

文章编号: 1000-4750(2017)07-0011-10

# 弹性 DEM 方法在杆系结构中的应用研究

齐 念, 叶继红

(东南大学混凝土及预应力混凝土结构教育部重点实验室, 南京 210018)

**摘 要:** 基于颗粒离散元方法(DEM), 结合杆系结构的特点, 提出了一种适于杆系结构问题分析的 DEM 模型。对颗粒元相应的质量和转动惯量计算公式进行了修正; 通过能量等效原理推导了杆系 DEM 模型分析时弹簧接触刚度系数表达式; 将瑞利阻尼引入到 DEM 方法之中, 给出了阻尼常数计算公式并用算例进行了验证。将该方法应用于杆系结构弹性分析, 包括静动力与几何非线性大变形问题的空间框架结构和网壳结构等多个算例, 计算结果与有限元方法结果吻合良好。DEM 方法的特点是将动力分析和几何非线性分析自动包含在运动方程的计算之中, 不用组集刚度矩阵, 无需迭代求解。杆系 DEM 模型非常适宜处理杆系结构大变形及动力非线性问题, 尤其是在结构进入强非线性之后的模拟分析。

**关键词:** 离散元; 杆系结构; 平行粘结模型; 弹性分析; 几何非线性

**中图分类号:** TU323 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2016.02.0116

## APPLICATION OF ELASTIC DISCRETE ELEMENT METHOD IN MEMBER STRUCTURES

QI Nian, YE Ji-hong

(Key Laboratory of Concrete and Prestressed Concrete Structures of the Ministry of Education, Southeast University, Nanjing 210018, China)

**Abstract:** Based on particle discrete element method (DEM), combined with the characteristics of member structures, a DEM model is proposed for member structures analysis. The calculated and modified formulas of the mass and the moment of inertia of the particle are presented and the spring contact stiffness expression for analysis of member structures was derived based on the principle of energy equivalence. Rayleigh damping was adopted to account for the effect of structural damping and the formula of damping constant was given and verified. According to its application in structural elastic analysis such as spatial frame under seismic action and single-layer reticulated shells subjected to impact loads, the calculation results agree well with the finite element method (FEM). The DEM takes dynamic and geometric nonlinear analysis under consideration automatically during solving the equations of motion without assembling stiffness matrixes and iterations during nonlinear analysis. Therefore, the presented DEM is reliable in dealing with large deformation and dynamic nonlinear problems, especially for the analysis of structures with strong nonlinearity.

**Key words:** discrete element method; member structure; parallel-bonded model; elastic analysis; geometrical nonlinearity

离散元方法(Discrete Element Method, DEM)最早由美国学者 Cundall 提出<sup>[1]</sup>, 与有限元方法的

理论基础不同, 它属于非连续介质数值方法, 目前已成为研究岩石、岩土及颗粒材料等非连续介质力

收稿日期: 2016-02-23; 修改日期: 2016-07-31

基金项目: 国家杰出青年科学基金项目(51125031)

通讯作者: 叶继红(1967—), 女, 广东梅县人, 教授, 博士, 博导, 从事大跨空间结构研究及轻钢研究(E-mail: yejihong@seu.edu.cn).

作者简介: 齐 念(1983—), 男, 湖北黄冈人, 博士生, 从事大跨空间结构抗震研究(E-mail: qi\_nian529@126.com).

学问题的有效方法<sup>[2-4]</sup>。该方法直接应用牛顿第二定律,元与元之间采用弹簧系统连接,接触力与接触位移之间的关系构成了 DEM 的接触本构模型。由于不要求满足位移连续和变形协调条件,因此能方便地应用于各类材料非连续、非均匀以及结构大变形和失效破坏等复杂过程及其机理的研究。

颗粒离散元因单元形状为圆盘或球体,接触判断及搜索机制简单,现已在诸多领域得到广泛应用,尤其是为研究材料的微观或细观机理提供了研究和分析手段。为了准确模拟岩石的力学行为并充分考虑其介质间的粘结强度, Potyondy 和 Cundall<sup>[5]</sup>提出了一种平行粘结接触模型(Parallel-bonded model),并通过颗粒流程序对岩石的细观行为进行研究,数值模拟结果表明该模型能够很好地描述岩石的断裂破坏过程; Obermayr 等<sup>[6]</sup>将该粘结模型进一步拓展,提出了一种用于模拟胶结砂的 DEM 模型,数值分析结果与室内三轴试验结果吻合良好。You<sup>[7]</sup>将颗粒 DEM 方法应用于沥青混合料,视集料为线弹性体、沥青砂胶为粘弹性体,对其模量、强度进行了 DEM 模拟,并将数值分析结果与低温劈裂试验结果相比较进行验证;钱振东等<sup>[8]</sup>基于 DEM 方法对环氧沥青混凝土的裂纹起裂与失稳扩展临界点问题进行了探讨,结果表明该方法可为研究沥青混凝土材料断裂行为提供一种良好的辅助手段。此外,周健教授课题组近些年应用颗粒离散元对桩土相互作用问题<sup>[9]</sup>、砂土管涌的形成机理<sup>[10]</sup>、砂土液化的细观力学机制<sup>[11]</sup>等开展了一系列数值模拟研究,与同期开展的室内模型试验结果对比发现两者具有良好的一致性;俞缙等<sup>[12]</sup>采用离散元颗粒流数值模型,从细观角度解释了围压效应下动态空隙率分布对渗透性演化特性的影响,这些成果为研究岩土力学的宏细观演化机制打下了基础。

但是,将传统散体离散元方法用于求解连续介质力学问题则比较少见,虽然一些学者尝试将其向连续介质方面扩展<sup>[13-14]</sup>,但是需要引入较多的假设和人为处理,在理论体系上并不严密,并且处理连续介质问题时计算精度也不如有限元法,这严重制约了离散元方法的广泛使用。另外,应用离散元法求解的一个核心问题是如何选取接触本构模型,它表征介质应力和应变的物理关系,反映了材料是连续或非连续的本质属性,目前这一问题也仍有待进一步研究。

将颗粒 DEM 方法应用于杆系结构的研究工作

较少。文献[15]基于颗粒离散元方法提出了杆系结构 DEM 模型,并将其初步用于结构几何非线性大变形分析,但限于求解静力问题,且是针对简单结构。在文献[15]基础上,本文提出了一种适于杆系结构的 DEM 模型,在理论上更加完善,功能方面更加强大。将该方法应用于杆系结构弹性分析,包括空间框架结构地震反应非线性分析及复杂网壳结构的动力非线性分析等多个算例,数值计算结果表明本文方法能有效处理结构的动力非线性、大变形行为。

## 1 杆系结构 DEM 基本方法的建立

颗粒离散元,以颗粒为基本研究对象,将物体离散为具有代表性的数个单元,利用颗粒流模型构建物体的力学性质,拟从细观力学的角度建模并研究物体的力学特征和运动响应。颗粒离散元的基本要素:颗粒、接触和粘结。其中,“接触”是描述单元间相互作用的接触力与相对位移的关系;“粘结”指允许相互接触的颗粒以一定的强度粘结在一起。本文采用平行粘结接触本构模型,该接触模型认为颗粒单元之间的连接发生在接触颗粒之间圆形的一定范围内,它既能传递接触点处的拉力或压力,还能传递力矩(弯矩、扭矩)。

### 1.1 杆系结构 DEM 模型描述

以图 1 所示的一空间框架结构为例,创建其 DEM 计算模型时,将梁柱构件分别离散为一串串球形颗粒。

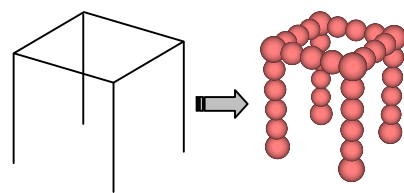


图 1 空间框架结构的 DEM 模型

Fig.1 DEM modeling of a space frame

1) 结构的空間位置和几何形状可采用若干个颗粒的空间坐标描述。颗粒数量越多,结构的形态描述就会与实际情况越接近,但相应地计算量也会增加。

2) 结构的全部质量由颗粒承担,可按长度进行比例分配。

3) 结构的内力和外力均是通过颗粒描述,其中,外力的处理方法分为以下两种:当构件受集中荷载作用时,在作用点处划分颗粒单元,使集中荷

载直接施加于颗粒形心处；当构件受均布荷载作用时，先将均布荷载转换为等效节点荷载(即等效节点力和等效节点弯矩)，而后按集中荷载进行处理。

4) 结构发生了运动和变形是颗粒发生广义运动(如平移、转动等)的结果，即因为颗粒位置的变化引起了结构的变形。

5) 结构的边界条件通过约束颗粒的运动实现。

6) 框架结构构件的内力分量中不仅包含轴力、剪力还会有弯矩和扭矩，因此采用平行粘接接触模型描述颗粒之间的力学行为。

由上述描述可知：颗粒 DEM 推广应用于杆系结构时，颗粒为基本元素，它是定义结构质量、受力、变形、边界条件和空间位置的载体。显然，与杆系结构有限元离散模型有着本质的区别。

### 1.2 运动方程的建立与求解

离散模型中所有单元(指颗粒，下同)的运动都遵循牛顿第二定律。对于空间结构而言，单元的运动变量可分解为沿坐标轴方向的三个线位移和绕三个坐标轴转动的角位移，分别对应坐标轴方向的三个力和三个力矩，见图 2。

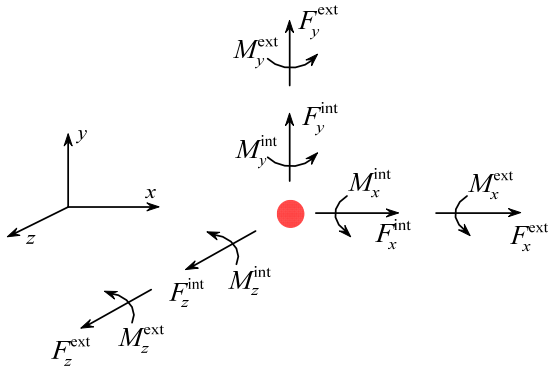


图 2 空间结构单元的运动与受力

Fig.2 The motion and loading state of particle

任取一个单元  $\alpha$ ，其运动控制方程可表述为(下标 1、2、3 分别对应图 2 中坐标轴  $x$ 、 $y$ 、 $z$ )：

$$\begin{bmatrix} M_\alpha & & \\ & M_\alpha & \\ & & M_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{\text{int}} \\ F_2^{\text{int}} \\ F_3^{\text{int}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1^{\text{ext}} \\ F_2^{\text{ext}} \\ F_3^{\text{ext}} \end{Bmatrix} \quad (1a)$$

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} \quad (1b)$$

式中： $M_\alpha$  为单元的质量，式(1b)中的  $3 \times 3$  方阵(记为  $I_\alpha$ )为单元的转动惯量，但一般为非对角阵； $x_i$  为单元的位矢； $\omega_i$  为单元的转动角速度； $F_i^{\text{int}}$ 、 $F_i^{\text{ext}}$

分别为单元所受的接触内力合力、合外力； $M_i$  为单元所受的合力矩(如  $M_i = M_x^{\text{int}} + M_x^{\text{ext}}$ )。

单元  $\alpha$  所受的接触力来源于与单元  $\alpha$  发生直接接触的颗粒。若有  $n$  个单元与单元  $\alpha$  相接触，则  $F^{\text{int}}$  可表示为：

$$F^{\text{int}} = \sum_{j=1}^n F^{j-\alpha} \quad (2)$$

式中， $F^{j-\alpha}$  为第  $j$  个单元对单元  $\alpha$  所产生的接触力。接触力矩的计算过程与此类似。

通过求解运动控制方程，可获得结构在外荷载作用下的位移。求解式(1)的方法很多，为了避免隐式算法所产生的迭代和收敛问题，DEM 方法常采用显式积分格式——中心差分法进行求解。需要指出的是，据式(1b)求解转角位移时，由于单元的转动惯量矩阵  $I_\alpha$  不为对角阵，导致不同坐标轴方向的转角存在耦合，因此求解时首先要对转动惯量矩阵进行求逆，然后可采用显式积分方法进行求解。

### 1.3 单元质量、转动惯量的计算与修正

在传统颗粒离散元中，单元质量和转动惯量计算公式为：

$$\begin{cases} M_\alpha = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \\ I_\alpha = \frac{2}{5} M_\alpha R^2 \end{cases} \quad (3)$$

式中： $\rho$  为材料的密度； $R$  为球元半径。

对非连续介质如散粒体材料进行 DEM 模拟时，由于每个单元的运动过程是独立的，所以用式(3)计算颗粒的质量和转动惯量。然而，就本文研究的杆系结构，上述公式是不适用的，因此需要对式(3)进行修正。

为不失一般性，取图 3 所示的一根空间梁构件为例，用  $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 、 $\hat{z}$  表示梁元的主轴坐标系，梁截面积为  $A$ 。假设对该梁进行 DEM 建模时共划分为 4 个单元，按顺序进行编号，球半径用  $R_i$  表示，如图 3 所示。

构件的等效质量按如下处理<sup>[16]</sup>：将两个相邻球元看作一根长度为  $L$  的杆件，然后将杆件的总质量按比例分配到这两个球元上。若已知构件的材料密度为  $\rho$ ，对于图 3 中的各单元，其质量计算结果如下：

$$\begin{cases} M_1 = \rho A R_1 \\ M_2 = 2 \rho A R_2 \\ M_3 = 2 \rho A R_3 \\ M_4 = \rho A R_4 \end{cases} \quad (4)$$

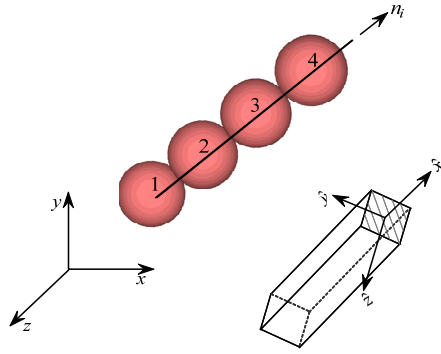


图3 接触局部坐标系与构件主轴坐标系

Fig.3 Local coordinate system and the principal axis system

同理，单元的转动惯量也是由杆件节点自身的转动惯量和与两单元相连的构件所提供的等效转动惯量两部分构成，但单元等效转动惯量  $I_\alpha$  的计算涉及到坐标变换，这是由于构件的纯变形和内力是基于局部坐标系求得，而计算单元的转角则是在整体坐标系中进行的。以图3中的单元1为例，在主轴坐标系中，已知截面对主轴  $\hat{y}$ 、 $\hat{z}$  的惯性矩为  $I_{\hat{y}}$  和  $I_{\hat{z}}$ ，则截面对主轴  $\hat{y}$  和  $\hat{z}$  的等效转动惯量可表示为：

$$\begin{cases} \hat{I}_y = M_1 \left( \sqrt{\frac{I_{\hat{y}}}{A}} \right)^2 \\ \hat{I}_z = M_1 \left( \sqrt{\frac{I_{\hat{z}}}{A}} \right)^2 \end{cases} \quad (5)$$

本文分析的结构构件均为等截面对称构件，截面对主轴  $\hat{x}$  的惯性矩为：

$$I_{\hat{x}} = I_{\hat{y}} + I_{\hat{z}} \quad (6)$$

从而可以得到截面对主轴  $\hat{x}$  的等效转动惯量：

$$\hat{I}_x = M_1 \left( \sqrt{\frac{I_{\hat{x}}}{A}} \right)^2$$

将  $\hat{I}_x$ 、 $\hat{I}_y$ 、 $\hat{I}_z$  写成对角矩阵形式，得到了主轴坐标系下单元的转动惯量矩阵：

$$\hat{\mathbf{I}}_\alpha = \begin{bmatrix} \hat{I}_x & & \\ & \hat{I}_y & \\ & & \hat{I}_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

然后，将局部坐标下单元主轴的转动惯量  $\hat{\mathbf{I}}_\alpha$  转换到总体坐标系下单元的转动惯量矩阵  $\mathbf{I}_\alpha$ ，可通过局部-总体坐标变换矩阵  $\lambda$  计算得到：

$$\mathbf{I}_\alpha = \lambda^T \hat{\mathbf{I}}_\alpha \lambda \quad (8)$$

需指出的是，式(8)中  $\lambda$  表示  $t$  时刻下相应的坐标变换矩阵，而实际上结构因为大变形从而导致杆

件的三个主轴与总体坐标轴的夹角发生改变，因此在计算时需要进行动态跟踪并不断的更新  $\lambda$ 。

## 2 接触本构模型的建立

### 2.1 接触本构方程

与有限元方法中的应力-应变本构方程类似，将接触处的力-位移关系称之为接触本构方程。图4为直角坐标系中2个相邻球元A和球元B间的平行粘结接触模型，C点为接触中心， $\mathbf{n}$ 为通过两个球心的法向单位矢量。

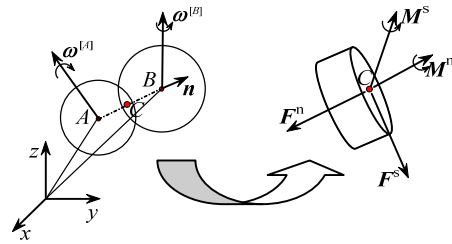


图4 相邻球元之间的接触模型

Fig.4 Contact model for elements bonded with neighbor

当相邻球元A与B发生相互接触后，会在接触点C处产生接触力  $\mathbf{F}$  和接触力矩  $\mathbf{M}$ 。力  $\mathbf{F}$  可分解为垂直于接触面的法向分量  $\mathbf{F}^n$  和平行于接触面的切向分量  $\mathbf{F}^s$ ，力矩  $\mathbf{M}$  分解为垂直于接触面的法向分量  $\mathbf{M}^n$  和平行于接触面的切向分量  $\mathbf{M}^s$ ：

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \mathbf{F}^n + \mathbf{F}^s \\ \mathbf{M} = \mathbf{M}^n + \mathbf{M}^s \end{cases} \quad (9)$$

式(9)写成坐标分量形式为：

$$\begin{cases} F_i = F_i^n + F_i^s \\ M_i = M_i^n + M_i^s \end{cases}, \quad i = x, y, z \quad (10)$$

离散元法采用增量形式计算接触力和接触力矩。在一个时步  $\Delta t$  内，由位移增量所引起的接触力增量为：

$$\begin{cases} \Delta F_i^n = -K^n \Delta U^n \cdot n_i \\ \Delta F_i^s = -K^s \Delta U_i^s \end{cases} \quad (11)$$

式中： $K^n$ 、 $K^s$ 分别为弹簧法向刚度和切向刚度系数； $n_i$ 为通过两球心的法向单位矢量分量； $\Delta U^n$ 、 $\Delta U_i^s$ 分别为法向位移增量和相对切向位移增量。

接触力矩计算过程与接触力的计算类似。在时步  $\Delta t$  内，由球元A与球元B之间的相对转角增量  $\Delta \theta$  所引起的接触力矩增量为：

$$\begin{cases} \Delta M_i^n = -k^n \Delta \theta^n \cdot n_i \\ \Delta M_i^s = -k^s \Delta \theta_i^s \end{cases} \quad (12)$$



$$\Delta\theta_i = (\omega_i^{[B]} - \omega_i^{[A]})\Delta t \quad (13)$$

式中： $k^n$ 、 $k^s$ 分别为弹簧法向扭转刚度和切向转动刚度系数； $\omega_i^{[A]}$ 、 $\omega_i^{[B]}$ 分别为球元  $A$  和球元  $B$  的转动角速度。

### 2.2 弹簧接触刚度系数的推导与确定

本文基于简单梁理论，通过应变能等效推导弹簧接触刚度系数的具体表达式。将单元  $A$  与单元  $B$  等效成一根弹性梁，梁的长度  $L$  即为单元  $A$  与单元  $B$  形心之间的距离，如图 5 所示。为了描述两单元之间的变形及受力行为，现通过设置独立的弹簧进行等效，如法向弹簧仅描述两单元单向受拉(或受压)，而转动弹簧则用来描述两单元发生相对转动所引起的纯弯曲行为等。

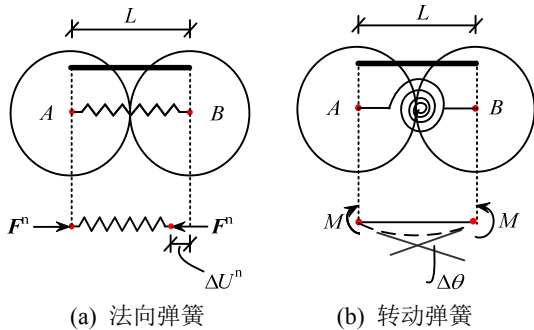


图 5 确定弹簧接触刚度系数的等效模型

Fig.5 The equivalent model of spring contact stiffness coefficient

设时步  $\Delta t$  内单元  $A$  与单元  $B$  因受到压力发生了接触位移，即弹簧产生了压缩量  $\Delta U^n$  (图 5(a))，则弹簧的变形能为：

$$J_{\text{spring}}^n = \frac{1}{2} K^n (\Delta U^n)^2 \quad (14)$$

两节点弹性梁单元发生单向受压所产生的应变能可表示为：

$$J_{\text{beam}}^n = \int_0^L \frac{1}{2} E \varepsilon^2 A dx = \int_0^L \frac{1}{2} E \left( \frac{\Delta U^n}{L} \right)^2 A dx = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} (\Delta U^n)^2 \quad (15)$$

式中： $E$  为构件的弹性模量； $A$  为截面面积； $\varepsilon$  为梁元的轴向应变。

因为  $J_{\text{spring}}^n = J_{\text{beam}}^n$ ，从而可以直接得到弹簧法向接触刚度系数：

$$K^n = \frac{EA}{L} \quad (16)$$

转动弹簧刚度系数的推导过程与上述类似。两单元发生相对转动时，转角  $\Delta\theta$  所引起的弹簧变形

能为：

$$J_{\text{spring}}^\theta = \frac{1}{2} K^\theta (\Delta\theta)^2 \quad (17)$$

由于发生了相对转角，弹性梁的轴线会发生弯曲(图 5(b))，梁长应大于  $L$ 。但是，对于一个  $\Delta t$  时步而言， $\Delta\theta$  的值很小，因此仍可将梁的长度近似等于  $L$ 。 $\Delta\theta$  所引起的梁弯曲曲率为：

$$\kappa = \frac{\Delta\theta}{L} \quad (18)$$

弹性梁发生纯弯曲所产生的应变能可表示为：

$$J_{\text{beam}}^\theta = \int_0^L \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left( \frac{\Delta\theta}{L} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{EI}{L} (\Delta\theta)^2 \quad (19)$$

因为  $J_{\text{spring}}^\theta = J_{\text{beam}}^\theta$ ，从而可以得到弹簧转动接触刚度系数：

$$k^n = \frac{EI}{L} \quad (20)$$

弹簧纯剪力作用下切向、弯矩和剪力共同作用下切向以及扭转接触刚度系数也可按上述能量等效原理得到，其表达式分别为：

$$K^{s_0} = \frac{GA}{\alpha L} \quad (21)$$

$$K^s = \frac{12EI}{(1+b)L^3} \quad (22a)$$

$$k^s = \frac{GJ_x}{L} \quad (22b)$$

式中： $E$ 、 $G$  分别为结构构件的弹性模量和剪切模量； $A$ 、 $I$ 、 $J_x$  分别为结构构件的截面积、截面惯性矩和扭转惯性矩； $\alpha$  为截面剪切校正因子； $b$  为剪切变形影响系数，其值为  $12EI\alpha / GA L^2$ 。

## 3 结构动力非线性分析

### 3.1 瑞利阻尼的应用

DEM 方法通常采用求解动力方程的方法解决两类力学问题：准静力问题和动力分析。在这两类问题中都要使用阻尼，但准静力问题需要更多的阻尼以使得动力方程能够加速收敛，文献[15]对准静力问题阻尼力的计算及阻尼系数的选取已有论述。对于动力问题，选取的阻尼应能重现自然系统在动荷载作用下的真实反应。在结构有限元分析中常采用瑞利阻尼，本文尝试将其应用于杆系结构 DEM 模型中。

瑞利阻尼计算时，是假设动力方程中的阻尼矩

阵  $\mathbf{C}$  与质量矩阵  $\mathbf{M}$  和刚度矩阵  $\mathbf{K}$  有关:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (23)$$

式中:  $\alpha$  为质量比例阻尼常数;  $\beta$  为刚度比例阻尼常数。

对于多自由度体系, 阻尼比  $\xi$  与圆频率  $\omega$  之间的关系为:

$$\xi = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega} + \beta \omega \right) \quad (24)$$

阻尼常数  $\alpha$  和  $\beta$  的选取及计算方法目前仍未有一个统一的表述, 本文采用文献[17]中提到的方法 1: 即假定瑞利阻尼中质量阻尼和刚度阻尼对结构阻尼贡献相等, 这样在每一个单元中  $\alpha$  和  $\beta$  可以表示为:

$$\begin{cases} \alpha = \xi_0 \omega_0 \\ \beta = \xi_0 / \omega_0 \end{cases} \quad (25)$$

式中,  $\xi_0$ 、 $\omega_0$  分别为给定的阻尼比和圆频率, 一般可通过试验测定或由结构模态分析计算确定。对于结构系统而言:  $\xi_0$  的范围一般在 2%~10%,  $\omega_0$  可取为结构的基频。

瑞利阻尼是将阻尼力简化为一种线性粘滞阻尼形式, 其阻尼力大小与速度成正比。当确定了阻尼常数  $\alpha$  和  $\beta$  后, 阻尼力  $F_d$  按如下方法进行计算:

对于质量阻尼项  $F_d^M$ :

$$F_d^M = -\alpha \mathbf{M} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (26)$$

对于刚度阻尼项所产生的阻尼力  $F_d^K$ , 其原理是在接触的两单元之间分别施加法向和切向阻尼器并与接触弹簧进行并联。  $F_d^K$  的计算与弹簧接触力的计算相似, 其中法向阻尼力分量为:

$${}^n F_d^K = -\beta \mathbf{K} \cdot V^n \quad (27)$$

切向阻尼力分量为:

$${}^s F_d^K = -\beta \mathbf{K} \cdot V^s \quad (28)$$

式中,  $V^n$ 、 $V^s$  分别为接触中心处的相对法向、切向速度, 按下式进行计算:

$$\begin{cases} V_i = (\dot{r}_i^{[B]} + e_{ijk} \omega_j^{[B]} (r_k^{[C]} - r_k^{[B]})) - \\ \quad (\dot{r}_i^{[A]} + e_{ijk} \omega_j^{[A]} (r_k^{[C]} - r_k^{[A]})) \\ V^n = V_i n_i \\ V^s = V - V^n \end{cases} \quad (29)$$

式中,  $e_{ijk}$  为数学置换符号。

### 3.2 计算求解流程

用有限元法求解大位移、大转动等几何非线性问题时, 通常要通过对单元切线刚度矩阵进行修

正, 采用增量迭代法获得结构的响应。而 DEM 法求解此类问题时, 并不需要对问题进行刻意区分是小变形还是大变形, 因为在建立运动控制方程时并不涉及到几何方程, 也不要求位移连续, 同时也无需组集刚度矩阵和迭代求解, 这与有限元法有着本质的区别。因此, DEM 法用于结构分析时, 可以采用统一的步骤分析结构的小变形和大变形问题, 其计算流程图见图 6。

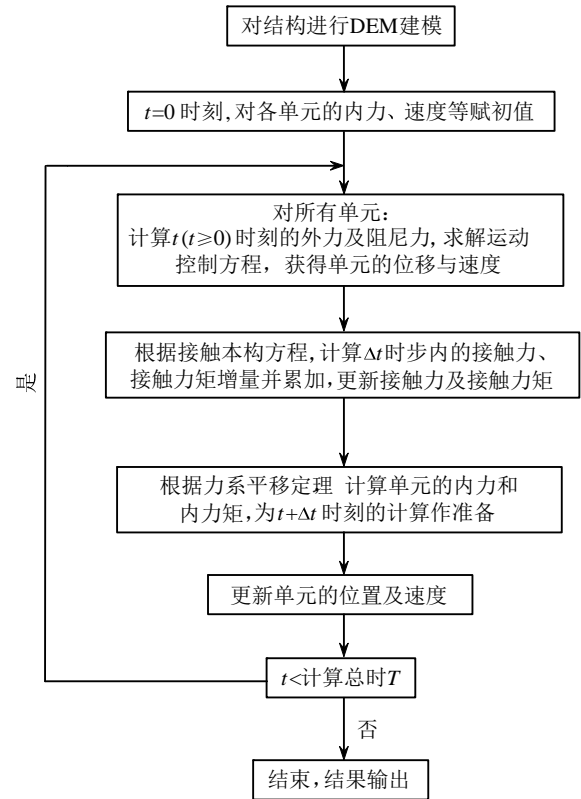


图 6 DEM 法计算流程图

Fig.6 Calculation flow chart of DEM

## 4 数值算例与验证

根据杆系 DEM 方法的基本原理和计算流程, 用 Fortran 语言编写了相应的计算分析程序, 并应用于求解杆系结构弹性问题。下面通过对 3 个算例进行模拟和分析, 验证本文方法的正确性和适用性。

### 4.1 45°空间曲梁弯扭大位移分析

空间悬臂曲梁如图 7 所示, 位于  $x$ - $y$  平面内, 曲梁所对的圆心角为 45°, 圆的半径  $R = 100$  cm, 梁截面尺寸为 1 cm×1 cm, 材料弹性模量  $E = 1.0 \times 10^7$  N/cm<sup>2</sup>, 剪切模量  $G = 5.0 \times 10^6$  N/cm<sup>2</sup>, 材料密度为  $2.54 \times 10^{-2}$  kg/cm<sup>3</sup>。垂直于  $x$ - $y$  平面在梁自由端作用一个集中荷载  $P$ , 梁因此发生空间弯扭大变形。

离散元建模时, 根据文献[18]确定单个构件划分颗粒的数量, 将该梁离散成 11 个球元。计算时间步长  $\Delta t=2.0 \times 10^{-4} \text{ s}$ 。

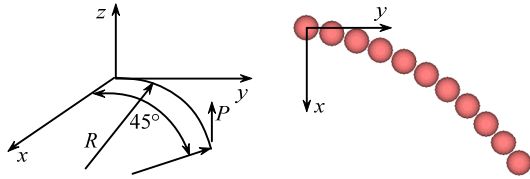


图 7 45°弯梁大位移分析

Fig.7 Large deformation of 45°bending beam

对结构进行静力分析, 采用缓慢加载方式。表 1 为用 DEM 法计算得到的不同荷载下梁自由端的  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向位置坐标。从表中可知, 随着荷载的增大, 曲梁发生了显著的大位移; 将分析结果与文献[19]非线性有限元方法进行对比, 两者最大误差不超过 0.9%。

表 1 不同荷载作用下梁自由端的位置坐标 /cm

Table 1 The coordinates of the tip at beam under different loads

荷载 $P/\text{N}$	文献解 <sup>[19]</sup>			本文 DEM 解			误差/ (%)
	$x$	$y$	$z$	$x$	$y$	$z$	
0	29.29	70.71	0	29.29	70.71	0	—
300	22.10	58.73	40.28	22.31	59.00	39.90	-0.9
450	18.42	52.17	48.54	18.57	52.24	48.47	-0.6
600	15.64	47.07	53.47	15.76	47.16	53.43	-0.4

注: 误差=(文献解-DEM 解)/文献解 $\times 100\%$ , 取  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三者误差最大值。

取集中力  $P=300 \text{ N}$ , 以阶跃荷载形式作用于梁自由端, 作用时间 0.3 s, 不考虑阻尼, 对该空间悬臂曲梁的动力大变形行为进行模拟。将分析结果与文献[19]计算结果进行对比, 如图 8 所示, 两者吻合很好。

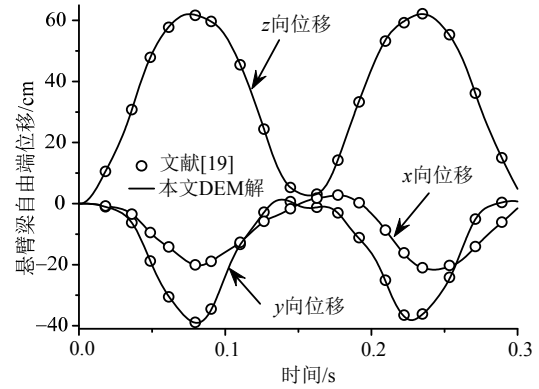


图 8  $P=300 \text{ N}$  作用下曲梁自由端的动力响应

Fig.8 Dynamic response of the tip at beam with  $P=300 \text{ N}$

#### 4.2 地震作用下某空间框架非线性动力分析

以某 6 层空间框架结构作为研究对象, 如图 9 所示。该框架层高为 4 m, 框架柱和梁截面均为矩形截面, 尺寸为  $0.3 \text{ m} \times 0.3 \text{ m}$ , 弹性模量  $E=40 \text{ GPa}$ , 泊松比取为 0.2, 材料密度取为  $2500 \text{ kg/m}^3$ , 不考虑结构进入塑性。在结构基底沿水平  $x$  向输入 El-centrol 地震波, 为减少计算时间取持时 12 s, 为模拟结构大变形将加速度峰值调至  $1.5 g$ 。

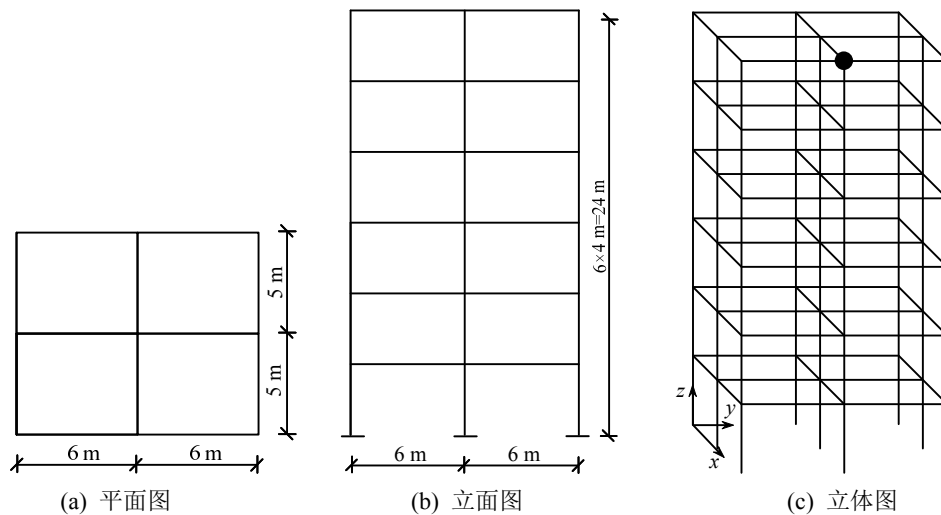


图 9 空间框架结构

Fig.9 Spatial frame structure

通过模态分析得到该结构的前三阶频率分别为 1.0385 Hz、1.0903 Hz、1.2606 Hz。取  $\xi_0=5\%$ ,  $\omega_0=2\pi \times 1.0385=6.525 \text{ rad/s}$ , 根据式(25)求得阻尼常数  $\alpha=0.32625$ ,  $\beta=7.663 \times 10^{-3}$ 。应用杆系

DEM 模型对该框架结构进行非线性动力反应时程分析, 同时用 ANSYS 软件进行了非线性有限元分析, 在 ANSYS 中也采用瑞利阻尼, 阻尼常数  $\alpha$ 、 $\beta$  的取值与 DEM 模型保持一致。以图 9(c)中的实心

圆圈位置作为记录点, 图 10 为记录点处的水平  $x$  向位移时程曲线, 水平位移最大达到了 0.435 m, 表明结构进入了几何非线性大变形阶段。从图 10 可以看出, 本文方法的计算结果与 ANSYS 软件得到的结果在波形和幅值方面都极为吻合。该算例说明杆系 DEM 模型是有效可行的, 同时也验证了本文计算阻尼力时确定瑞利阻尼常数的方法是合理的。

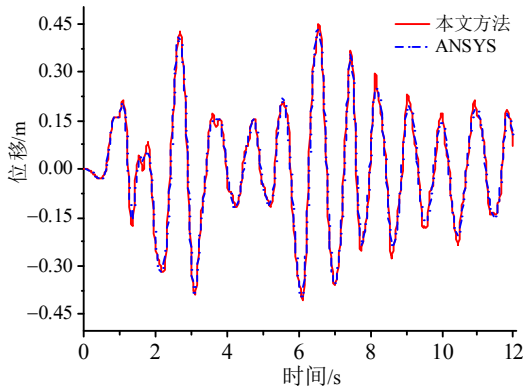


图 10 记录点处的水平  $x$  向位移时程曲线

Fig.10 Horizontal  $x$ -direction displacement-time curve at the record point

另外, 表 2 比较了计算规模和运行效率, 计算硬件为个人电脑(3.01 GHz 双核 CPU, 2 GB RAM, Windows XP 操作系统)。有限元方法划分的单元数量比杆系 DEM 模型的数量少, 并采用隐式积分算法, 积分步长大于 DEM 方法, 但从整体计算消耗 CPU 的时间来看, 有限元法却处于劣势。

表 2 DEM 方法与有限元法计算效率对比

Table 2 Computational efficiency comparison of DEM method and FEM method

方法	单元数量	积分步长/s	CPU 耗时/s
ANSYS	126	0.02	172.1
DEM 方法	549	$10^{-4}$	74.6

#### 4.3 单层球壳受冲击荷载作用下的瞬态动力非线性分析

为了测试并验证本文开发的 DEM 计算程序在大规模复杂结构中的适用性, 选取 K6 型单层球面网壳结构作为计算对象。网壳跨度为 30 m, 矢跨比取为 1/2, 支承条件为周边固定铰支座, 结构几何模型如图 11 所示。杆件采用 Q235 圆钢管, 各杆几何物理参数均相同: 外径  $\phi=130$  mm, 壁厚  $\delta=5$  mm, 弹性模量  $E=195$  GPa, 泊松比  $\nu=0.25$ , 材料密度为  $7800$  kg/m<sup>3</sup>。ANSYS 有限元分析时采用 Mass21 单元模拟集中在节点上的重力荷载代表值。重力荷载代表值为  $1500$  N/m<sup>2</sup>。网壳结构共有 169 个节点,

杆件 462 根, ANSYS 分析时将每根杆件划分为 3 个 Beam4 单元。建立 DEM 计算模型时根据文献[18]确定单个构件划分的颗粒数量, 将圆球半径取为 215 mm~220 mm 不等, 共有球元 3355 个, 球元接触粘结数量为 3648。

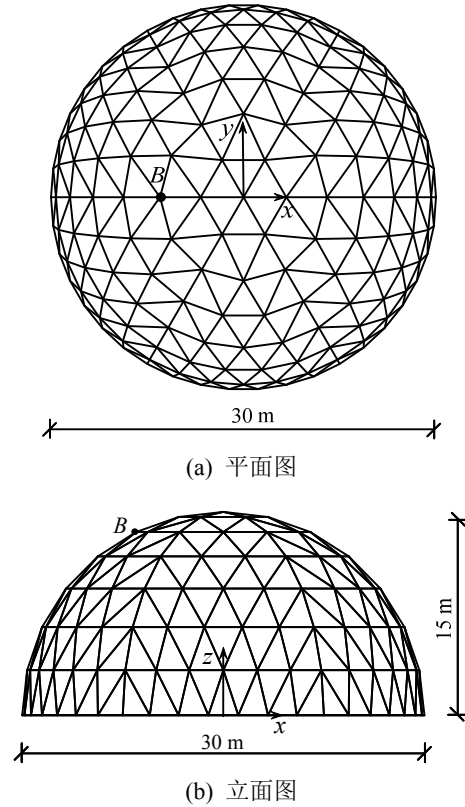


图 11 30 m 跨单层球面网壳结构

Fig.11 30 m-span single-layer reticulated shell

对该结构进行静力小变形分析。在网壳顶点作用竖向集中力  $P$ , 从表 3 可知, 本文方法与有限元法的分析结果很吻合, 最大误差不超过 0.2%。

表 3 网壳顶点荷载-竖向位移结果

Table 3 Load-displacement results of the top point of the shell

$P/\text{kN}$	位移/mm		
	ANSYS 解	DEM 解	误差/(%)
6	0.975	0.976	0.1
10	1.629	1.631	0.1
15	2.451	2.457	0.2
20	3.277	3.282	0.2
30	4.943	4.953	0.2

假设有一重物瞬间击落在网壳的节点  $B$  处(见图 11), 将其简化为一冲击集中力, 其作用函数可转换成如下式所示:

$$P(t) = \begin{cases} P_0 \times \frac{t}{0.02}, & t \leq 0.02 \\ P_0, & 0.02 < t < 0.1 \end{cases} \quad (30)$$



对网壳结构进行动力非线性时程分析, 时间步长取为  $2 \times 10^{-5}$  s, 阻尼比取 2%。图 12 为不同冲击力幅值  $P_0$  作用下节点  $B$  处  $z$  向位移时程曲线, 可以发现,  $P_0$  值增大,  $B$  点的  $z$  向位移也随着增加, 但 3 条曲线的变化规律是一致的。当  $P_0$  取为 6000 kN 时由于网壳在该冲击力作用下局部区域发生了过大的变形, ANSYS 分析过程中在  $t=0.0557$  s 时出现计算结果不收敛而停止, 而 DEM 方法可以继续完成计算, 这充分说明本文数值方法在处理大变形问题尤其是在结构进入强非线性阶段后更具计算能力和算法稳定性优势。

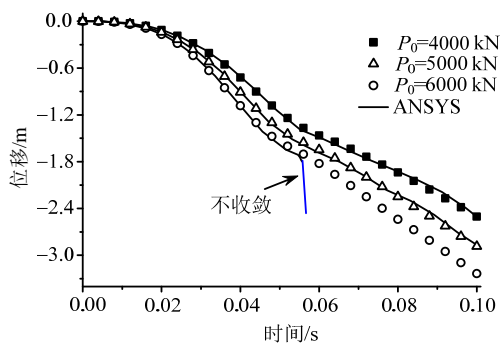


图 12 网壳节点  $B$  处  $z$  向位移时程曲线

Fig.12  $z$ -direction displacement-time curve of the node  $B$

图 13 为网壳结构在冲击力 ( $P_0=5000$  kN) 下的构形变化过程。可以看出, 由于  $B$  处突然受到一个

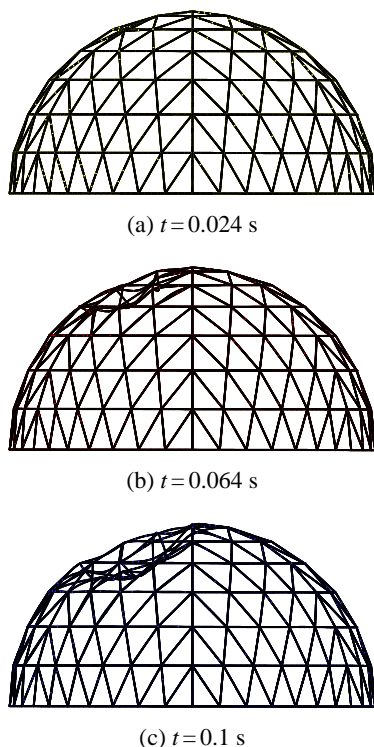


图 13 网壳结构构形变化过程

Fig.13 Configuration change process of reticulated dome

较大的冲击荷载, 网壳局部区域逐渐发生塌陷, 随着作用时间的延续, 变形越加明显, 与实际情况吻合。

## 5 结论

(1) 本文将离散元这种非连续数值计算方法拓展至连续性的空间杆系结构。基于颗粒 DEM 方法, 结合杆系结构特点, 提出了一种适于杆系结构分析的 DEM 模型。对颗粒元的质量和转动惯量计算公式进行了修正; 通过能量等效原理推导了杆系 DEM 模型弹簧接触刚度系数表达式; 为了考虑动力阻尼问题, 将结构分析中常用的瑞利阻尼引入 DEM 模型, 并给出了阻尼常数计算公式。

(2) 基于杆系 DEM 模型, 对杆系结构弹性问题, 包括静动力、大位移大转动等几何非线性行为进行模拟与分析。将该方法应用于空间框架结构地震反应分析和复杂网壳结构受冲击荷载作用的模拟, 与有限元方法计算结果进行比较, 两者吻合良好, 数值结果表明本文方法能有效处理结构的非线性行为。DEM 法是将动力分析和几何非线性分析自动包含在运动方程的求解之中, 是一个自然的过程。同时, 该方法不要求位移连续, 同时亦无需组集刚度矩阵和迭代求解, 因此杆系 DEM 模型非常适宜于处理杆系结构大变形及动力非线性问题, 尤其是在结构进入强非线性之后的模拟分析。

### 参考文献:

- [1] Cundall P A, Strack O D L. A discrete numerical model for granular assemblies [J]. Geotechnique, 1979, 29(1): 47-65.
- [2] 邢纪波, 王泳嘉. 离散单元法的改进及其在颗粒介质研究中的应用[J]. 岩土工程学报, 1990, 12(5): 51-57. Xing Jibo, Wang Yongjia. Improvement of discrete element method and its applications in Granular Media [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1990, 12(5): 51-57. (in Chinese)
- [3] 刘凯欣, 高凌天. 离散元法研究的评述[J]. 力学进展, 2003, 33(4): 483-490. Liu Kaixin, Gao Lingtian. A review on the discrete element method [J]. Advances in Mechanics, 2003, 33(4): 489-490. (in Chinese)
- [4] Sierra V B, Scholtes L, Donze F V, et al. DEM analysis of rock bridges and the contribution to rock slope stability in the case of translational sliding failures [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2015, 80: 67-78.
- [5] Potyondy D O, Cundall P A. A bonded-particle model for

- rock [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2004, 41(8): 1329—1364.
- [6] Obermayr M, Dressler K, Vrettos C, et al. A bonded-particle model for cemented sand [J]. *Computers and Geotechnics*, 2013, 49: 299—313.
- [7] You Z P. Development of a micromechanical modeling approach to predict asphalt mixture stiffness using the discrete element method [D]. Urbana and Champaign: University of Illinois at Urbana-Champaign, 2003: 45—56.
- [8] 钱振东, 王江洋. 环氧沥青混凝土裂纹起裂与失稳扩展的临界特征[J]. *工程力学*, 2015, 32(1): 96—103.  
Qian Zhendong, Wang Jiangyang. Critical characterization of crack initiation and unstable propagation for epoxy asphalt concrete [J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(1): 96—103. (in Chinese)
- [9] 周健, 元宾, 曾庆有. 被动侧向受荷桩模型试验及颗粒流数值模拟研究[J]. *岩土工程学报*, 2007, 29(10): 1449—1454.  
Zhou Jian, Qi Bin, Zeng Qingyou. Model tests and PFC<sup>2D</sup> numerical analysis on laterally loaded passive piles [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2007, 29(10): 1449—1454. (in Chinese)
- [10] 周健, 周凯敏, 姚志雄. 砂土管涌-滤层防治的离散元数值模拟[J]. *水利学报*, 2010, 41(1): 17—24.  
Zhou Jian, Zhou Kaimin, Yao Zhixiong. Numerical simulation of piping-filter prevention in sandy soil by discrete element method [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2010, 41(1): 17—24. (in Chinese)
- [11] 周健, 杨永香, 刘洋. 循环荷载下砂土液化特性颗粒流数值模拟[J]. *岩土力学*, 2009, 30(4): 1083—1090.  
Zhou Jian, Yan Yongxiang, Liu Yang. Numerical modeling of sand liquefaction behavior under cyclic loading [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, 30(4): 1083—1090. (in Chinese)
- [12] 俞缙, 穆康, 李宏, 等. 砂岩渗透性演化特性的孔隙率分布细观模拟分析[J]. *工程力学*, 2014, 31(11): 124—131.  
Yu Jin, Mu Kang, Li Hong, et al. The porosity distribution microscopic simulation analysis of the permeability evolution property of sandstone [J]. *Engineering Mechanics*, 2014, 31(11): 124—131. (in Chinese)
- [13] Tang Zhiping. Three-dimensional DEM theory and its application to impact mechanics [J]. *Science in China (Series E)*, 2001, 44(6): 561—571. (in Chinese)
- [14] Liu K, Liu W. Application of discrete element method for continuum dynamic problems [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2006, 76(3): 229—243.
- [15] 齐念, 叶继红. 基于离散元法的杆系结构几何非线性大变形分析[J]. *东南大学学报(自然科学版)*, 2013, 43(5): 917—922.  
Qi Nian, Ye Jihong. Geometric nonlinear analysis with large deformation of member structures by discrete element method [J]. *Journal of Southeast University (Natural Science Edition)*, 2013, 43(5): 917—922. (in Chinese)
- [16] 丁承先, 段元锋, 吴东岳. 向量式结构力学[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 252—254.  
Ding Chengxian, Duan Yuanfeng, Wu Dongyue. *Vector mechanics of structures* [M]. Beijing: Science Press, 2012: 252—254. (in Chinese)
- [17] 邹德高, 徐斌, 孔宪京. 瑞利阻尼系数确定方法对高土石坝地震反应的影响研究[J]. *岩土力学*, 2011, 32(3): 797—803.  
Zou Degao, Xu Bin, Kong Xianjing. Study of influence of different methods for calculating Rayleigh damping coefficient on high earth-rock dam seismic response [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2011, 32(3): 793—803. (in Chinese)
- [18] 齐念. DEM/FEM 耦合计算方法研究及其在网壳倒塌破坏模拟中的应用[D]. 南京: 东南大学, 2015.  
Qi Nian. Combined DEM/FEM method and its application in collapse simulation of reticulation shells [D]. Nanjing: Southeast University, 2015. (in Chinese)
- [19] Chan S L. Large deflection dynamic analysis of space frame [J]. *Computer and Structures*, 1996, 58(2): 381—387.