第五章　概率论的基本知识

一、排列组合问题

二、概率论的基本概念

三、随机变量的概率分布及其数字特征

四、n维随机变量

一、排列组合问题

（一）乘法原理

如果要完成事件A必须依次地完成事件A_1和事件A_2，若完成事件A_1有n_1种方法，而不论用哪一种方法完成A_1后，再去完成A_2，都有n_2种方法，那么完成事件A的方法有$n_1 \times n_2$种。这就是乘法原理。

（二）排列问题

从n个不同的元素中任意取出m个，按照一定的顺序排成一列，称为一种排列。所有不同的排列总数叫做排列数，用 P_n^m 表示

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

（三）组合问题

从n个不同元素中任意取出m个，不管顺序构成一列组，每种取法，称为一种组合。所有不同的取法总数称为组合数，用 C_n^m 表示。

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

（四）举例

- n个定域子或n个经典粒子组成的系统一个宏观态所对应的微观态数目。

$$x=\frac{n!}{\prod_i^k n_i!}\prod_i^k g_i^{n_i}$$

- n个费米子组成的系统一个宏观态所对应的微观态数目。

$$x=\prod_i^k \frac{g_i!}{n_i!(g_i-n_i)!}$$

- n个玻色子组成的系统一个宏观态所对应的微观态数目。

$$x=\prod_i^k \frac{(n_i+g_i-1)!}{n_i!(g_i-1)!}$$

二、概率论的基本概念

（一）随机试验

在相同的条件下，不一定得到相同的试验结果，但在大量重复试验的条件下，每一个可能的试验结果都有一定的出现机会，这是试验称为随机试验。

（二）随机事件

在随机试验中，可能出现、也可能不出现的试验结果，称为随机事件。

必然事件、不可能事件

（三）随机事件之间的关系

- 包含和相等
- 和事件
- 积事件
- 相容事件
- 不相容事件
- 互逆事件（对立事件）
- 相互独立事件

（四）概率的定义

设随机事件A在N次试验中出现了N_A次，则N_A/N称为事件A发生的频率。试验次数越多，频率就越逼近一个确定值，定义随机事件的概率为

$$P(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{N_A}{N}$$

说明：

（1）刻化了事件A在试验中出现的可能性的大小。

（2）个别现象无概率可言。

（3）上式可推广到用其它一些量表示。

（五）概率的性质

性质1 $0 \le P(A) \le 1$

性质2 $P(\Phi) = 0 \quad P(U) = 1$

性质3 若 $AB = \Phi$,则

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

（六）条件概率

设A，B是某事件组k下的两个事件，在A出现的条件下，B出现的概率叫做事件B的条件概率。

$$P(B/A)=\frac{k}{m}=\frac{k/N}{m/N}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

讨论：

（1） $P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)$

（2）若事件A、B相互独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

三、随机变量的概率分布及其数字特征

（一）随机变量

在一定条件下，能以确定的概率取各种不同值的变量，称为随机变量。

- 离散型随机变量：它的所有可能的取值在数抽上是有限个或者是可数的分立值。
- 连续型随机变量：它可取数抽上某区间内的一切数值。

（二）随机变量的概率分布

- 离散型随机变量

$$P_i = P(\zeta = x_i), \qquad (i = 1,2,\cdots,k,\cdots n)$$

P_i 满足的条件： $P_i \geq 0 \qquad \sum_i^n P_i = 1$

- 连续型随机变量

$$dW_{\xi = x} = \rho(x)dx$$

$P(\xi)$ 满足的条件： $\rho(x) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1$$

（三）随机变量的数字特征

1. 统计平均值（数学期望）

离散型

$$\overline{\xi} = \sum_{i}^{n} x_i P_i$$

连续型

$$\overline{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx$$

其它

$$\overline{f(\xi)} = \sum_{i=1}^{\infty} P_i f(x_i)$$

2. 方差

$$\overline{(\Delta\xi)^2} = \overline{(\xi - \overline{\xi})^2}$$

说明：

（1） $\left[\overline{(\Delta\xi)^2}\right]^{1/2}$ 涨落（标准误差）

$\dfrac{\left[\overline{(\Delta\xi)^2}\right]^{1/2}}{\overline{\xi}}$ 相对涨落（相对误差）

（2） $\overline{(\Delta\xi)^2} = \overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2$

四、n维随机变量

（一）n维随机变量的概率

$$dW_{\{\xi_i = x_i\}} = \rho(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

（二）n维随机变量的统计平均值

$$\overline{\xi_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_i \rho(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$