第1篇 集合论

第3章 函数

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

本章节目录

3.1 函数的概念与分类

3.1.1函数的概念

- 定义3.1 对集合X到集合Y的关系f，如果对任意的$x \in X$，都存在唯一的$y \in Y$，使得$<x，y> \in f$，则称f为从X到Y的函数（或映射），并记作f：$X \to Y$。$<x，y> \in f$，通常记作f（x）= y，称y为x的像（或函数值），称x为y的像源。

（1）函数f：$X \to Y$的定义域就是前域X，而不是X的子集，即，dom f = X。

（2）一般来说，函数f：$X \to Y$的值域是陪域的子集，即，ranf $\subseteq$ Y，我们也常用f（X）表示函数f的值域。

- 对于实数集R，f：$R \to R$，f（x）= x^3定义了一个函数，其定义域、陪域和值域均为R。
- 对于实数集R，f：$R \to R$，f（x）= 2^x定义了一个函数，其定义域、陪域均为R，值域为R+。
- 对于实数集R，f：$R \to R$，f（x）= sin x定义了一个函数，其定义域、陪域均为R，值域为闭区间[– 1，1] 。
- 对于实数集R，f：$R \to R$，f（x）= c，c是一个常数，这定义了常函数，其定义域、陪域均为R，值域为单元素集合{c}。

3.1 函数的概念与分类

- 定义3.2 设有函数f：X→Y，g：U→V，若有X = U、Y = V且对所有的x∈X，有f（x）=g（x），则称函数f和g相等，记作f = g。
  - 函数f：R→R，f（x）= 2^x和函数g：N→N，g（x）= 2^x是两个不同的函数，因为两个函数的定义域不同，陪域也不同。
  - 函数f：R→R，f（x）= sin x和函数f：R→R，f（x）= cos x是两个不同的函数，因为两个函数的变换规则不同。

3.1 函数的概念与分类

- 函数的表示
  - 枚举法
  - 描述法
  - 矩阵表示
  - 图表示
    - 关系图
    - 函数图像

3.1 函数的概念与分类

- 定义3.3 设X1，X2， …，Xn和Y为集合，如果f：X1×X2×…×Xn→Y为函数，则称f 为从X1，X2， …，Xn到Y的n元函数，对于任意x_i∈Xi，f(<x1，x2， …，xn>)通常记作f（x1，x2， …，xn）。
  - 函数f：R×R→R，f（x，y）= x + y采用了函数的记法表示了最基本的算术运算——加法。

3.1 函数的概念与分类

3.1.2函数的分类

1.满射

- 定义3.4 设f：X→Y是函数，如果ran f = Y，或者说，对任意y∈Y，存在x∈X，使得f（x）= y，则称f：X→Y是满射。
  - 函数f：R→R，f（x）= x^3由于值域为实数集R，因而是满射。
  - 函数f：R→R，f（x）= 2^x 不是满射，因为值域为正实数集R+≠R。
  - 函数f：R→R，f（x）= sin x也不是满射，因为值域为闭区间[–1，1]≠R。
  - 函数f：R→R，f（x）= c也不是满射，因为值域为单元素集{c}≠R。

3.1 函数的概念与分类

2.单射

- 定义3.5 设f：$X\to Y$是函数，对任意的u，$v\in X$，$u\neq v$，都有f（u）$\neq$ f（v），则称f：$X\to Y$是单射。
  - 函数f：$R\to R$，f（x）$= x^3$对于不同的u，$v\in R$，$u^3\neq v^3$，因而是单射。
  - 函数f：$R\to R$，f（x）$= 2^x$对于不同的u，$v\in R$，$2^u\neq 2^v$，因而是单射。
  - 函数f：$R\to R$，f（x）$= \sin x$不是单射，因为正弦函数是周期函数，对任意$u\in R$，f（u）= f（u + 2kπ），$k\in Z$。
  - 函数f：$R\to R$，f（x）= c也不是单射，因为它对任意的x，$y\in R$，都有f（x）= f（y）。

3.1 函数的概念与分类

3.双射

- 定义3.6 设f：X→Y是函数，如果f既是满射又是单射，则称f：X→Y是双射（或一一对应）。
  - 函数f：R→R，f（x）= x^3既是满射，又是单射，因而是双射 。
  - 函数f：R→R，f（x）= 2^x是单射，但是不是满射，因而不是双射 。
  - 函数f：R→R，f（x）= sin x不是满射，也不是单射，因而也不是双射。
  - 函数f：R→R，f（x）= c不是满射，也不是单射，因而也不是双射。

3.1 函数的概念与分类

❖ 定义3.7 设（X，≦）和（Y，≦）为全序集，函数f：X→Y对于任意u，v∈X。

- 若u≦v，有f（u）≦f（v），则称f为单调递增函数。
- 若u≦v，有f（u）≧f（v），则称f为单调递减函数。
- 若u＜v，有f（u）＜f（v），则称f为严格单调递增函数。
- 若u＜v，有f（u）＜f（v），则称f为严格单调递减函数。

显然，严格单调递增函数是单调递增函数，严格单调递减函数是单调递减函数。

3.2 函数的运算

3.2.1函数的复合

- 定义3.8 设有函数f：X→Y和g：Y→Z，则f和g的复合运算记作g。f，该运算的结果是一个序偶的集合，定义为{<x，z>| x∈X，z∈Z，存在y∈Y使得y = f（x）且z = g（y）}

  - 注意：函数复合运算的书写顺序与关系复合运算的书写顺序相反。

3.2 函数的运算

- 定理3.1 设f：X→Y，g：Y→Z，那么g∘f为从X到Z的函数。

证明：显然，g∘f的结果是一个关系。要证明它是一个函数，还需要证明g∘f满足函数的两个条件。

对任意x∈X，由f是函数，所以存在y∈Y使得f（x）= y。同理，由g是函数，对于这个y，存在z∈Z使得g（y）=g（f（x））= z。因而，对任意x∈X，都有z∈Z使得<x，z>∈gf。因此，满足像的存在性条件。

假设对某个x∈X，存在z1，z2∈Z，使得<x，z1>，<x，z2>∈g∘f。由函数复合运算的定义，存在y1，y2∈Y，使得y1 = f（x）且g（y1）= z1和y2 = f（x）且g（y2）= z2。由f是函数，得y1 = y2；又由g是函数，得z1 = z2。因此，满足的像的唯一性条件。

综上，g∘f为从X到Z的函数，并且（g∘f）（x）= g（f（x））。

3.2 函数的运算

- 设有实函数f（x）= 2x + 1，g（x）= x^2 + 1，h（x）= sin x，求g ◦ f，f ◦ g，h ◦ g，h ◦ （g ◦ f），（h ◦ g）◦ f。

解：（g ◦ f）（x）= g（f（x））= g（2x + 1）= （2x + 1）^{2} + 1 = 4x^2 + 4x +2，

（f ◦ g）（x）= f（g（x））= f（x^2 + 1）= 2（x^2 + 1）+ 1 = 2x^2 + 3，

（h ◦ g）（x）= h（g（x））= h（x^2 + 1）= sin（x^2 + 1），

（h ◦ （g ◦ f））（x）= h（（g ◦ f）（x））= h（4x^2 + 4x +2）= sin（4x^2 + 4x +2），

（（h ◦ g）◦ f）（x）=（h ◦ g）（f（x））=（h ◦ g）（2x + 1）= sin（（2x + 1）^{2} + 1）= sin（4x^2 + 4x +2）

3.2 函数的运算

- 函数的复合运算有下列性质：

  （1）$I_Y \circ f = f \circ I_X = f$；

  （2）一般来说，$g \circ f \neq f \circ g$，即，函数的复合运算不满足交换律；

  （3）$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$，即，函数的复合运算满足结合律。

- 定理3.2 设f：X→Y和g：Y→Z是函数，$g \circ f$是复合函数。

  （1）如果f和g是满射，那么$g \circ f$是满射；

  （2）如果f和g是单射，那么$g \circ f$是单射；

  （3）如果f和g是双射，那么$g \circ f$是双射.。

3.2 函数的运算

3.2.2函数的逆

- 定理3.3 设f：$X\to Y$是双射，则f^c：$Y\to X$也是双射。

  证明：我们已知f^c：是一个关系，要证明它是一个双射，首先要证明它是一个函数，再证明它是满射和单射。

  对任意$y\in Y$，由f是满射，存在$x\in X$使得$f(x)=y$，从而$\langle y, x\rangle\in fc$，满足函数像的存在性条件。假设对某个$y\in Y$，存在$x1$，$x2\in X$，使得$\langle y, x1\rangle$，$\langle y, x2\rangle\in f^c$，则，$f(x1)=f(x2)=y$，由$f$是单射，得$x1=x2$，满足的像的唯一性条件。因而，$f^c$：$Y\to X$是一个函数。

  对任意$x\in X$，由f是函数，存在$y\in Y$使得$f(x)=y$，因而$f^c(y)=x$，即，f^c是满射；对任意u，$v\in Y$，$u\neq v$，如果$f^c(u)=f^c(v)=x$，则$\langle x, u\rangle$，$\langle x, v\rangle\in f$，这与函数像的唯一性条件相违背，因此，$f^c(u)\neq f^c(v)$，即，f^c是单射。

综上，f^c：$Y\to X$是一个双射。

3.2 函数的运算

- 定义3.9 设f：X→Y是双射，则f^c：Y→X是f的逆函数（或反函数），习惯上常用f^{-1}表示。
  - 函数f：R→R，f（x）= x^3是双射的，它的逆函数为f^{-1}：R→R，f^{-1}（x）= $\sqrt[3]{x}$
  - 实数集R上的正弦函数不是一个双射，因而也不存在它的逆函数。

- 设f：X→Y是双射，函数逆运算满足下述性质：

  （1）$(f^{-1})^{-1} = f$；

  （2）$f^{-1} \circ f = I_X$，$f \circ f^{-1} = I_Y$；

  （3）$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$。

3.3 计算机科学中常用的两类函数*

3.3.1取整函数

- 定义3.10 取整函数的定义域为实数集R，值域为整数集Z。
  - 上取整函数记作$\lceil x \rceil$，取值为最小的大于等于x的整数；
  - 下取整函数记作$\lfloor x \rfloor$，取值为最大的小于等于x的整数。

3.3 计算机科学中常用的两类函数*

3.3.2哈希函数

- 哈希函数应至少满足以下条件：

  （1）函数应该容易计算出来，以减少计算时间；

  （2）函数应该尽可能是满射，以有效利用存储空间；

  （3）函数应该具有随机性，即，可以将关键字均匀地映射到存储空间中。

- 最常见的哈希函数为求余函数，即

  h（k）= k mod m 。

3.4 基数*

3.4.1基数的概念

- 定义3.11 集合S的元素个数称为S的基数或势，记作|S|。
  - 英文字母表Σ = {a，b，…，z}的基数|Σ| = 26。
  - 一年中的季节构成的集合A = {春，夏，秋，冬}的基数|A| = 4。
  - 10以内的素数构成的集合B = {2，3，5，7}的基数|B| = 4。

3.4 基数*

- 定义3.12 如果存在集合{1，2，…，n}到A的双射，则集合A称为有限集，否则，称为无限集。

- 定理3.4 自然数集N为无限集。

证明：根据定义，只需证明N不是有限集，因此，采用反证法，假设N是有限集。

由N是有限集，存在一个从{1，2，…，n}到N的双射f。

令L = 1 + max{f（1），f（2），…，f（n）}。显然，L∈N。

但是，对任意x∈{1，2，…，n}，f（x）≠L。这就是说，f不是满射，与假设f是从{1，2，…，n }到N的双射矛盾。

因此N不是有限集，是无限集。

3.4 基数*

❖ 定义3.13 设A和B为任意集合。

（1）如果存在一个从A到B的双射，则称A和B有相同的基数（或者称集合A与B等势），记作|A| = |B|（或A～B）。

（2）如果存在一个从A到B的单射，则称A的基数小于等于B的基数，记作|A|≤|B|。

（3）如果存在一个从A到B的单射，但是不存在双射，则称A的基数小于B的基数，记作|A|＜|B|。

3.4 基数*

- 等势具有下面的性质：

（1）对于任意集合A有A～A，即，集合间的等势关系满足自反性；

（2）对于任意集合A、B，如果A～B，则B～A，即，集合间的等势关系满足对称性；

（3）对于任意集合A、B、C，如果A～B，B～C，则A～C，即，集合间的等势关系满足传递性。

即，集合间的等势关系是一种等价关系。

3.4 基数*

- 如果O表示奇自然数的集合{1，3，5，…}，E表示偶自然数的集合{0，2，4，…}，证明：O、E、N这三个集合两两等势。
- 证明：实数集R与开区间（0，1）等势。
- 定理3.5 设A和B为任意集合，则下面三条有且仅有一条成立。

  （1）|A|=|B|

  （2）||B|＜|A

  （3）|A|＜|B|
- 定理3.6 设A和B为任意集合，如果|A|≤|B|且|B|≤|A|，则|A|=|B|。

3.4 基数*

3.4.2可数集与不可数集

- 定义3.13 设A是一无限集，如果存在从N到A的双射，则称集合A为可数无限集，称A的基数为$\aleph_0$，记作$|A| = \aleph_0$。$\aleph_0$读作“阿列夫零”。有限集和可数无限集统称为可数集。其它无限集称为不可数无限集，简称不可数集。
- 定理3.7 一个集合是可数无限集的充要条件是它的元素可以排成一个无穷序列的形式。
- 定理3.8 实数集R是一个不可数集。

R的基数为$\aleph$，记作$|R|=\aleph$。

本章小结

- 函数的概念
  - 函数的表示
  - 函数的分类：满射、单射和双射
- 函数的运算
  - 函数的复合一定是函数
  - 函数的逆不一定是函数
- 函数的应用
  - 取整函数
  - 哈希函数
- 基数的概念