造性二难推论)

证：步骤	公式	依据（注释）
①	$P \vee Q$	P
②	$\sim P \rightarrow Q$	T, ①, $E_1$ , $E_2$
③	$Q \rightarrow S$	P
④	$\sim P \rightarrow S$	T, ②, ③, $I_9$
⑤	$\sim S \rightarrow P$	T, ④, $E_{14}$ , $E_{23}$
⑥	$P \rightarrow R$	P
⑦	$\sim S \rightarrow R$	T, ⑤, ⑥, $I_9$
⑧	$S \vee R$	T, ⑦, $E_2$ , $E_1$

■ 故  $\{P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S\} \Rightarrow S \vee R$





## 利用CP规则

### ■ 例1-7. 2

证明 $R \rightarrow S$ 可以从前提

$\{P \rightarrow (Q \rightarrow S), \sim R \vee P, Q\}$ 推出

■ 证:	① $R$	$P$ (附加前提)
	② $\sim R \vee P$	$P$
	③ $P$	$T, \textcircled{1}, \textcircled{2}, I_8$
	④ $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$	$P$
	⑤ $Q \rightarrow S$	$T, \textcircled{3}, \textcircled{4}, I_5$
	⑥ $Q$	$P$
	⑦ $S$	$T, \textcircled{6}, \textcircled{5}, I_5$
	⑧ $R \rightarrow S$	$CP, \textcircled{1}, \textcircled{7}$



## 间接证明法（反证法）

- 根据蕴涵关系的性质8,

$$A \Rightarrow B \quad \text{iff} \quad A \wedge \sim B \text{是矛盾式}$$

将结论的否定加入到前提集中构成一组新的前提，然后证明这组新的前提集合是不相容的，即蕴涵一个矛盾式。

即，若

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \sim B \Rightarrow R \wedge \sim R$$

- 则

$$A_1, A_2, \dots, A_n \Rightarrow B$$



## 例1-7. 3

■ 证明:  $\{R \rightarrow \sim Q, R \vee S, S \rightarrow \sim Q, P \rightarrow Q\} \Rightarrow \sim P$

证: ①  $\sim (\sim P)$                     P (假设前提)  
② P                                    T, ①,  $E_1$   
③  $P \rightarrow Q$                         P  
④ Q                                    T, ②, ③,  $I_5$   
⑤  $S \rightarrow \sim Q$                         P  
⑥  $\sim S$                               T, ④, ⑤,  $I_{23}, E_1, I_5$   
⑦  $R \vee S$                             P  
⑧ R                                    T, ⑥, ⑦,  $I_7$   
⑨  $R \rightarrow \sim Q$                         P  
⑩  $\sim Q$                                 T, ⑧, ⑨,  $I_5$   
(11)  $Q \wedge \sim Q$                       F, ④, ⑩,  $E_{19}$   
 $\therefore \{R \rightarrow \sim Q, R \vee S, S \rightarrow \sim Q, P \rightarrow Q\} \Rightarrow \sim P$



## 例1-7. 4

把命题“如果小王不去，小张或小李就要去；如果小李去，小王就一定要去；此外，如果小林也去，小张就不愿去；因此，如果小王不去，小林也不会去”翻译成命题逻辑形式并证明命题是真的。

解： 令 P: 小王去； Q: 小张去；  
R: 小李去； S: 小林去；

则命题翻译成如下推理问题：

$$\sim P \rightarrow (Q \vee R), R \rightarrow P, S \rightarrow \sim Q \Rightarrow \sim P \rightarrow \sim S。$$



## 利用CP规则证明

证:	① $\sim P$	P (附加前提)
	② $\sim P \rightarrow (Q \vee R)$	P
	③ $Q \vee R$	T①, ②I <sub>5</sub>
	④ $\sim Q \rightarrow R$	T③E <sub>1</sub> , E <sub>2</sub>
	⑤ $R \rightarrow P$	P
	⑥ $\sim Q \rightarrow P$	T④, ⑤I <sub>9</sub>
	⑦ $S \rightarrow \sim Q$	P
	⑧ $S \rightarrow P$	T⑥, ⑦I <sub>9</sub>
	⑨ $\sim S$	T①, ⑧I <sub>9</sub> , E <sub>1</sub>
	⑩ $\sim P \rightarrow \sim S$	CP①, ⑨



# 基本要求

- 深刻理解蕴涵的定义和基本性质
- 牢记基本蕴涵式的名称及它们的内容
- 深刻理解三条推理规则
- 熟练掌握几种常用的推理方法
  - 1) 直接法
  - 2) 利用CP规则
  - 3) 间接证明法（反证法）



## 习题一

- 20 (2) (4) 、 21 (2) 、 22、 23 (1)