

DOI: 10.7652/xjtuxb201708009

# 多输入多输出单载波频分多址系统的鲁棒波束赋形算法

赵龙海, 沙学军

(哈尔滨工业大学电子与信息工程学院, 150080, 哈尔滨)

**摘要:** 针对多输入多输出(MIMO)单载波频分多址(SC-FDMA)系统中现有波束赋形算法在非理想信道状态信息下性能下降以及对信道信息误差敏感的问题,提出了一种鲁棒波束赋形算法。该算法利用谱范数对信道状态信息误差进行建模,并基于均方误差和准则将波束赋形优化问题建模为一个极小极大化问题,然后利用优越理论以及奇异值不等式理论证明该优化问题的鞍点特性并得出最优的波束赋形结构,最后利用凸优化得到最优的功率分配算法。仿真结果表明:与非鲁棒波束赋形和等功率分配算法相比,该鲁棒波束赋形算法在误码率以及频谱效率方面都能获得更好的性能,信道状态信息误差增大时,该鲁棒波束赋形算法与非鲁棒波束赋形算法相比在高信噪比时误码率性能约有1 dB增益,频谱效率约提升6%。

**关键词:** 波束赋形;多输入多输出;单载波频分多址;非理想信道状态信息

**中图分类号:** TN914 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)08-0053-06

## A Robust Beamforming Algorithm for Multiple Access Systems with Multiple-Input Multiple-Output and Single-Carrier Frequency Division

ZHAO Longhai, SHA Xuejun

(School of Electronics and Information Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China)

**Abstract:** A robust beamforming algorithm for multiple access systems with multiple-input multiple-output (MIMO) and single carrier frequency division (SC-FDMA) is proposed to solve the problems of performance degradation and sensitivity to channel state information (CSI) errors of conventional beamforming algorithms under scenarios of imperfect CSI. The algorithm establishes a model for the imperfect CSI by using a spectral norm, and the beamforming optimization is formulated as a min-max problem based on the criterion of sum of mean-squared errors. Then, the saddle point property of the min-max problem is established and the optimal beamforming structure is obtained by using majorization theory and singular value inequalities. An optimal power allocation algorithm is derived by employing convex optimization. Simulation results and comparisons with the non-robust beamforming and equal power allocation algorithms show that the proposed algorithm has better performance in bit error rate (BER) and spectral efficiency. When the CSI errors increase, a comparison with the non-robust beamforming algorithm in the high SNR regime show that the proposed algorithm obtains 1 dB gain in bit error rate, and the spectral efficiency improves by about 6%.

**Keywords:** beamforming; multiple-input and multiple-output; single-carrier frequency division multiple access; imperfect channel state information

收稿日期: 2016-12-30。 作者简介: 赵龙海(1987—),男,博士生;沙学军(通信作者),男,教授,博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61671179);国家“973计划”资助项目(2013CB329003)。

网络出版时间: 2017-05-15

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20170515.1825.004.html>

多输入多输出(MIMO)单载波频分多址(SC-FDMA)系统由于其具有较低的峰均功率比、载波频移敏感度以及均衡复杂度,成为了无线宽带通信系统的重要多址技术之一<sup>[1]</sup>,被3GPP LTE及LTE Advanced通信标准所采用,并作为上行多址方案得到了广泛的关注和应用<sup>[2]</sup>。当信道状态信息(CSI)在发射端已知时,采用波束赋形技术,能够更充分的发挥MIMO在SC-FDMA系统中的优势,提高系统的频率效率以及通信链路的可靠性。在实际的无线通信系统中,由于信道的时变特性、信道估计带来的误差、以及有限的反馈信道链路容量等原因,信道状态信息通常为非理想的,亦即存在一定的误差。因此,将信道状态信息误差的因素考虑在内,研究非理想信道状态信息下的波束赋形算法对于提升MIMO SC-FDMA系统的性能及鲁棒性都具有重要意义。

目前,关于MIMO系统波束赋形算法的研究已取得了很多的重要结果,主要集中在平坦衰落信道下的MIMO系统以及MIMO正交频分复用(OFDM)系统,对于MIMO SC-FDMA系统的波束赋形研究并不完善。文献[3-6]对MIMO系统的波束赋形算法在理想和非理想信道状态信息条件下进行了深入研究,但这些算法是基于平坦衰落下的MIMO系统提出的,并不适用于频率选择性衰落信道下的MIMO SC-FDMA系统。文献[7]利用凸优化理论对MIMO OFDM系统的波束赋形算法进行了研究,但由于SC-FDMA系统与OFDM系统的收发机结构的不同,该算法同样不适用于MIMO SC-FDMA系统。文献[8-9]基于不同的优化准则深入研究了MIMO SC-FDMA系统的波束赋形算法,但这2种算法是在理想信道状态信息的条件下得到的,应用到非理想信道状态信息的场景时,会导致算法性能下降。因此,本文将针对非理想信道状态信息下的MIMO SC-FDMA系统波束赋形算法进行研究,提出非理想信道状态信息情况下MIMO SC-FDMA系统的波束赋形算法,以提升MIMO SC-FDMA系统的性能以及对信道误差的鲁棒性。

对于非理想信道状态信息的建模,现有文献一般分为2类<sup>[4]</sup>:一类是统计性模型,将信道状态信息误差建模为统计特性已知的随机变量,此时波束赋形算法通过优化性能指标在信道误差下的平均值来得到,一般适用于信道估计所带来的误差;另一类是确定性模型,信道状态信息误差属于某一集合,且该集合的界是已知的,此时波束赋形算法通过优化性能指标在最差信道状态下的性能来得到,一般适用

于信道状态信息量化以及有限的反馈链路容量所带来的误差。本文采用确定性模型而非统计性模型,原因除了适用的误差来源场景不同外,还包括:①在MIMO SC-FDMA系统中,采用统计模型下的平均性能指标会随着信道的频率选择性以及子载波数的变化而变化<sup>[10]</sup>,特定子载波数下得到的结果在不同子载波数下并不是最优的,而采用确定性模型则不存在这样的问题;②统计性模型下的优化问题在某些情况下可以转化为确定性模型下的优化问题。

在确定性模型的基础上,本文采用谱范数受限的模型对信道状态信息误差矩阵进行建模,具有统计上的无偏差性以及误差参数容易获得等优点。此外,在优化准则采用现有文献常用的接收端估计信号均方误差和的前提下,将优化问题建模为一个极小极大化问题,并利用优超理论以及矩阵奇异值不等式理论等,证明了优化问题的鞍点特性,最后利用凸优化来得到最优的功率分配。本文提出的算法同现有文献在理想信道状态信息下给出的算法相比,在误码率及频谱效率上都能获得更好的性能。

## 1 系统模型

本文考虑一个单用户MIMO SC-FDMA系统,其中发射端(用户)为 $N_t$ 根天线,接收端(基站)为 $N_r$ 根天线,系统总的子载波数为 $M$ 。发射端发送 $N_s$ 个相互独立的数据流( $N_s \leq \min\{N_r, N_t\}$ ),发送数据占用的子载波数为 $N(N < M)$ 。假设系统引入的循环前缀长度始终大于信道的延迟扩展长度。在发射端,每路数据流首先分别进行 $N$ 点的离散傅里叶变换(DFT),然后进行波束赋形处理,得到 $N_t$ 个数据流,将这 $N_t$ 个数据流分别进行子载波映射、 $M$ 点快速傅里叶反变换(IFFT)、插入循环前缀处理,得到最终的等效基带发送信号。在接收端,首先对每根天线收到的数据分别进行去除循环前缀、 $M$ 点快速傅里叶变换(FFT)、子载波解映射处理,然后进行频域均衡,最后对每路数据分别进行 $N$ 点离散傅里叶反变换(IDFT),得到时域估计信号。图1所示为带有波束赋形与频域均衡的MIMO SC-FDMA系统等效基带收发框图,图中省略了收发端循环前

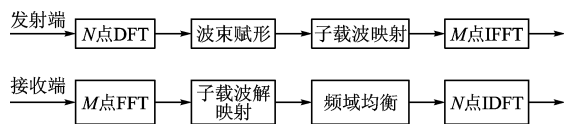


图1 带有波束赋形和频域均衡的MIMO SC-FDMA系统等效基带收发框图

缀处理。该系统的输入输出模型可表示为<sup>[9]</sup>

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{W}(\mathbf{F}_N \otimes \mathbf{I}_{N_s})\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{W}$ 表示波束赋形矩阵,且为一个块对角矩阵, $\mathbf{W} = \text{diag}\{\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_n, \dots, \mathbf{W}_N\}$ ,其中第 $n$ 个对角线矩阵对应第 $n$ 个子载波上的波束赋形矩阵 $\mathbf{W}_n$ ;  $\mathbf{s} = [s_1^T, \dots, s_n^T, \dots, s_N^T]^T$ 表示发送符号列向量,其中 $s_n = [s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, \dots, s_{N_s}^{(n)}]^T$ 表示第 $n$ 个子载波上传输的 $N_s$ 个相互独立的时域发送符号,假设发送符号向量的协方差矩阵为单位阵,即满足 $E(\mathbf{s}\mathbf{s}^H) = \mathbf{I}$ ;  $\mathbf{n}$ 表示均值为零协方差矩阵为 $\sigma^2\mathbf{I}$ 的复高斯加性白噪声; $\mathbf{H} = \text{diag}\{\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n, \dots, \mathbf{H}_N\}$ 表示频域信道响应矩阵,其中 $\mathbf{H}_n$ 表示第 $n$ 个子载波上的频域信道响应矩阵; $\mathbf{F}_N$ 表示 $N$ 点的归一化DFT矩阵,其第 $k$ 行第 $n$ 列的元素等于 $N^{-1/2} \exp\left\{\frac{-j2\pi}{N}(k-1)(n-1)\right\}$ ,  $1 \leq k, n \leq N$ ;  $\mathbf{I}_{N_s}$ 表示 $N_s$ 维单位阵;运算符 $\otimes$ 表示克拉内积。

发射端发送信号在波束赋形后仍需满足一定的发射功率限制,设发射功率为 $P$ ,那么

$$\begin{aligned} \text{tr}(E(\mathbf{W}(\mathbf{F}_N \otimes \mathbf{I}_{N_s})\mathbf{s}\mathbf{s}^H(\mathbf{F}_N^H \otimes \mathbf{I}_{N_s})\mathbf{W}^H)) = \\ \text{tr}(\mathbf{W}\mathbf{W}^H) \leq P \end{aligned} \quad (2)$$

式中: $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹,亦即矩阵对角线元素之和。在接收端,为了抑制多径信道带来的符号间干扰以及多天线数据流之间的干扰,本文采用频域线性最小均方误差(MMSE)均衡,其均衡矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{G} = \arg \min_{\mathbf{G}} E(\|\mathbf{G}\mathbf{y} - (\mathbf{F}_N \otimes \mathbf{I}_{N_s})\mathbf{s}\|^2) = \\ \mathbf{W}^H \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{W}\mathbf{W}^H \mathbf{H}^H + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{G}$ 表示求解均衡矩阵时所涉及的优化参数矩阵。MMSE均衡相比迫零均衡在低信噪比有更好的性能,同时,与其他非线性均衡算法,比如判决反馈均衡算法相比拥有更低的计算复杂度。经过频域均衡后,对每一根天线的的数据流分别进行IDFT变换,就可得到信号的时域估计,即 $\hat{\mathbf{s}} = (\mathbf{F}_N^H \otimes \mathbf{I}_{N_s})\mathbf{G}\mathbf{y}$ 。此时均方误差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{mse}} = E[(\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s})(\hat{\mathbf{s}}^H - \mathbf{s}^H)] = \\ (\mathbf{F}_N^H \otimes \mathbf{I}_{N_s}) \left( \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{W}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{W} + \mathbf{I} \right)^{-1} (\mathbf{F}_N \otimes \mathbf{I}_{N_s}) = \\ \sum_{n=1}^N \frac{1}{N} \left( \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{W}_n^H \mathbf{H}_n^H \mathbf{H}_n \mathbf{W}_n + \mathbf{I} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

均方误差之和为上述矩阵的对角线元素之和,即

$$\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{n=1}^N \frac{1}{N} \left[ \left( \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{W}_n^H \mathbf{H}_n^H \mathbf{H}_n \mathbf{W}_n + \mathbf{I} \right)^{-1} \right]_{j,j} \quad (5)$$

## 2 非理想信道状态信息模型

本文考虑采用确定性模型对非理想信道状态信

息进行建模,具体来讲,就是采用谱范数受限的模型对信道状态信息误差矩阵进行建模。对于每个频域信道矩阵 $\mathbf{H}_n$ ,设其等于

$$\mathbf{H}_n = \hat{\mathbf{H}}_n + \mathbf{H}_{e,n}, \quad n \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (6)$$

式中:信道矩阵 $\hat{\mathbf{H}}_n$ 表示发射端已知的信道状态信息; $\mathbf{H}_{e,n}$ 表示发射端未知的信道状态信息误差,满足 $\mathbf{H}_{e,n} \in S_n = \{\mathbf{H}_{e,n} \mid \tau_1(\mathbf{H}_{e,n}) = \|\mathbf{H}_{e,n}\|_2 \leq \epsilon_n\}$ ,即误差矩阵 $\mathbf{H}_{e,n}$ 为集合 $S_n$ 中的样本,该集合中每个矩阵的谱范数小于等于 $\epsilon_n$ ,运算符 $\tau_1(\cdot)$ 表示矩阵的最大奇异值, $\|\cdot\|_2$ 表示矩阵的谱范数(也叫2范数)。 $\epsilon_n$ 值的大小用来评价信道状态信息误差的大小。当 $\epsilon_n = 0$ 时,表示没有误差,发射端对信道状态信息 $\mathbf{H}_n$ 完全已知。 $\epsilon_n$ 越大表示误差越大,当 $\epsilon_n = +\infty$ 时,表示发射端对信道状态信息 $\mathbf{H}_n$ 完全未知。

采用这种谱范数受限的信道误差模型有如下原因和优点。

(1)谱范数(也叫矩阵2范数)是唯一的酉不变且由向量2范数导出的算子范数<sup>[11]</sup>,即对于任意酉矩阵 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ ,满足

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}\mathbf{H}\|_2 = \|\mathbf{H}\mathbf{V}\|_2 = \|\mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{V}\|_2 = \|\mathbf{H}\|_2 \\ \|\mathbf{H}\|_2 = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{H}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \end{aligned} \quad (7)$$

酉不变性保证了对信道误差的测量在统计上的无偏差异性。算子范数的性质使得信道的谱范数成为衡量信道质量优劣的重要指标。

(2)与利用Frobenius范数(不是算子范数,但具有酉不变性)对信道误差建模相比,在相同界的条件下,谱范数受限的模型拥有更大(样本数量更多)的集合,即如果

$$\mathbf{H}_{e,n} \in Q_n = \{\mathbf{H}_{e,n} \mid \|\mathbf{H}_{e,n}\|_F \leq \epsilon_n\} \quad (8)$$

式中 $\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的Frobenius范数,那么

$$Q_n \subseteq S_n \quad (9)$$

更大的集合意味着信道状态信息误差具有更大的不确定性。

(3)信道的最大奇异值可以作为波束赋形中最强的特征模式,谱范数受限给出了最强的特征模式的不确定性。

(4)在SIMO或者MISO系统中,每个子载波的信道矩阵退化为一个向量,此时信道误差模型变为了向量的2范数受限模型,当信道误差是由反馈链路容量受限或者信道信息量化引起时,误差参数(集合的界)可以很容易的获得。

(5)采用每个子载波的信道误差矩阵范数受限

模型,与  $N$  个子载波总的信道矩阵  $\mathbf{H}$  的范数受限模型(即,  $\forall n, \|\mathbf{H}_{e,n}\|_2 \leq \epsilon$ )相比,适合更加复杂的应用场景。比如,在蜂窝通信系统中,某些子载波上可能会受到相邻小区带来的共道干扰或者导频污染<sup>[12]</sup>的影响等,其信道误差与其他子载波上的误差相比可能更大,即  $N$  个子载波上的误差大小并不相等。所以,通过对不同子载波信道误差设置不同的界,可以仿真模拟类似场景。

### 3 波束赋形优化问题及其最优解

当非理想信道状态信息采用确定性模型时,波束赋形的优化问题通常可以描述为一个极大极小化或者极小极大化问题<sup>[4]</sup>。本文以均方误差和为准则,将波束赋形的优化问题描述为一个发射功率和信道状态信息误差受限下的极小极大化问题

$$\min_{\mathbf{W}} \max_{\mathbf{H}} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{n=1}^N \frac{1}{N} \left[ \left( \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{W}_n^H \mathbf{H}_n \mathbf{H}_n \mathbf{W}_n + I \right)^{-1} \right]_{j,j} \quad (10)$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{cases} \text{tr}(\mathbf{W}\mathbf{W}^H) \leq P \\ \tau_1(\mathbf{H}_n - \hat{\mathbf{H}}_n) \leq \epsilon_n \\ n = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

式中:  $\epsilon_n$  表示第  $n$  个子载波上的信道误差矩阵的谱范数的界。上述优化问题为一个非凸优化问题,不能使用凸优化来直接解决,本文采用优超理论及奇异值不等式理论来解决该优化问题。设上述优化问题的目标函数为  $f(\mathbf{H}, \mathbf{W})$ , 已知的信道矩阵  $\hat{\mathbf{H}}_n$  的奇异值分解为  $\hat{\mathbf{H}}_n = \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\mathbf{\Lambda}}_n \hat{\mathbf{V}}_n^H$ , 其中  $\hat{\mathbf{\Lambda}}_n$  为对角阵, 其对角线元素由  $\hat{\mathbf{H}}_n$  的非零奇异值降序排列组成。对于优化问题(10), 有如下重要结果。

**定理 1** 目标函数  $f(\mathbf{H}, \mathbf{W})$  在任意满足受限条件的  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{W}$  下存在鞍点特性, 即

$$f(\mathbf{H}, \mathbf{W}^*) \leq f(\mathbf{H}^{(w)}, \mathbf{W}^*) \leq f(\mathbf{H}^{(w)}, \mathbf{W}) \quad (11)$$

从而进一步得到如下关系

$$\min_{\mathbf{W}} \max_{\mathbf{H}} f(\mathbf{H}, \mathbf{W}) = \max_{\mathbf{H}} \min_{\mathbf{W}} f(\mathbf{H}, \mathbf{W}) = f(\mathbf{H}^{(w)}, \mathbf{W}^*) \quad (12)$$

式中:  $\mathbf{W}^* = \arg \min_{\mathbf{W}} f(\mathbf{H}^{(w)}, \mathbf{W})$  表示优化问题式(10)的解;  $\mathbf{H}^{(w)}$  为最优波束赋形矩阵

$$\mathbf{H}^{(w)} = \text{diag}\{\mathbf{H}_1^{(w)}, \dots, \mathbf{H}_n^{(w)}, \dots, \mathbf{H}_N^{(w)}\} \quad (13)$$

其中  $\mathbf{H}_n^{(w)} = \hat{\mathbf{U}}_n \mathbf{D}_n \hat{\mathbf{V}}_n^H$ ,  $\hat{\mathbf{U}}_n$  和  $\hat{\mathbf{V}}_n$  分别表示  $\hat{\mathbf{H}}_n$  奇异值分解的左边和右边酉矩阵,  $\mathbf{D}_n$  表示由降序排列的序列  $\{(\tau_i(\hat{\mathbf{H}}_n) - \epsilon_n)_+\}$  构成的对角阵, 即

$$\mathbf{D}_n = \text{diag}\{(\tau_i(\hat{\mathbf{H}}_n) - \epsilon_n)_+\} \quad (14)$$

$\tau_i(\hat{\mathbf{H}}_n)$  表示矩阵  $\hat{\mathbf{H}}_n$  的第  $i$  大的奇异值,  $1 \leq i \leq \min$

$\{N_r, N_t\}$ ; 运算符  $(x)_+ = \max\{x, 0\}$ 。信道  $\mathbf{H}^{(w)}$  可以理解最差信道, 因为当  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(w)}$  时, 目标函数  $f(\mathbf{H}, \mathbf{W}^*)$  值最大, 即  $\mathbf{H}^{(w)} = \arg \max_{\mathbf{H}} f(\mathbf{H}, \mathbf{W}^*)$ 。

**证明** 首先证明式(11)右边的不等式。令  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(w)}$ , 由矩阵对角线元素之和等于矩阵特征值之和可知, 函数  $f(\mathbf{H}^{(w)}, \mathbf{W})$  可以转化为以矩阵奇异值为变量的函数, 如下所示

$$f(\mathbf{H}^{(w)}, \mathbf{W}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{N_s} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sigma^2} \tau_i^2(\mathbf{H}_n^{(w)} \mathbf{R}_n^{1/2})} \quad (15)$$

式中:  $\mathbf{R}_n = \mathbf{W}_n \mathbf{W}_n^H$ 。由优超理论<sup>[13]</sup>可知

$$\sum_{i=1}^k \tau_i(\mathbf{H}_n \mathbf{R}_n^{1/2}) \leq \sum_{i=1}^k \tau_i(\mathbf{H}_n) \tau_i(\mathbf{R}_n^{1/2}) \quad (16)$$

由于函数  $\sum_i \frac{1}{1+x_i^2}$  在  $x_i > 0$  时为递减的舒尔凸函数, 因此由式(16)可得

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{N_s} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sigma^2} \tau_i^2(\mathbf{H}_n^{(w)} \mathbf{R}_n^{1/2})} \geq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{N_s} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sigma^2} \tau_i^2(\mathbf{H}_n^{(w)}) \tau_i^2(\mathbf{R}_n^{1/2})} \quad (17)$$

上述目标函数的下界(式(17)右边项)在波束赋形矩阵  $\mathbf{W}_n = \hat{\mathbf{V}}_n(1:N_s) \mathbf{\Lambda}_w^{(n)}$  时达到, 其中  $\hat{\mathbf{V}}_n(1:N_s)$  表示由矩阵  $\hat{\mathbf{V}}_n$  最左边的  $N_s$  列向量组成的矩阵,  $\mathbf{\Lambda}_w^{(n)}$  表示由第  $n$  个子载波上的功率分配因子组成的对角阵, 即

$$\mathbf{\Lambda}_w^{(n)} = \text{diag}\{p_{n,1}^{1/2}, \dots, p_{n,i}^{1/2}, \dots, p_{n,N_s}^{1/2}\} \quad (18)$$

式中:  $p_{n,i}$  表示第  $n$  个子载波上第  $i$  路数据分配到的功率。此时  $f(\mathbf{H}^{(w)}, \mathbf{W}^*)$  可表示为

$$f(\mathbf{H}^{(w)}, \mathbf{W}^*) =$$

$$\min_{\substack{0 \leq \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{N_s} p_{n,i} \leq P}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{N_s} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sigma^2} \tau_i^2(\mathbf{H}_n^{(w)}) p_{n,i}} \quad (19)$$

由于式(17)左边项等于  $f(\mathbf{H}^{(w)}, \mathbf{W})$ ,  $\tau_i^2(\mathbf{R}_n^{1/2}) = p_{n,i}$ , 因此由式(17)和式(19)可得  $f(\mathbf{H}^{(w)}, \mathbf{W}^*) \leq f(\mathbf{H}^{(w)}, \mathbf{W})$ 。

下面证明式(11)左边的不等式。根据文献<sup>[14]</sup>的引理 2, 以及  $\mathbf{W}_n^*$  的左边奇异值向量组成的矩阵等于信道矩阵  $\mathbf{H}_n^{(w)}$  的右边奇异值向量组成的矩阵, 可得

$$\tau_i((\hat{\mathbf{H}}_n + \mathbf{H}_{e,n})(\mathbf{R}_n^*)^{1/2}) \geq (\tau_i(\hat{\mathbf{H}}_n) - \epsilon_n)_+ \tau_i((\mathbf{R}_n^*)^{1/2}) \quad (20)$$

式中:  $i = 1, 2, \dots, N_s$ 。利用式(20)可得

$$f(\mathbf{H}, \mathbf{W}^*) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{N_s} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sigma^2} \tau_i^2 ((\hat{\mathbf{H}}_n + \mathbf{H}_{e,n})(\mathbf{R}_n^*)^{1/2})} \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{N_s} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sigma^2} (\tau_i (\hat{\mathbf{H}}_n) - \epsilon_n)_+^2 p_{n,i}^*} \quad (21)$$

式(21)是根据式(20)、 $\tau_i((\mathbf{R}_n^*)^{1/2}) = (p_{n,i}^*)^{1/2}$ 以及函数  $\frac{1}{1+x^2}$  在  $x > 0$  上为递减函数得出。注意到式(21)等于  $f(\mathbf{H}^{(\omega)}, \mathbf{W}^*)$ , 因此式(11)左边不等式得证。

根据上述定理及其证明过程可知,最优的波束赋形矩阵结构为  $\mathbf{W}^* = \text{diag}\{\mathbf{W}_1^*, \dots, \mathbf{W}_n^*, \dots, \mathbf{W}_N^*\}$ , 其中

$$\mathbf{W}_n^* = \hat{\mathbf{V}}_n(1:N_s) \text{diag}\{(p_{n,1}^*)^{1/2}, (p_{n,2}^*)^{1/2}, \dots, (p_{n,N_s}^*)^{1/2}\} \quad (22)$$

式中:最优功率分配  $p_{n,i}^*$  为如下优化问题(23)的解

$$\min_{\substack{0 \leq \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{N_s} p_{n,i} \leq P}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{N_s} \left(1 + \frac{1}{\sigma^2} (\tau_i (\hat{\mathbf{H}}_n) - \epsilon_n)_+^2 p_{n,i}\right)^{-1} \quad (23)$$

上述优化问题的受限函数是一个线性函数,目标函数是分数线性(linear-fractional)函数之和,两者均为凸函数。所以,该问题是一个凸优化问题,可以用凸优化理论来解决。求解上述优化问题的KKT(Karush-Kuhn-Tucker)条件,可得每个子载波的每个数据流的最优功率分配条件为

- (1) 当  $(n, i) \in \{(n, i) | \tau_i (\hat{\mathbf{H}}_n) - \epsilon_n \leq 0\}$  时,  $p_{n,i}^* = 0$ ;
- (2) 当  $(n, i) \in \{(n, i) | \tau_i (\hat{\mathbf{H}}_n) - \epsilon_n > 0\}$  时,

$$p_{n,i}^* = \left( \frac{1}{(\sigma^{-2} N \nu (\tau_i (\hat{\mathbf{H}}_n) - \epsilon_n)^2)^{1/2}} - \frac{1}{\sigma^{-2} (\tau_i (\hat{\mathbf{H}}_n) - \epsilon_n)^2} \right)_+ \quad (24)$$

式中: $\nu$  表示拉格朗日因子,其值可以利用子梯度方法<sup>[8]</sup>以及  $\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{N_s} p_{n,i}^* = P$  来得到。

### 4 仿真结果

本节通过仿真来评估不同的波束赋形算法在非理想信道状态信息下的误码率以及可达信息速率性能。仿真信道模型采用非相关瑞利块衰落,即收发

端天线间均没有相关性,信道服从瑞利衰落,且信道状态信息在每个数据块的时间内保持不变,在不同的数据块之间相互独立,信道功率延迟分布服从指数分布。仿真假设  $N_s = N_t = N_r = 4$ , 采用无信道编码的 4-QAM 调制方式,输入信噪比定义为  $R_{SN} = \frac{P}{N\sigma^2}$ 。为了方便起见,假设所有子载波信道误差的

范数受限边界相同,即对于任意子载波,  $\epsilon_n = \epsilon$ 。此外,由于仿真采用的信道为瑞利衰落信道,其最大奇异值服从一定的概率分布(概率分布函数与收发端天线数有关)。在收发端天线数均设置为 4 的情况下,信道最大奇异值的统计平均值约为 3.1。因此,本节仿真经验性地将信道误差参数  $\epsilon$  设置为 1.5、2、2.5,以模拟信道误差小、一般、较大时的仿真性能。在采用本文的仿真模型及信道误差模型下,本节将提出的非理想信道状态信息下的波束赋形算法与文献[9]在理想信道状态信息下得出的最优波束赋形算法以及常用的等功率分配算法进行比较,其中,等功率分配算法是将发射功率等分至每路数据流,而文献[9]的算法是利用发射端已知的信道矩阵进行波束赋形,且不考虑信道误差影响。与现有文献[4]类似,本文将文献[9]的算法称为非鲁棒波束赋形算法,因为其没有考虑信道误差的影响,将发射端已知的信道矩阵  $\hat{\mathbf{H}}_n$  当作了带有误差的信道矩阵  $\mathbf{H}_n$  来进行波束赋形。

图 2 给出了不同信道误差  $\epsilon$  下几种波束赋形算法的误码率比较。可以看出,本文提出的波束赋形算法始终优于等功率分配算法和非鲁棒波束赋形算法。当  $\epsilon$  较小时,本文提出的波束赋形算法在低信噪比时性能略优于非鲁棒波束赋形算法,且随着信噪比增加,该优势增大,比如  $R_{SNR} = 18$  dB 且  $\epsilon = 1.5$  时,本文波束赋形算法和非鲁棒波束赋形算法相比,

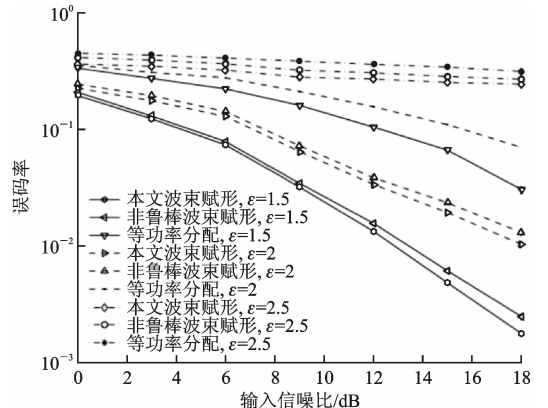


图 2 不同信道误差下几种波束赋形算法的误码率比较

约有 1 dB 增益;两种算法在任意信噪比下与等功率分配算法相比均优势明显。当  $\epsilon$  增大时,本文提出的波束赋形算法与非鲁棒波束赋形算法相比在低信噪比时优势变大,且两种算法仍优于等功率分配算法。

图 3 给出了不同信道误差  $\epsilon$  下不同波束赋形算法的可达信息速率的比较。可以看出,本文的波束赋形算法仍然优于等功率分配算法和非鲁棒波束赋形算法,尤其在  $\epsilon$  增大,即信道状态信息误差增大的情况下如此。当  $\epsilon$  较小时,本文提出的鲁棒波束赋形算法优于非鲁棒波束赋形算法,比如在输入信噪比为 18 dB 且  $\epsilon=1.5$  时,非鲁棒波束赋形算法可获得速率约为  $3.7 \text{ b} \cdot (\text{s} \cdot \text{Hz})^{-1}$ ,本文算法带来的增益(约为  $0.1 \text{ b} \cdot (\text{s} \cdot \text{Hz})^{-1}$ )为非鲁棒波束赋形算法速率的 2.7%。当  $\epsilon$  增大时,本文提出的波束赋形算法与非鲁棒波束赋形算法的速率差距变大,在  $\epsilon=2$  且输入信噪比为 18 dB 时,本文算法带来的增益约为非鲁棒波束赋形算法速率(约为  $1.7 \text{ b} \cdot (\text{s} \cdot \text{Hz})^{-1}$ )的 5.8%。原因在于本文提出的算法与非鲁棒波束赋形算法相比有着同样的最优归一化波束赋形矩阵(亦即波束赋形相位旋转矩阵),在非理想信道状态信息下,两者的功率分配存在区别,本文提出的算法在功率分配上是最优的,而非鲁棒波束赋形算法提供的功率分配为次优的,随着  $\epsilon$  的增大,本文的波束赋形算法由于其具有最优的功率分配,因此获得了最佳的性能。

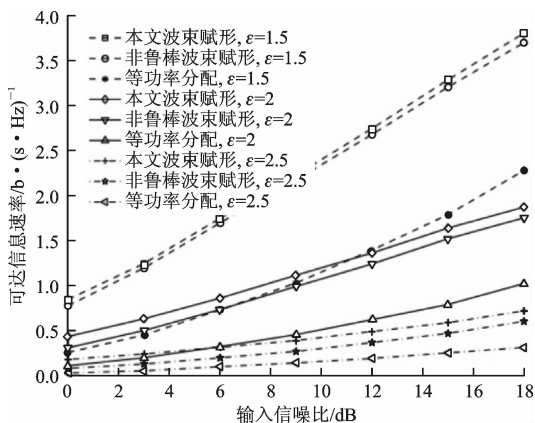


图 3 不同信道误差下几种算法的可达信息速率比较

## 5 结 语

本文研究了 MIMO SC-FDMA 系统在非理想信道状态信息下的波束赋形问题,提出了一种鲁棒波束赋形算法。该算法采用确定性模型对非理想信道状态信息进行建模,并利用矩阵的谱范数作为衡

量信道状态信息误差的工具,这种谱范数受限的信道误差模型保持了信道状态信息误差统计上的无偏差性以及误差参数容易获得等许多优点。在该模型基础上将波束赋形优化问题描述为一个极大极小化问题,最后利用优超理论以及奇异值不等式的相关知识得到了优化问题的最优解。仿真结果验证了该鲁棒波束赋形算法在误码率与速率上的优越性。

## 参考文献:

- [1] BENVENUTO N, DINIS R, FALCONER D, et al. Single carrier modulation with nonlinear frequency domain equalization: an idea whose time has come again [J]. IEEE Proceedings of The IEEE, 2010, 98(1): 69-96.
- [2] 王映民, 孙韶辉. TD-LTE 技术原理与系统设计 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2011: 53-75.
- [3] 董可, 廖学文, 朱世华. 毫米波通信系统中利用随机逼近的波束赋形算法 [J]. 西安交通大学学报, 2011, 45(10): 72-76.  
DONG Ke, LIAO Xuewen, ZHU Shihua. Beam-forming in millimeter-wave radio system via stochastic approximation [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2011, 45(10): 72-76.
- [4] WANG J, BENGTTSSON M, OTTERSTEN B, et al. Robust MIMO precoding for several classes of channel uncertainty [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(12): 3056-3070.
- [5] 黄莹, 吕刚明, 朱世华. 接收矢量估计辅助的协调波束赋形算法 [J]. 通信学报, 2014, 35(2): 194-201.  
HUANG Ying, LÜ Gangming, ZHU Shihua. Coordinated beamforming algorithms assisted by receive beamforming vector estimation [J]. Journal of Communications, 2014, 35(2): 194-201.
- [6] 马鹏飞, 赵慧, 王文博. MIMO 系统中一种鲁棒的特征波束成形算法 [J]. 吉林大学学报(工学版), 2008, 38(5): 1170-1174.  
MA Pengfei, ZHAO Hui, WANG Wenbo. Robust eigenmode beamforming scheme for MIMO systems [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2008, 38(5): 1170-1174.
- [7] PALOMAR D, CIOFFI J, LAGUNAS M. Joint Tx-Rx beamforming design for multicarrier MIMO channels: a unified framework for convex optimization [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(9): 2381-2401.

(下转第 83 页)