新疆农业大学
二〇一六年硕士研究生入学考试初试试题

考试科目代码：610 考试科目名称：大学数学2

注意：1.考试时间为3小时，满分为150分；
2.答案必须写在答题纸上，写在试题上无效。

一、填空题（每题5分，共30分）

1. 已知$f(x)$在x_0处可导，若$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(x_0-3h)-f(x_0)}=\dfrac{1}{6}$，则$f'(x_0)=$____①____.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{\sqrt{x}}=$____②____.

3. $y=y(x)$由$e^{x+y}+\cos(xy)=0$确定，则$\dfrac{dy}{dx}=$____③____.

4. 设$I=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$，交换积分次序可得$I=$____④____.

5. 已知$X=AX+B$，其中$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$，则矩阵$X=$____⑤____.

6. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1^n&a_2^n&a_3^n&\cdots&a_n^n\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，其中$a_i\neq a_j(i\neq j;i,j=1,2,\cdots n)$.则线性方程组$A^TX=B$的解是____⑥____.

二、单项选择题（每题5分，共30）

1. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上$f''(x)>0$，则$f'(0)$，$f'(1)$，$f(0)-f(1)$或$f(1)-f(0)$几个数的大小顺序为____①____.

(A) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(B) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

(C) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

2. 若$f(x)$的导函数是$\sin x$，则$f(x)$的一个原函数为____②____.

(A) $1+\sin x$　　(B) $1-\cos x$　　(C) $1-\sin x$　　(D) $1+\cos x$

3. 函数$f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k(k>0)$在$(0,+\infty)$的零点个数为____③____.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

4. 若$f'(\sin^2 x)=1-\sin^2 x$，则$f(x)=$____④____.

(A) $\sin x-\dfrac{1}{2}\sin^2 x+C$　　(B) $\cos x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$

(C) $\dfrac{1}{2}x^2-x+C$　　(D) $x-\dfrac{1}{2}x^2+C$

5. 微分方程$y''-2y'-3y=0$的通解为____⑤____.

(A) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$ (B) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$ (C) $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}$ (D) $y=(C_1+C_2x)e^{x}$

6. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处____⑥____.

(A)不连续，偏导数存在 (B)不连续，偏导数不存在 (C) 连续，偏导数存在 (D)连续，偏导数不存在

三、解答题（每题 8 分，40 分）

1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

2. 求定积分 $I=\int_0^{\pi}2x^2\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx$.

3. 已知函数 $y=\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$，试求其单调区间，极值点及曲线的凹凸性、拐点和渐近线.

4. 证明：（1）若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为奇函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$.

（2）若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^{a}f(x)dx$；

5. 证明 $D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b\end{vmatrix}=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$

四、解答下列各题（每题 10 分，共 50 分）

1. 设 $f(x)$ 是以 ω 为周期的连续函数，证明：线性方程 $y'+ky=f(x)$ 存在唯一的以 ω 为周期的特解，并求此特解，其中 k 是常数.

2. 设区域 D 是由直线 $y=x, y=-1$ 及 $x=1$ 围城的平面区域，求二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{3}{2}y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]d\sigma$ 的值.

3. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

4. 求向量组 $\vec{a}=(0,-1,1)$，$\vec{b}=(5,-2,0)$，$\vec{c}=(1,3,2)$，$\vec{d}=(1,2,1)$ 的秩及一个极大线性无关组，并用极大无关组表示其余向量.

5. 求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3-2x_4=0\\ 2x_1+5x_2-3x_3+x_4=0\\ 2x_1+4x_2-7x_3+x_4=0\end{cases}$ 的一个基础解系及通解.

（完）