第2篇 图论

第4章 图

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

本章节目录

4.1 图的概念与表示

4.1.1图的基本概念

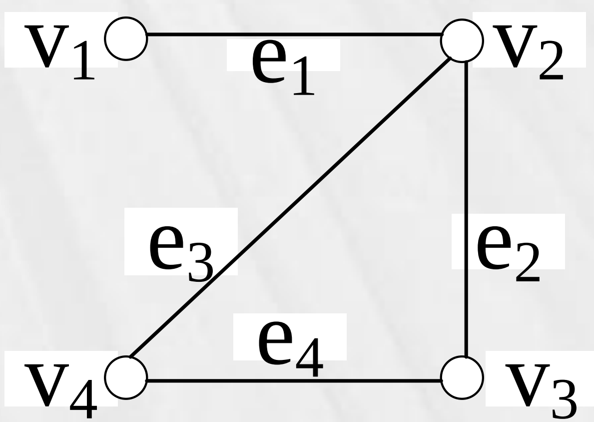
1.图的定义

- 定义4.1 图G由一个非空结点集V和一个边集E组成，E中的每条边可用V中的一个结点对表示，这样的图G记作G =（V，E）。

定义4.1中的结点对可以是无序的，也可以是有序的。我们将结点u、v的无序结点对记作（u，v），这里，（u，v）=（v，u）；而结点u、v组成的有序结点对就是序偶<u，v>，由序偶的性质，当u≠v时，<u，v>≠<v，u>。

4.1 图的概念与表示

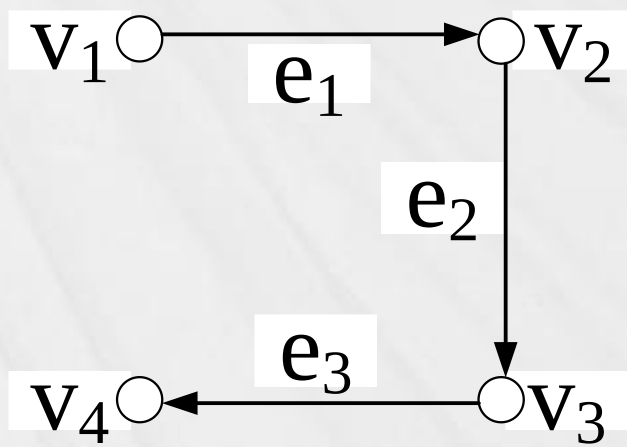
❖ 定义4.2 图G =（V，E）中，如果每条边都是无向边，图G称为无向图；如果每条边都是有向边，图G称为有向图；如果有些边是无向边，有些边是有向边，图G称为混合图。



右图中，图G =（V，E），V={v1，v2，v3，v4}，E={e1，e2，e3，e4}，其中，e1=（v1，v2），e2=（v2，v3），e3=（v4，v2），e4=（v3，v4）。这是一个无向图。在该图中，边e1与结点v1和v2相关联，结点v1与v2是邻接的，它们是边e1的两个端点；结点v1与v3不邻接；e2与e3是邻接的，它们都关联结点v2。

4.1 图的概念与表示

- 下图中，图G =（V，E），V={ v1，v2，v3，v4}，E={e1，e2，e3}。其中，e1=<v1，v2>，e2=<v2，v3>，e3=<v3，v4>。这是一个有向图，在该图中，边e1与结点v1和v2相关联，结点v1与v2是邻接的，v1是e1的起始结点，v2是e1的终止结点；结点v1与v4不邻接；边e1和e2是邻接的，它们都关联结点v2。



4.1 图的概念与表示

2.结点的度

- 定义4.3 在无向图G =（V，E）中，对任意结点$v \in V$，v的度等于与v关联的边数，记作d（v）。在有向图G =（V，E）中，对任意结点$v \in V$，以v为起始结点的边数，称为结点v的出度，记作d^{+}（v）；以v为终止结点边数，称为v的入度，记作d^{-}（v）；v的出度与入度之和，称为结点v的度，记作d（v），显然$d(v)=d^{+}(v)+d^{-}(v)$。

4.1 图的概念与表示

- 定理4.1（握手定理） 图G=（V，E）中结点度的总和等于边数的两倍，即

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

  - 推论 图G=（V，E）中度为奇数的结点必为偶数个。

- 定理4.2 若图G=（V，E）是有向图，则

$$\sum_{v \in V} d^{+}(v) = \sum_{v \in V} d^{-}(v) = |E|$$

4.1 图的概念与表示

3.子图和补图

- 定义4.4 设有图G=（V，E）和图G’=（V’，E’）。

  （1）若V’ $\subseteq$ V，E’ $\subseteq$ E，则称G’是G的子图。

  （2）若G’是G的子图，且E’ $\subset$ E，则称G’是G的真子图。

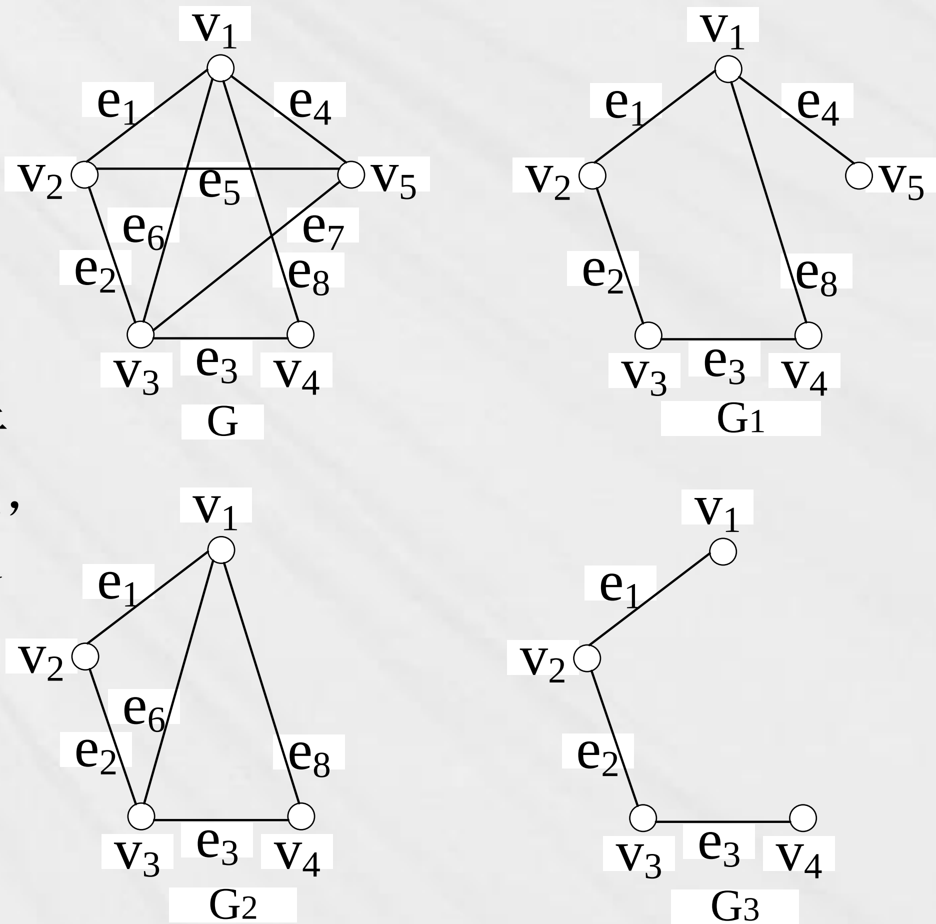
  （3）若V’=V，E’ $\subseteq$ E，则称G’是G的生成子图。

  （4）若V’ $\subseteq$ V且V’≠ Ø，以V’为结点集，以图G中结点均在V’中的边为边集的子图，称为由V’导出的导出子图，记作G[V’]。

  （5）若E’ $\subseteq$ E，且E’≠ Ø，以E’为边集，以E’中的边关联的结点为结点集的图G的子图，称为E’导出的边导出子图，记作G[E’]。

4.1 图的概念与表示

- 图G1和G2、G3都是图G的子图，并且是G的真子图，G1是G的生成子图，G2是G由{ v1，v2，v3，v4}导出的导出子图，G3是G由{e1，e2，e3}导出的边导出子图。



4.1 图的概念与表示

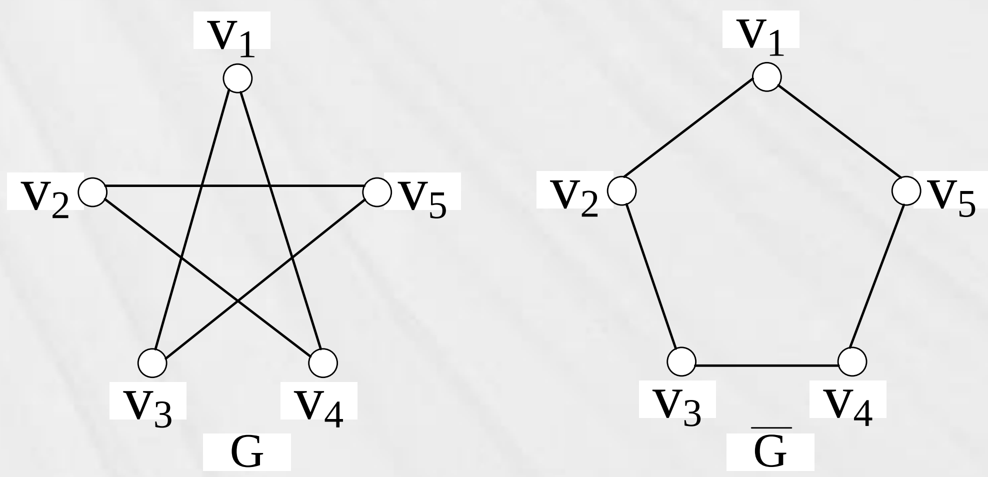
- 定义4.5 设图G=（V，E）是无向图，若每一对结点之间都有边相连，则称G为无向完全图，具有n个结点的无向完全图记作Kn。如果图G=（V，E）为有向图，若每对结点间均有一对方向相反的边相连，则称G为有向完全图，具有n个结点的有向完全图记作Dn。

- Kn有n（n – 1）/2条边，而Dn有n（n – 1）条边。

4.1 图的概念与表示

- 定义4.6设G为n个结点的无向图，从完全图Kn中删去G的所有边后构成的图称为无向图G的补图，记作 $\overline{G}$。类似地，设G为n个结点的有向图，从有向完全图Dn中删去G的所有边后构成的称为有向图G的补图，记作 $\overline{G}$。

- 下面是无向图G及其补图 $\overline{G}$ 。



4.1 图的概念与表示

4.图的同构

- 定义4.7 设有图G=（V，E）和图G'=（V'，E'）。如果存在双射g：V→V'，使得
  - （u，v）∈E当且仅当（g（u），g（v））∈E'，或者
  - <u，v>∈E当且仅当<g（u），g（v）>∈E'

且它们有相同的重数，则称G与G'同构，记作G≌G'。

- 上页图中，G ≌ $\overline{G}$

4.1 图的概念与表示

- 判断任意两个图是否同构是一个非常困难的问题，至今还没有找到判断两个图是否同构的便于检查的充分必要条件，因而只能从定义出发判断。两个图同构的必要条件是：

（1）结点数相同；

（2）边数相同；

（3）度相同的结点数相同。

但这不是充分条件。

4.1 图的概念与表示

4.1.2图的矩阵表示

1.有向图的邻接矩阵

- 定义4.8 设有向图G=（V，E），V={v_1，v_2，…，v_n}，E={e_1，e_2，…，e_m}，则G的邻接矩阵A（G）=（a_{ij}）$_{n\times n}$是一个n阶方阵，简记作A，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果} <v_i,v_j>\in \mathrm{E} \\ 0 & \text{如果} <v_i,v_j>\notin \mathrm{E}\end{cases}$$

4.1 图的概念与表示

2.无向图的邻接矩阵

- 定义4.9 设无向图G=（V，E），V={v_1，v_2，…，v_n}，E={e_1，e_2，…，e_m}，则G的邻接矩阵A（G）=（a_{ij}）$_{n\times n}$是一个n阶方阵，简记作A，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & 如果(v_i,v_j)\in \mathrm{E}\\ 0 & 如果(v_i,v_j)\notin \mathrm{E}\end{cases}$$

4.1 图的概念与表示

3.无环的有向图的关联矩阵

❖ 定义4.10　　设图G=（V，E）是无环的有向图，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，则G的关联矩阵M（G）=（$m_{ij}$）$_{n\times m}$，简记作M，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果}v_i\text{是}e_j\text{的起始结点}\\ 0 & \text{如果}v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1 & \text{如果}v_i\text{是}e_j\text{的终止结点}\end{cases}$$

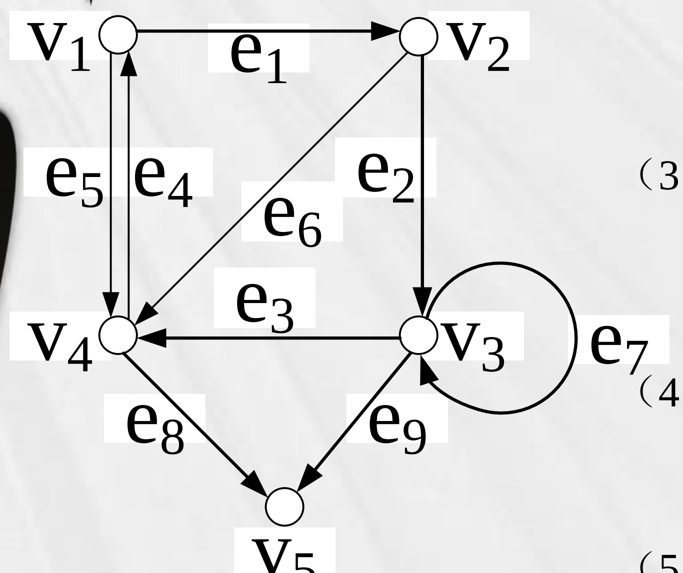
4.1 图的概念与表示

4.无向图的关联矩阵

- 定义4.11 设无向图G=（V，E），$V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$，则G的关联矩阵M（G）=（$m_{ij}$）$_{n\times m}$简记作M，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果}v_i\text{与}e_j\text{关联}\\ 0 & \text{如果}v_i\text{与}e_j\text{不关联}\end{cases}$$

4.2 路径与连通性



（1）P1=（v1e5v4e8v5）是一条路径，也是一条简单路径和基本路径，该路径以v1为起始结点，以v5为终止结点，路径长度为2。

（2）P2=（v1e1v2e2v3e7v3e9v5）是一条路径，也是一条简单路径，但不是一条基本路径，该路径也是以v1为起始结点，以v5为终止结点，但路径长度为4。

（3）P3=（v1e1v2e6v4e4v1e1v2e2v3）是一条路径，但不是一条简单路径，也不是一条基本路径，该路径以v1为起始结点，以v3为终止结点，路径长度为5。

（4）P4=（v1e1v2e2v3e3v4e4v1）是一条回路，也是一条简单回路和基本回路，该回路的长度为4。

（5）P5=（v3e7v3e3v4e4v1e1v2e2v3）是一条回路，也是一条简单回路，但不是一条基本回路，该回路的长度为5。

（6）P6=（v1e1v2e6v4e4v1e5v4e4v1）是一条回路，但不是一条简单回路，也不是一条基本回路，该回路的长度为5。

4.2 路径与连通性

4.2.1路径与回路

- 定义4.12 在图G =（V，E）中，从结点v_0到v_n的一条路径或通路是图的结点和边的一个交错序列（$v_0e_1v_1e_2v_2\ldots v_{n-1}e_nv_n$），其中$e_i$=（$v_{i-1}$，$v_i$）或者$e_i$=<$v_{i-1}$，$v_i$>（i=1，2，…，n）， v_0、v_n分别称为路径的起始结点和终止结点，统称为路径的端点，路径中包含的边数n称为路径的长度。当起点和终点相同时，则称该路径为回路。

  如果一条路径中的边e_1，e_2，…，e_n互不相同，则称该路径为简单路径；如果一条路径中结点v_0，v_1，v_2，…，v_n互不相同，则称其该路径为基本路径。

  如果一条回路中的边e_1，e_2，…，e_n互不相同，则称该回路为简单回路；如果一条回路中结点v_0，v_1，v_2，…，v_n除起始结点和终止结点外互不相同，则称其该回路为基本回路。

4.2 路径与连通性

- 定理4.3 在一个（n，m）图中，如果从结点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在一条路径，则从v_i到v_j存在一条长度不大于n – 1的路径；如果存在一条经过v_i的回路，则存在一条经过v_i的长度不超过n的回路。

- 证明：假定从v_i到v_j存在一条路径（v_i …… v_j），如果其中有相同的结点v_k，即，有（v_i…v_k…v_k…v_j），删去其中从v_k到v_k的那些边，得到的仍是从v_i到v_j的路径。如此反复进行，直至（v_i……v_j）中没有重复结点为止。此时得到的仍是一条从v_i到v_j的路径，由于该路径没有重复结点，图中共n个结点，路径长度比路径中的结点数少1，因此，路径的长度不超过n – 1。

4.2 路径与连通性

- 定义4.13 在图G=（V，E）中，从结点v_i到v_j最短路径的长度称为v_i到v_j的距离，记作d（v_i，v_j）。如果从v_i到v_j不存在路径，则记d（v_i，v_j）=∞。

- 距离的性质：

  （1）d（v_i，v_j）≥0；

  （2）d（v_i，v_j）+ d（ v_j，v_k）≥d（v_i，v_k）。

4.2 路径与连通性

4.2.2图的连通性

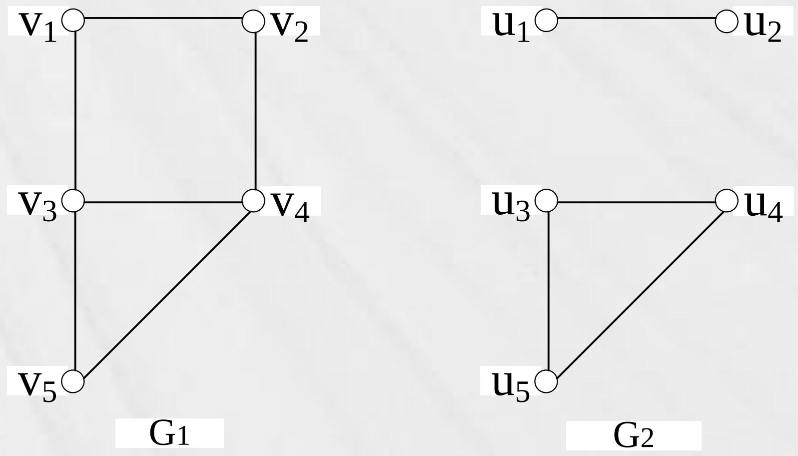
- 定义4.14　　设图G =（V，E）中，如果从结点v_i到v_j存在一条路径，则称从v_i到v_j是可达的。规定，结点v_i自身从v_i可达。
- 定义4.15　　设图G =（V，E），V = {v_1，v_2，…，v_n}，E = {e_1，e_2，…，e_m}，则G的可达性矩阵R（G）=（r_{ij}）$_{n\times n}$是一个n阶方阵，简记作R，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果从}v_i\text{到}v_j\text{可达}\\ 0 & \text{如果从}v_i\text{到}v_j\text{不可达}\end{cases}$$

4.2 路径与连通性

1.无向图的连通性

- 在无向图G中，如果它的任何两个结点间均是可达的，则称图G为连通图，否则称G是非连通图。
  - 在下面图中，图G1任何两个结点间均可达，因此是连通的；图G2则是不连通的，因为结点u1、u2与结点u3、u4、u5之间是不可达的。



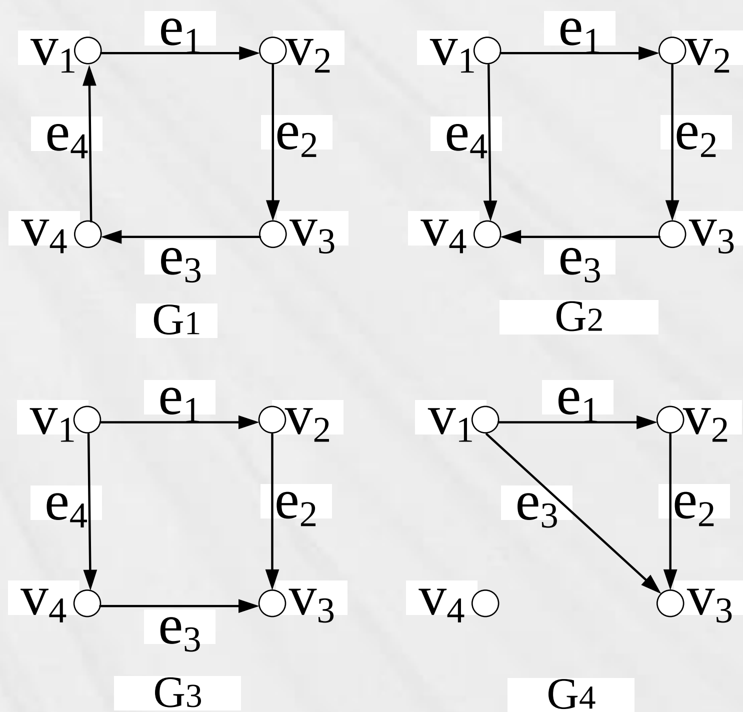
4.2 路径与连通性

2.有向图的连通性

- 定义4.16 在有向图G中，如果它的任何两个结点间均是可达的，则称图G为强连通图；若任何两个结点间至少从一个结点到另一个结点是可达的，则称G是单向连通图；若忽略G中各边的方向时G是无向连通图，则称G是弱连通图。

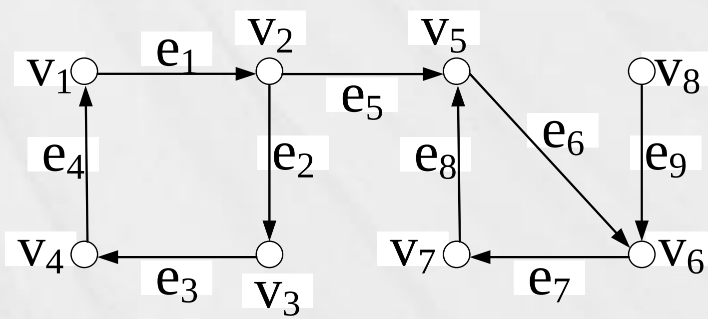
4.2 路径与连通性

- 在下面图中，图G1任何两个结点间均可达，因此是强连通的；图G2是单向连通的；图G3是弱连通的；图G4是非连通的。



4.2 路径与连通性

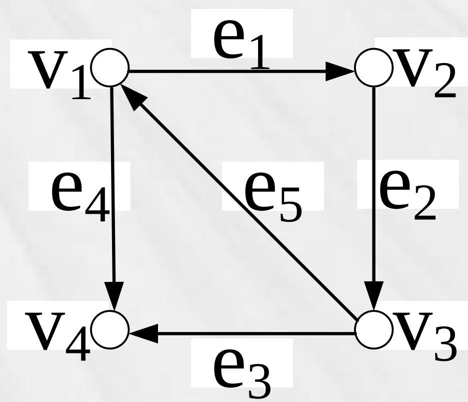
- 定义4.17 在有向图G中，具有极大强连通性的子图，称为G的一个强连通分图；具有极大单向连通性的子图，称为G的一个单向连通分图；具有极大弱连通性的子图，称为G的一个弱连通分图。
  - 下图G=（V，E）中，V1={v1，v2，v3，v4}，V2={v5，v6，v7}，V3={v8}的导出子图G[V1]，G[V2]，G[V3]均是G的强连通分图；V4={v1，v2，v3，v4，v5，v6，v7}，V5={ v5，v6，v7，v8}的导出子图G[V4]和G[V5]均是G的单向连通分图；由于G本身是弱连通的，因此，G的弱连通分图就是自身。



4.2 路径与连通性

3.可达性矩阵的计算

- 下图G的邻接矩阵A如右所示，求A^2，A^3、$B = E + A + A^2 + A^3$和可达性矩阵R。



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

一般的，对任意图G=（V，E），利用图G的邻接矩阵A，分以下两步可得到图G的可达性矩阵R：

（1）计算$B= E + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$；

（2）将矩阵中B不为零的元素均改为1，为零的元素不变，所得的矩阵就是可达性矩阵R。

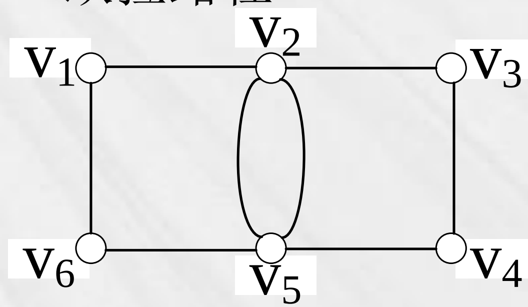
4.3 欧拉图与汉密尔顿图

4.3.1欧拉图

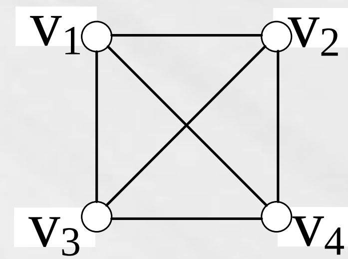
- 定义4.18 设多重图G=（V，E），经过图G所有边的简单回路称为欧拉回路，存在欧拉回路的图称为欧拉图；经过图G所有边的简单路径（非回路）称为欧拉路径。

4.3 欧拉图与汉密尔顿图

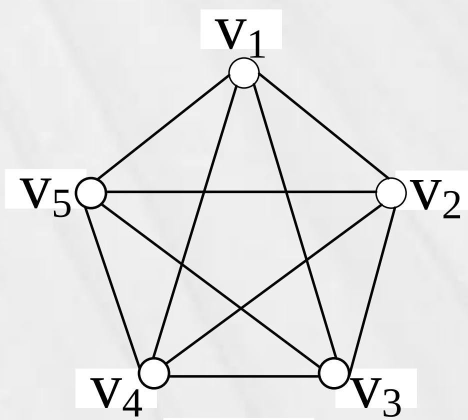
❖ 在下面的各无向图中，哪些有欧拉回路？哪些有欧拉路径？



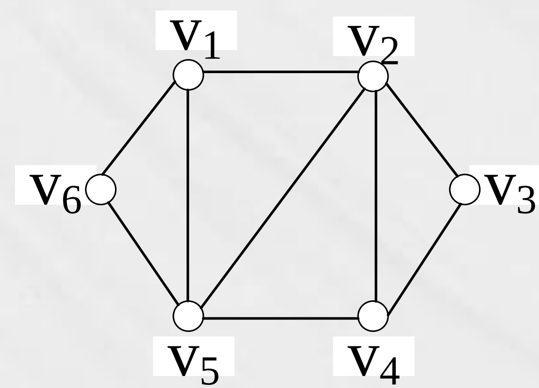
G1



G2



G3



G4

4.3 欧拉图与汉密尔顿图

- 定理4.4 连通的无向图G=（V，E）是欧拉图的充分必要条件是，图G中所有结点的度均为偶数；连通的无向图G=（V，E）存在一条v_i到v_j的欧拉路径的充分必要条件是， v_i和v_j是G中仅有的两个度为奇数的结点。

- 定理4.5 连通的有向图G =（V，E）是欧拉图的充分必要条件是，G的所有结点的入度等于出度；连通的有向图G=（V，E）存在一条从v_i到v_j的欧拉路径的充分必要条件是，v_i和v_j是G中仅有的两个度为奇数的结点，并且v_i的出度比入度大1， v_j出度比入度小1，其余结点入度等于出度。

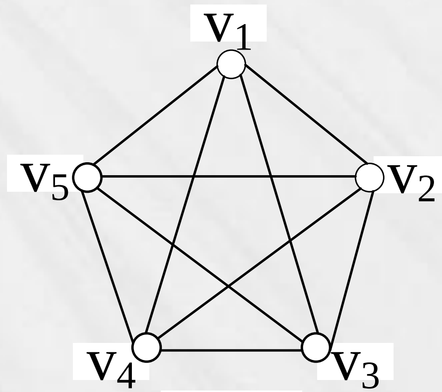
4.3 欧拉图与汉密尔顿图

4.3.2汉密尔顿图

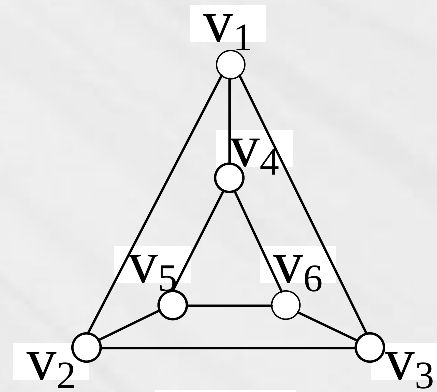
❖ 定义4.19 设图G =（V，E），经过图G所有结点的基本回路称为汉密尔顿回路，存在汉密尔顿回路的图称为汉密尔顿图；经过图G所有结点的基本路径（非回路）称为汉密尔顿路径。

4.3 欧拉图与汉密尔顿图

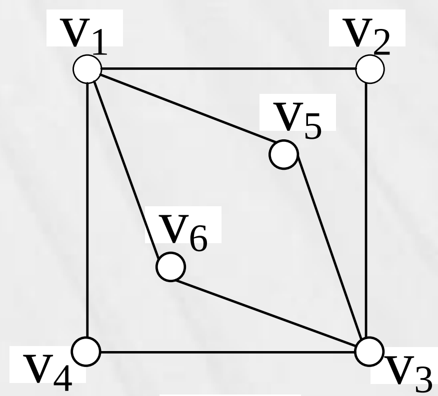
- 在下面的各无向图中，哪些有汉密尔顿回路？哪些有汉密尔顿路径？



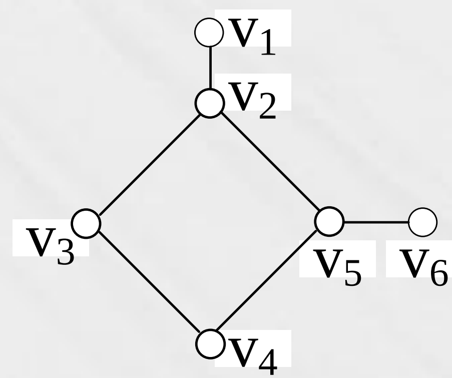
G1



G2



G3



G4

4.3 欧拉图与汉密尔顿图

- 定理4.6 若G=（V，E）是汉密尔顿图，则对于结点集V的任一非空子集S均有W（G – S）≤|S|，其中W（G – S）是从G中删除S后所得到图的连通分图数。

- 定理4.7 设G=（V，E）是具有n（n≥3）个结点的无向简单图，若对于任意一个结点v都有d（v）≥n/2，则G是汉密尔顿图。

- 定理4.8 设G=（V，E）是具有n（n≥3）个结点的无向简单图，若对于G中每一对不相邻的结点u，v均有d（u）+d（v）≥n，则G是一个汉密尔顿图。

- 推论 完全图Kn（n≥3）均是汉密尔顿图。

- 定理4.9 若G=（V，E）是具有n个结点的有向简单图，对于任意一个结点v都有d^+（v）+ d^-（v）≥n，则G是汉密尔顿图。

4.4 图的应用*

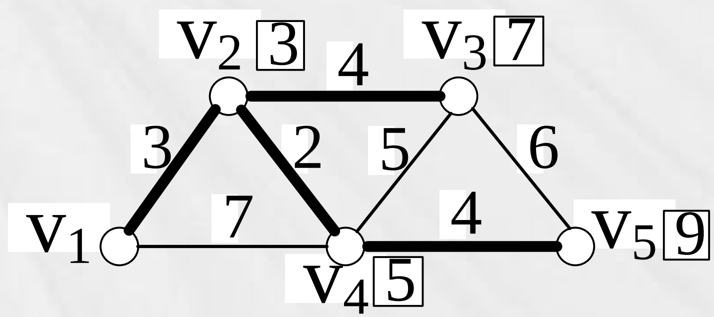
4.4.1最短路径问题

- 定义4.20 对于图G =（V，E）的每条边e，都附以一个实数　　w（e），称w（e）为边e上的权。G连同在它边上的权称为加权图，加权图常记作G=（V，E，W），其中，W = {w（e）｜e∈E}。若e的端点是v_i、v_j，常用w（v_i，v_j）表示边e的权。
  - 在加权图中，若给定了起始结点v_i及终止结点v_j，且v_i和v_j连通，可能存在多条连通v_i和v_j的路径，而其中最短路径的长度称为从v_i到v_j的距离，记作d（v_i，v_j）。

- 权为正数的最短路径的性质：若（$v_1v_2\ldots v_{m-1}v_m$）是从v_1到v_m的最短路径，则（$v_1v_2\ldots v_{m-1}$）是从v_1到v_{m-1}的最短路径。

4.4 图的应用*

- 在下面的加权图中，图G =（V，E，W）结点v_1到其余结点的最短路径如图中方框所标明的数值所示。

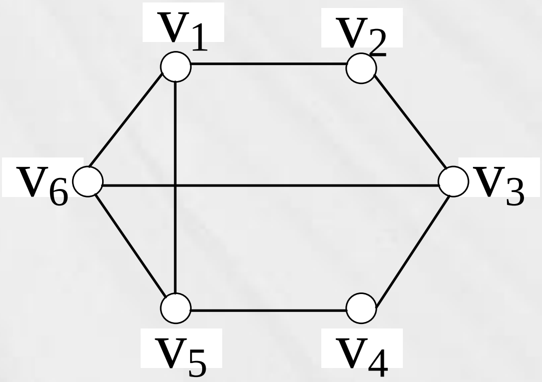


4.4 图的应用*

4.4.2支配集与通讯系统建站问题

- 在一个连通图G =（V，E）中，结点集V的一个子集D，凡是V中不在D中的结点，均有D中结点与之相邻接，这样的子集D称为图G的一个支配集。

- 在下面的图G =（V，E）中，V的子集{v1，v2，v3，v4，v5}是G的支配集，{v2，v4，v6}也是G的支配集，但是{v2，v4}不是G的支配集，因为v6不与v2或v4相邻接。



4.4 图的应用*

❖ 支配集有如下性质：

（1）如果图G=（V，E）中无孤立点，则图G中存在一个支配集D，使得G中除D以外的所有结点也组成了一个支配集。

（2）如果图G=（V，E）中无孤立点，D为图G的极小支配集，则V – D也是一个支配集。

本章小结

- 图的基本概念
  - 有向图和无向图的定义
  - 简单图、子图
  - 图的基本性质
  - 图的邻接矩阵和关联矩阵表示
- 路径与连通性
  - 路径的概念
  - 图的可达性
  - 图的连通性关系密切
- 欧拉图和汉密尔顿图
  - 欧拉图的概念及判定条件
  - 汉密顿图的概念及判定条件
- 图论模型的应用