一元流体动力学基础

流体流动的起因

1、浮力造成的自然流动

2、压差造成的强制流动

由不同的起因所造成的流体的流动过程具有不同的流动特征。造成流体流动的原因可分为两大方面：一是由浮力造成的，二是由外力或压差造成。根据流体流动的起因不同，可将流体的流动分为自然流动和强制流动。

流体流动的起因

1. 自然流动：在流体流动的体系内，因各部分流体的温度不同所导致的密度不同而产生的浮力作用所造成的流动，称自然流动。在某流体中，当流体的某一部分受热时，则会因温度的升高而使其密度减小，此时，将在周围温度较低、密度较大的流体所产生的浮力作用下产生上浮的流动；反之，则产生下降的流动。流体的自然流动一般都是和热量的传递过程同时存在的，流体流动的特征则直接和换热过程有关，流场的特征与换热的温度场相互制约而并存。因此，自然流动中的动量交换过程一般来说是较为复杂的。

流体流动的起因

2.强制流动：在流动的体系内，流体在外力或压差的作用下所产生的流动称为强制流动。如在泵或风机所提供的压力以及在喷射器所提供的喷射力作用下的流体的流动都属于强制流动。

对于流体流动的分类，除按流体流动的起因分类外，还有其它一些分类方法，如前已提到过的不可压缩流体的流动和可压缩流体的流动；理想流体的流动和粘性流体的流动；

以及以后我们将要学到的稳定流动和非稳定流动；层流流动和紊流流动；有旋流动和无旋流动；亚音速流动和超音速流动等。

流体动力学主要是研究运动参数（速度、加速度等）随空间位置和时间的变化规律，以及运动与力的关系

主要内容

- 基本概念
- 连续性方程
- 柏努利方程
- 动量方程

本章主要介绍与液体运动有关的基本概念及液体运动所遵循的普遍规律并建立相应的方程式。

主要内容:

❖描述液体运动的两种方法

❖欧拉法的若干基本概念

❖恒定一元流的连续性方程式

❖实际液体恒定总流的能量方程式

❖能量方程式的应用举例

❖实际液体恒定总流的动量方程式

❖恒定总流动量方程式的应用举例

§3.1　流体运动的描述方法

一. 描述流体运动的困难

	离散质点系	流体	刚体
质点间的约束	无	弱	强
质点数	N个	无穷	无穷

二. 描述流体运动的方法

拉格朗日法

跟踪

着眼于流体质点，跟踪质点描述其运动历程

欧拉法

布哨

着眼于空间点，研究质点流经空间各固定点的运动特性

拉格朗日法 —— 着重于流体质点

跟踪个别流体质点

研究其位移、速度、加速度等随时间的变化情况

综合流场中所有流体质点的运动

流场的运动

流场中全部质点都包含在（a, b, c）的变数中

t_0 时刻:

跟踪个别流体质点(a, b, c)

t 时刻:

质点从(a, b, c)运动到（x, y, z）

$$\begin{cases} x = f_1(a, b, c, t) \\ y = f_2(a, b, c, t) \\ z = f_3(a, b, c, t) \end{cases}$$

(a,b,c) 是拉格朗日变数，即 $t=t_0$ 时刻质点的空间位置，用来对连续介质中无穷多个质点进行编号，作为质点标签。

$$\begin{matrix} x = \\ y = \\ z = \end{matrix}\begin{cases} f_1(a,b,c,t) \\ f_2(a,b,c,t) \\ f_3(a,b,c,t) \end{cases}$$

当（a, b, c）变化时，这就表示全部质点随时间的位置变动函数。当t变化时，便是质点（a, b, c）运动轨道的参数方程

- 自变量（a, b, c, t）称为拉格朗日变数

- 流体在运动过程中其它运动要素和物理量的时间历程也可用拉格朗日法描述，如速度、密度等：

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(a,b,c,t)$$

$$\rho = \rho(a,b,c,t)$$

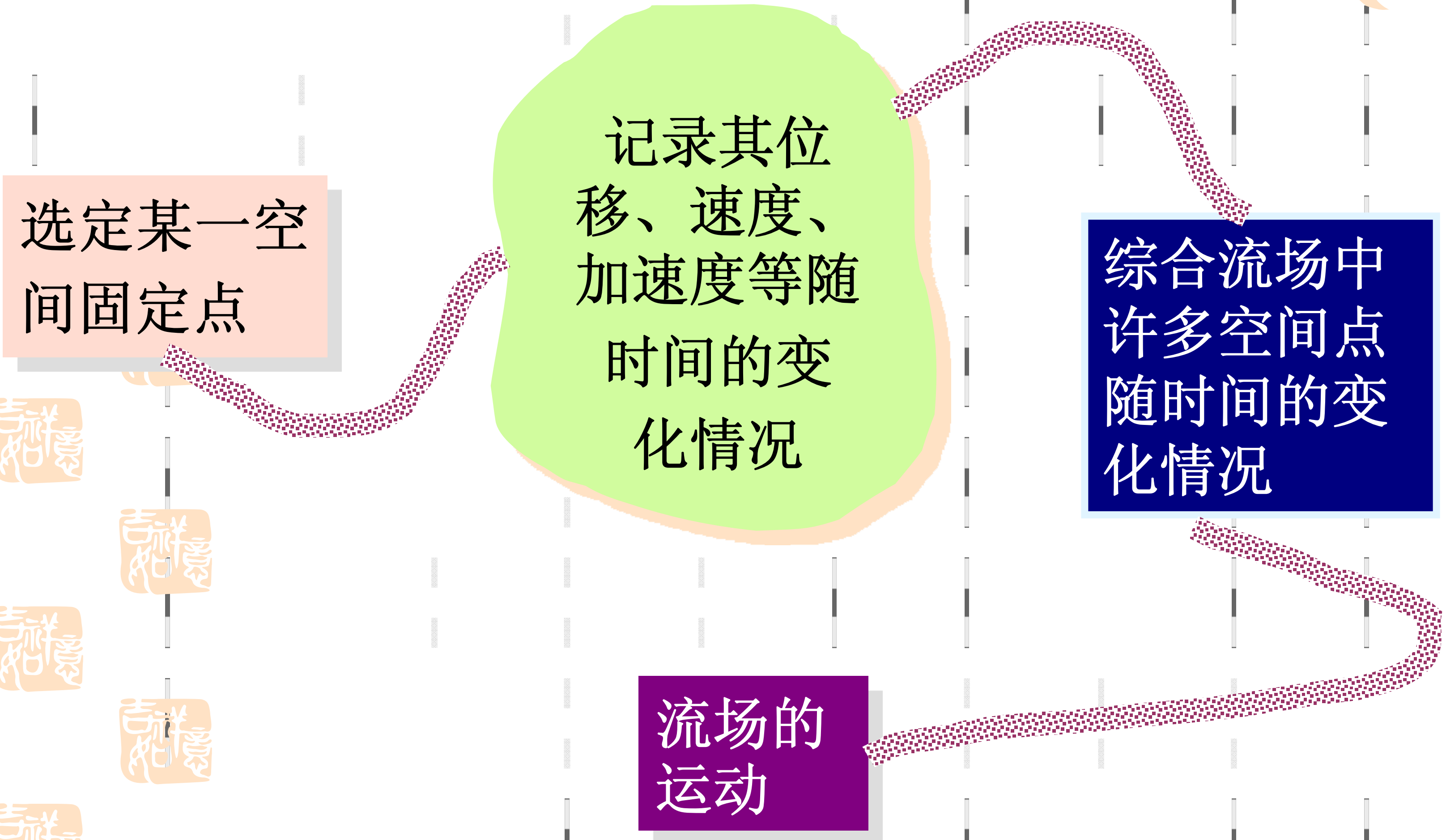
- 质点（a, b, c）的速度投影和加速度投影为：

$$\left\{\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f_1(a,b,c,t)}{\partial t} \\ u_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2(a,b,c,t)}{\partial t} \\ u_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f_3(a,b,c,t)}{\partial t} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ a_y &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ a_z &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \end{aligned}\right.$$

拉格朗日法的缺陷

在使用拉格朗日法时必须找到x(a, b, c, t)；y(a, b, c, t)；z(a, b, c, t)等的函数形式，即跟踪每一个质点进行研究。由于流体具有易流动性，对每一个质点进行跟踪是十分困难的。因此，除了在一些特殊情况（波浪运动。水滴等的运动时），很少采用拉格朗日法。

欧拉法 —— 着重于研究空间固定点的情况



选定某一空间固定点

记录其位移、速度、加速度等随时间的变化情况

综合流场中许多空间点随时间的变化情况

流场的运动

- 分析流动空间某固定位置处，流体运动要素（速度、加速度）随时间变化规律

不同时刻不同的流体质点通过空间某一点

同一流体质点在不同时刻经过空间不同点

分析某一空间位置转移到另一位置，运动要素随位置变化的规律

欧拉法并没有直接给定流体质点的运动轨迹

- 欧拉法是流场法，它定义流体质点的速度矢量场为：

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(x,y,z,t)$$

(x,y,z) 是空间点（场点）。流速 **u** 是在 t 时刻占据(x,y,z) 的那个流体质点的速度矢量。

- 流体的其它运动要素和物理特性也都可用相应的时间和空间域上的场的形式表达。如加速度场、压力场等：

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(x,y,z,t)$$

$$p=p(x,y,z,t)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$$

当t=t_0=常数，它便表示流场中同一时刻各点的速度分布情况

当时间t变化时，流体质点将从某一点M_0运动到另一点M，也就是说质点的空间坐标也会随时间发生变化。由此可见，x, y, z也是时间的函数，按复合函数求导原则，u_x, u_y, u_z对时间t求全导数，得：

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_x}{\partial z} \\ a_y = \dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ a_z = \dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$$

质点加速度

时变加速度

由流速不恒定性引起

位变加速度

由流速不均匀性引起

- 如果流场的空间分布不随时间变化，其欧拉表达式中将不显含时间 t ，这样的流场称为恒定流。否则称为非恒定流。

- 欧拉法把流场的运动要素和物理量都用场的形式表达，为在分析流体力学问题时直接运用场论的数学知识创造了便利条件。

- **欧拉法是描述流体运动常用的一种方法。**

§3.1　流体运动的描述方法

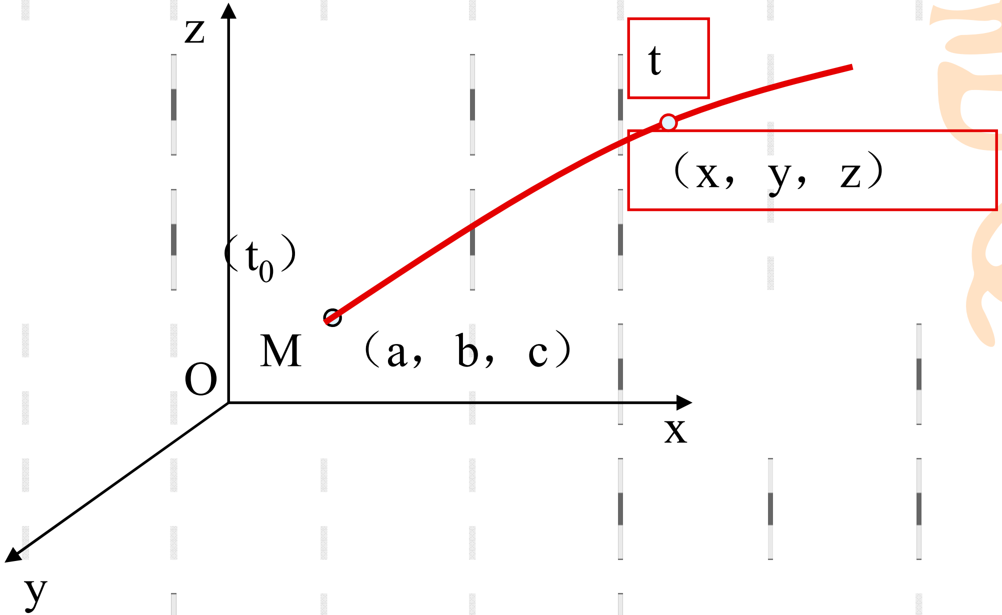
- 拉格朗日法 ——以研究单个液体质点的运动过程作为基础，综合所有质点的运动，构成整个液体的运动。

$$x = x(a,b,c,t)$$

$$y = y(a,b,c,t)$$

$$z = z(a,b,c,t)$$

a，b，c，t 称为拉格朗日变数



$$\left.\begin{aligned} x &= x(a,b,c,t) \\ y &= y(a,b,c,t) \\ z &= z(a,b,c,t) \end{aligned}\right\}$$

若给定a，b，c，即为某一质点的运动轨迹线方程。

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t} \\ u_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t} \\ u_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$

液体质点在任意时刻的速度。

- 速度分量可写为

$$u = u(a,b,c,t) = \frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t}$$

$$v = v(a,b,c,t) = \frac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t}$$

$$w = w(a,b,c,t) = \frac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t}$$

- 加速度分量可写为

$$a_x = a_x(a,b,c,t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(a,b,c,t)}{\partial t^2}$$

$$a_y = a_y(a,b,c,t) = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(a,b,c,t)}{\partial t^2}$$

$$a_z = a_z(a,b,c,t) = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 z(a,b,c,t)}{\partial t^2}$$

- 欧拉法——以考察不同液体质点通过固定的空间点的运动情况作为基础，综合所有空间点上的运动情况，构成整个液体的运动。
- 速度分量

$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$

$$p = p(x, y, z, t)$$

x，y，z，t 称为欧拉变数

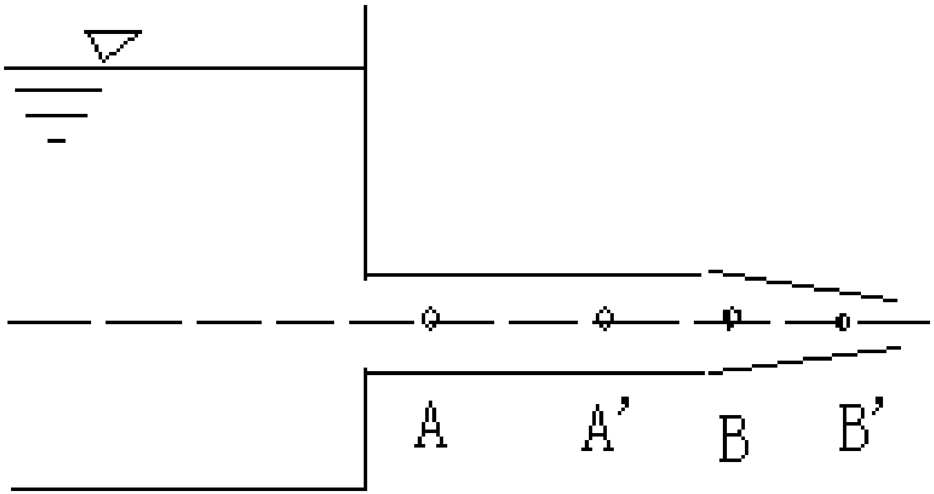
- 加速度分量

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

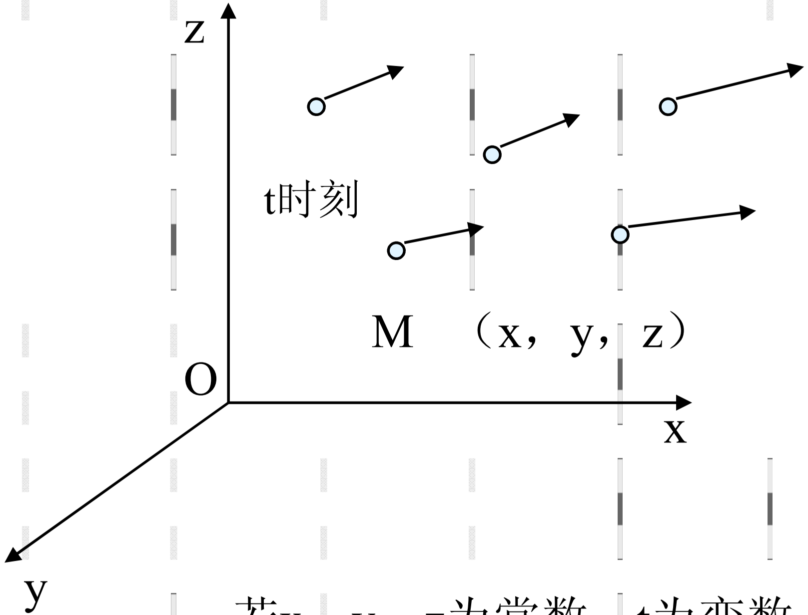
$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$



$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$



$$\left.\begin{aligned} u_x &= u_x(x,y,z,t) \\ u_y &= u_y(x,y,z,t) \\ u_z &= u_z(x,y,z,t) \end{aligned}\right\}$$

若x，y，z为常数，t为变数，

若t 为常数， x，y，z为变数，

若针对一个具体的质点，x，y，z，t均为变数，且有x（t），y（t），z（t），

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{du_x(x,y,z,t)}{dt} \\ a_y &= \frac{du_y(x,y,z,t)}{dt} \\ a_z &= \frac{du_z(x,y,z,t)}{dt} \end{aligned}\right\}$$

质点通过流场中任意点的加速度

【例3-1】 已知用拉格朗日变量表示得速度分布为$u=(a+2)e^t-2$，$v=(b+2)e^t-2$， 且t=0时， x=a， y=b。求（1）t=3时质点分布； （2）a=2，b=2质点的运动规律；（3）质点加速度。

【解】 根据（3-1-2）式得

$$\frac{\partial x}{\partial t}=(a+2)e^t-2$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=(b+2)e^t-2$$

将上式积分，得

$$x=(a+2)e^t-2t+c_1$$

$$y=(b+2)e^t-2t+c_2$$

上式中c1、c2为积分常数，它仍是拉格朗日变量的函数。

利用t=0时，x=a，y=b得c1=-2， c2=-2

$$X=(a+2)e^t-2t-2$$

$$y=(b+2)e^t-2t-2$$

（1）将t=3代入上式 得

$$X=(a+2)e^3-8 \qquad y=(b+2)e^3-8$$

（2）a=2，b=2时

$$x=4e^t-2t-2 \qquad y=4e^t-2t-2$$

（3）

$$\frac{\partial u}{\partial t}=(a+2)e^t \qquad \frac{\partial v}{\partial t}=(b+2)e^t$$

【例3-2】 在任意时刻，流体质点的位置是$x=5t^2$，其迹线为双曲线$xy=25$。质点速度和加速度在x和y方向的分量为多少？

【解】 根据公式得

$$u=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5t^2)=10t$$

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{25}{x}\right)=-25\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$=-25\frac{1}{(5t^2)^2}10t=-\frac{10}{t^3}$$

由公式可以得

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}=10$$

$$a_y=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{30}{t^4}$$

§ 3.2 恒定流和非恒定流

- 流场中液体质点通过空间点时所有的运动要素都不随时间而变化的流动称为恒定流。

- 只要有一个运动要素随时间而变化，就是非恒定流。

§ 3.3 流线和迹线

迹线——是指某液体质点在运动过程中，不同时刻所流经的空间点所连成的线。

流线——是指某一瞬时，在流场中绘出的一条光滑的矢量曲线，其上所有各点的速度向量都与该曲线相切。

流线能反映瞬时的流动方向 → 流线图

❗ 流线不能相交，不能为折线。

流线演示

举例1 2 3 4

▶

§3—3　迹线和流线

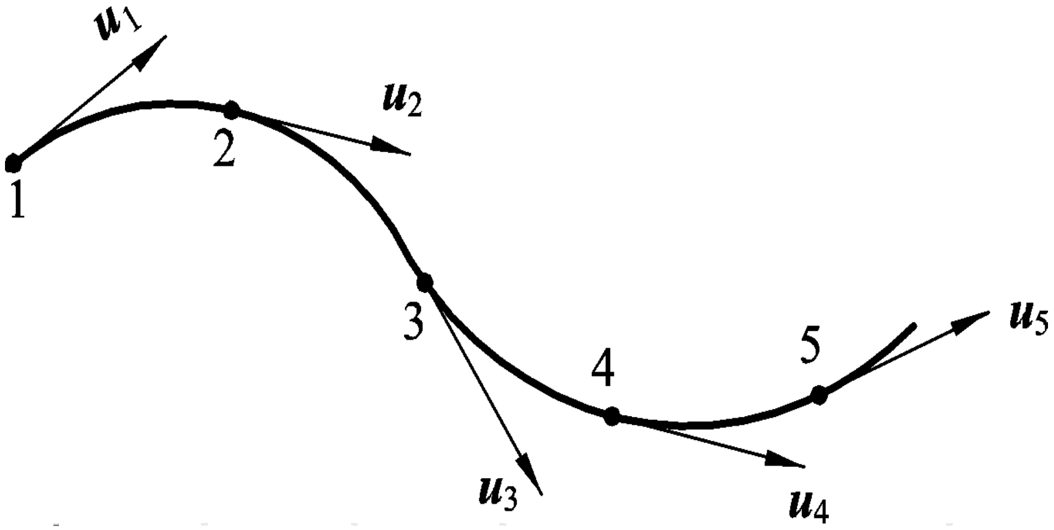
- **迹线是流体质点运动的轨迹，**是与拉格朗日观点相对应的概念。

- 拉格朗日法中位移表达式

$$x = x(a,b,c,t)$$

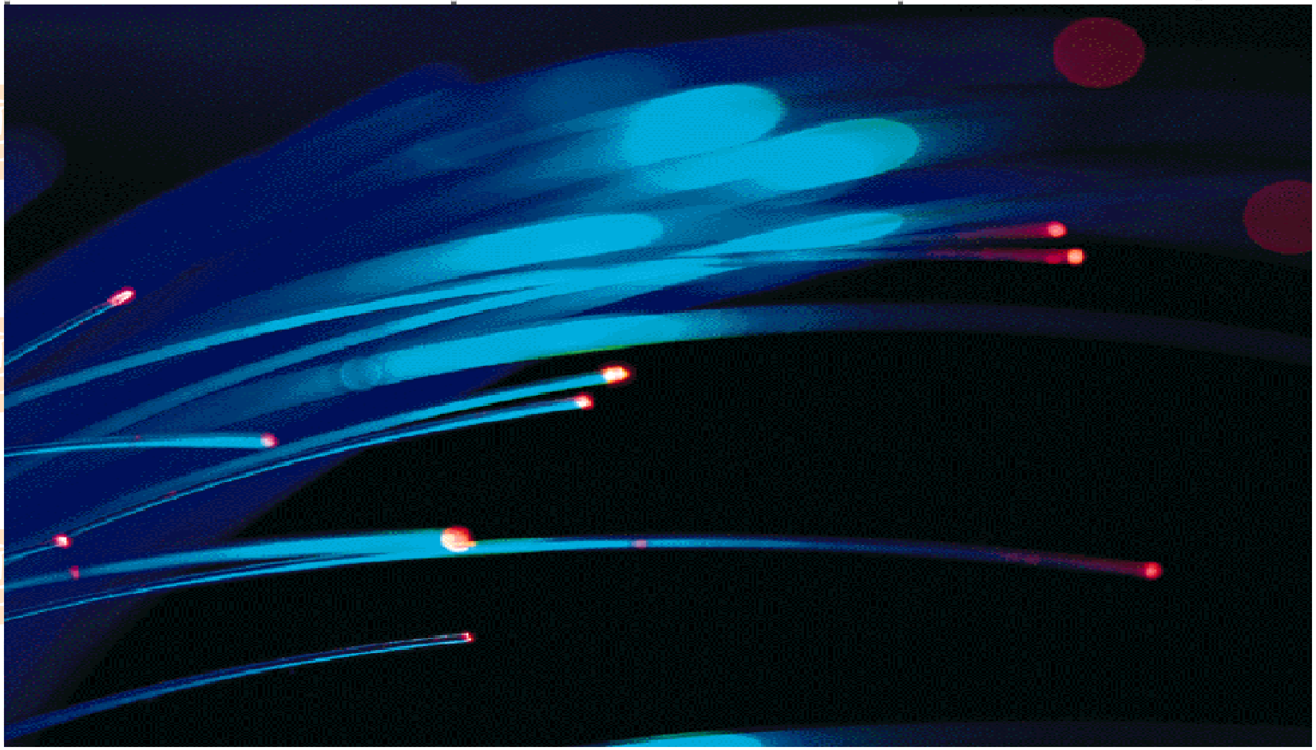
即为迹线的参数方程。

t 是变数，a,b,c 是参数。

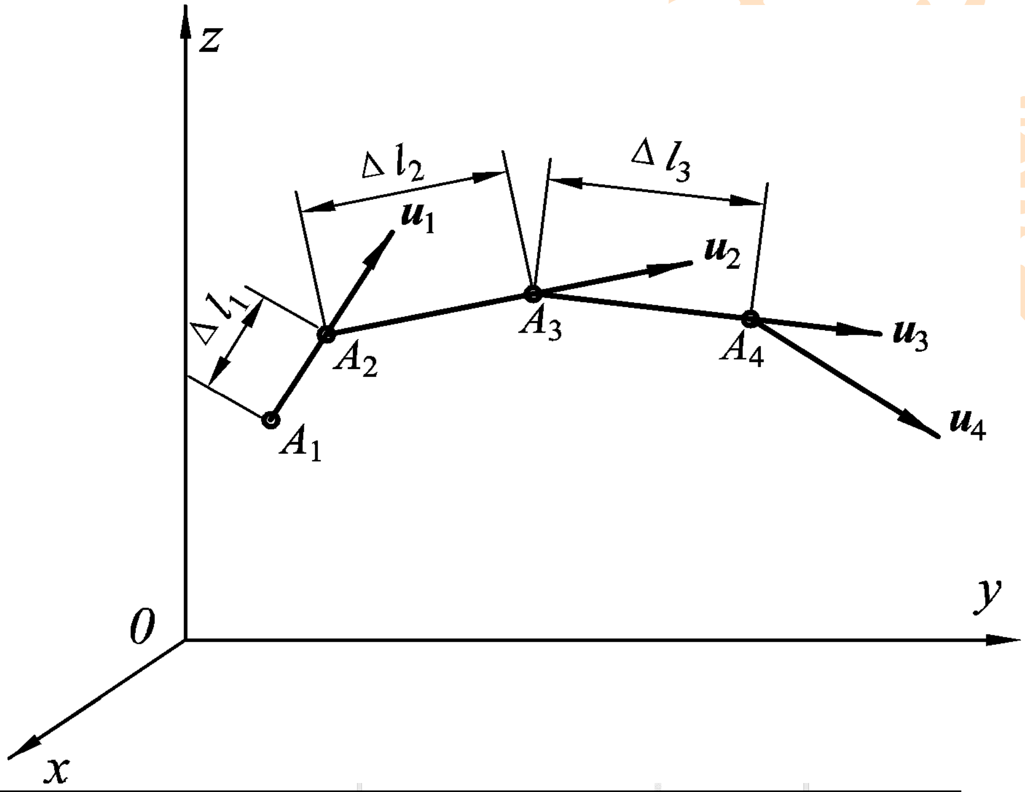


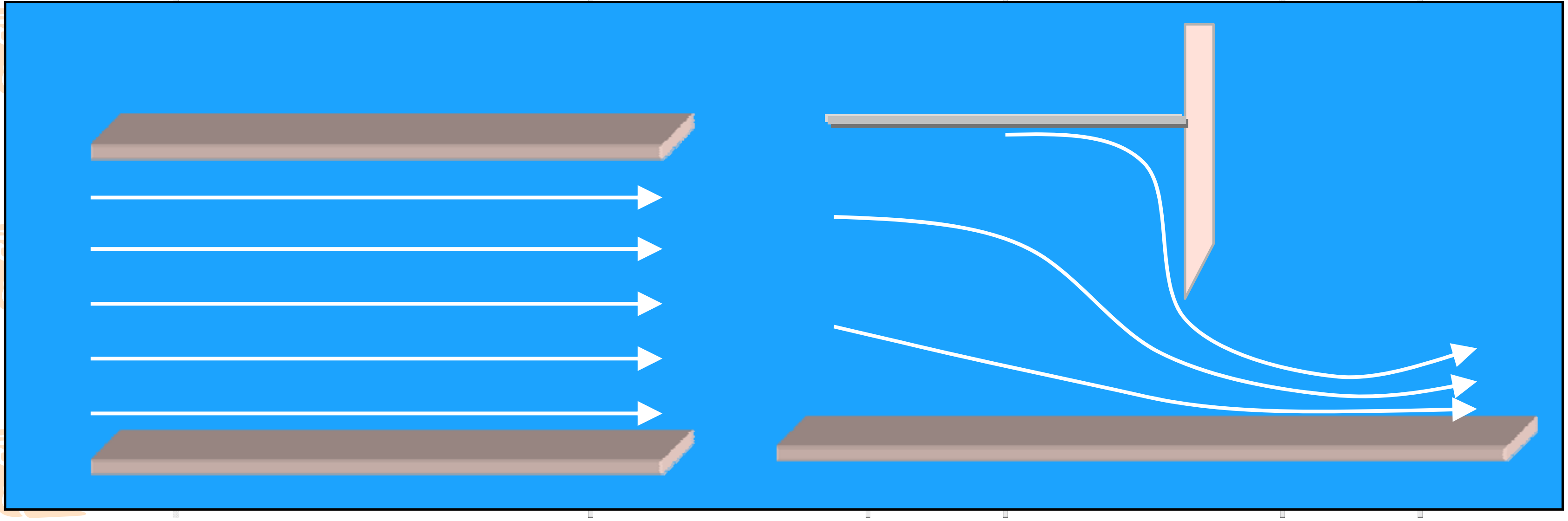
对不同的质点，迹线的形状可能不同；

对一确定的质点，其轨迹线的形状不随时间变化。



- 流线是同一时刻流场中连续各点的速度方向线。





- 根据流线的定义，可以推断：除非流速为零或无穷大处，流线不能相交，也不能转折。

- 在非定常流情况下，流线一般会随时间变化。在定常流情况下，流线不随时间变，流体质点将沿着流线走，迹线与流线重合。

- 迹线和流线最基本的差别是：迹线是同一流体质点在不同时刻的位移曲线，与拉格朗日观点对应，而流线是同一时刻、不同流体质点速度矢量与之相切的曲线，与欧拉观点相对应。即使是在定常流中，迹线与流线重合，两者仍是完全不同的概念。

流线的应用

流线可以用来表现流场；

通过作流线可使流场中的流动情形更为明白；

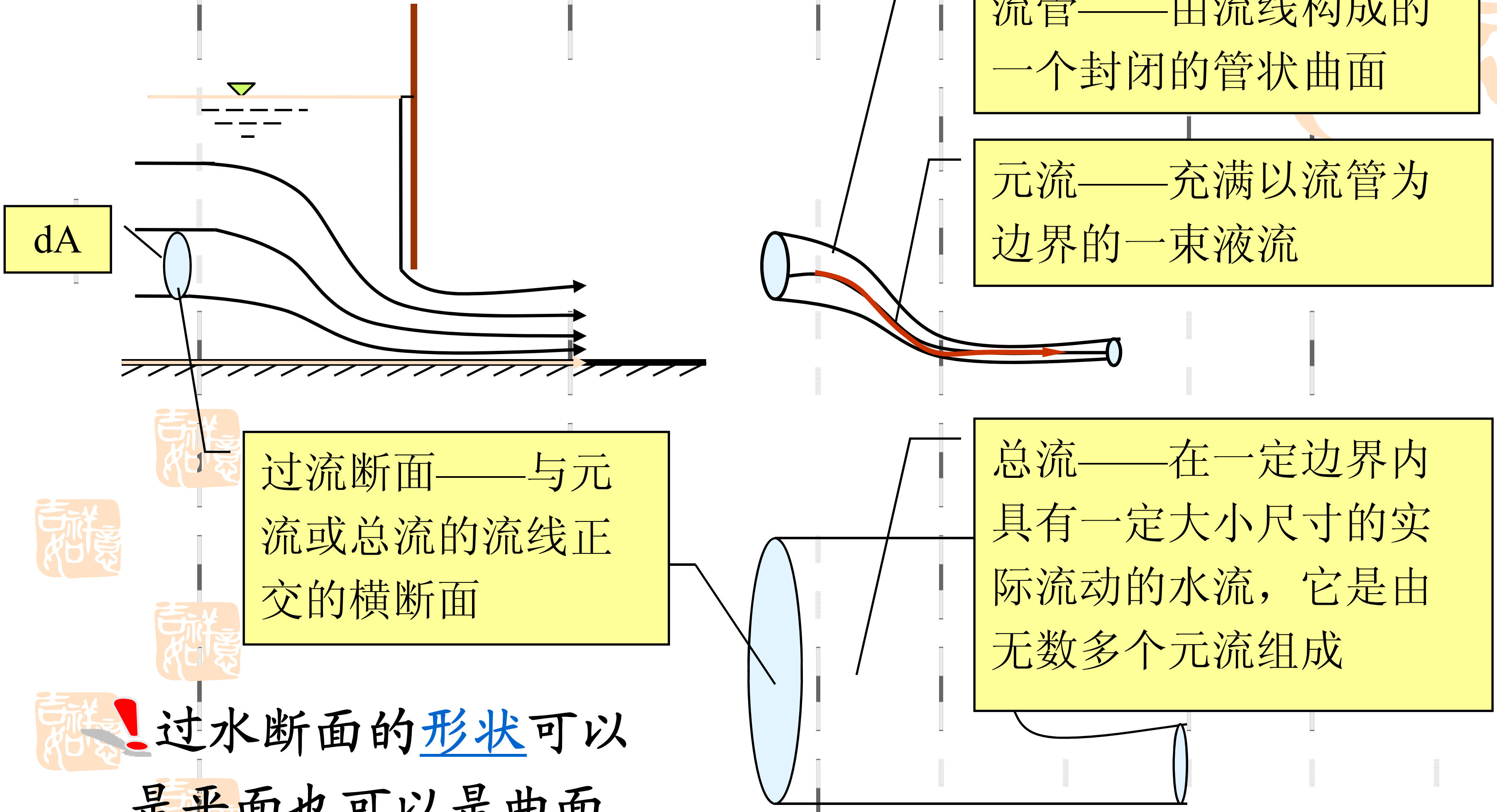
对于不可压缩流体，流线还能定性地反映出速度的大小。

流谱流线

Flow Spectrum And Streamline

§ 3.4 一元流动模型

流管、元流、总流和过流断面



流管——由流线构成的一个封闭的管状曲面

元流——充满以流管为边界的一束液流

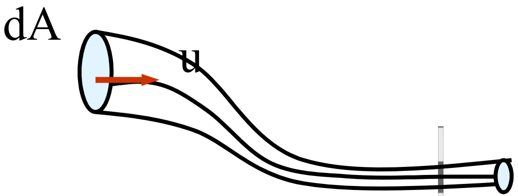
过流断面——与元流或总流的流线正交的横断面

总流——在一定边界内具有一定大小尺寸的实际流动的水流，它是由无数多个元流组成

❗过水断面的形状可以是平面也可以是曲面。

流量和断面平均流速

流量——单位时间内通过某一过水断面的液体体积，常用单位m^3/s，以符号Q表示。



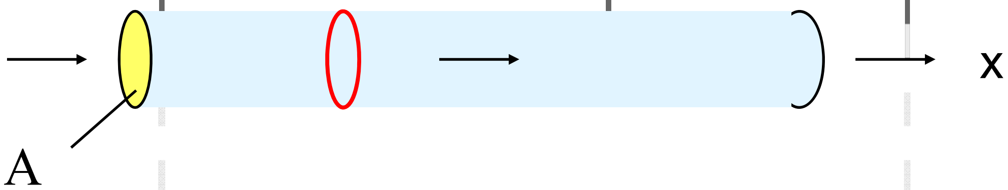
$$udA = dQ$$

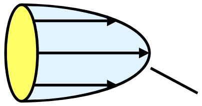
$$Q = \int_Q dQ = \int_A udA$$

断面平均流速——是一个想像的流速，如果过水断面上各点的流速都相等并等于V，此时所通过的流量与实际上流速为不均匀分布时所通过的流量相等，则该流速V称为断面平均流速。

$$V = \frac{\int_A udA}{A}$$

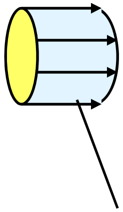
端面平均流速V可以将多元流简化为一元流,如:





旋转抛物面

$Q=\int_A udA$ 即为旋转抛物体的体积



断面平均流速V

$V\cdot A=Q$ 即为柱体的体积

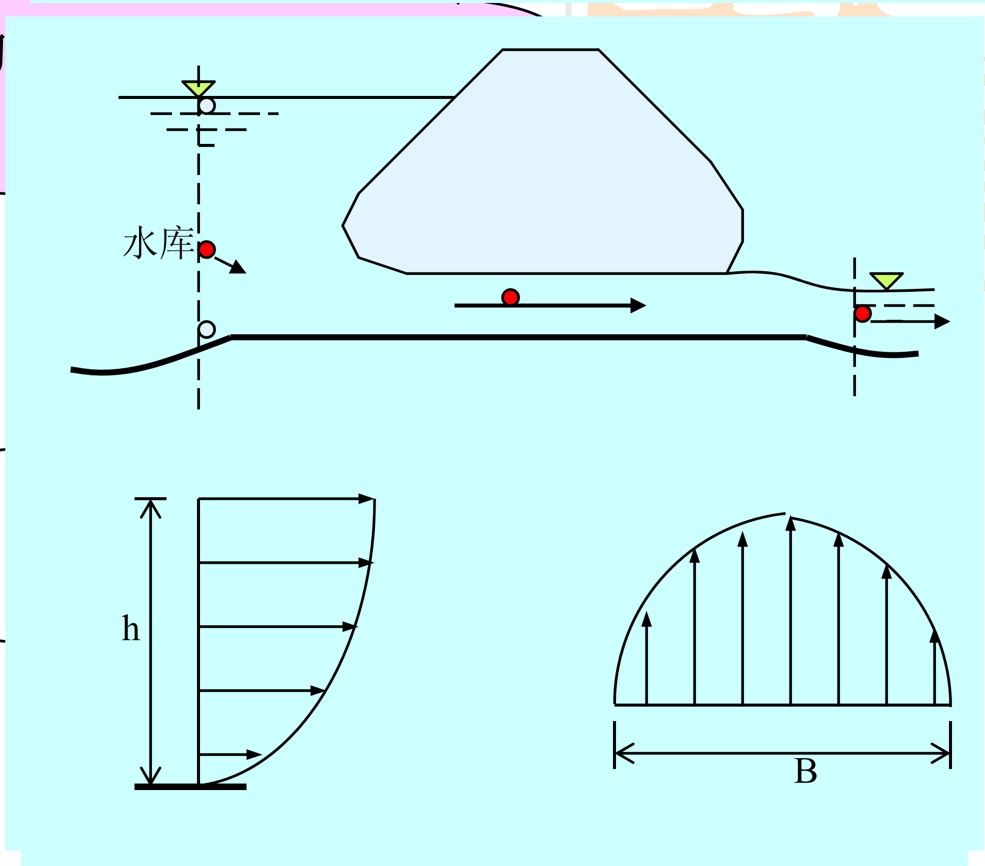
$$V=\frac{\int_A udA}{A}$$

则管道中的流速分布为v=v(x)

流动的

表征液体运动的
流速、加速度、

按运动要素是否随时间变化



按运动要素随空间坐标的变化

按流线是否为彼此平行的直线

非均匀流

渐变流

急变流

图示

均匀流、渐变流过水断面的重要特性

均匀流是流线为彼此平行的直线，应具有以下特性:

- 过水断面为平面，且过水断面的形状和尺寸沿程不变;
- 同一流线上不同点的流速应相等，从而各过流断面上的流速分布相同，断面平均流速相等;
- 均匀流（包括渐变流）过水断面上的动水压强分布规律与静水压强分布规律相同，即在同一过水断面上各点的测压管水头为一常数;

推论：均匀流过水断面上动水总压力的计算方法与静水总压力的计算方法相同。

动力学三大方程

三大守恒定律

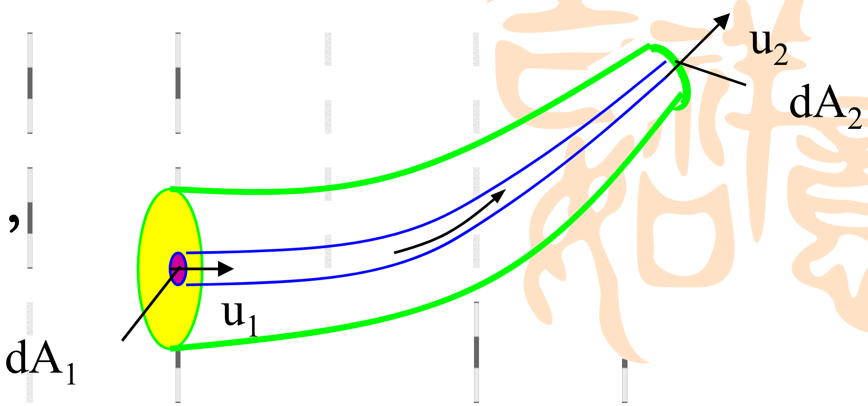
质量守恒 → 连续方程

能量守恒 → 能量方程

动量守恒 → 动量方程

恒定总流三大方程

§ 3. 5 连续性方程



在恒定总流中，取一微小流束，

依质量守恒定律：

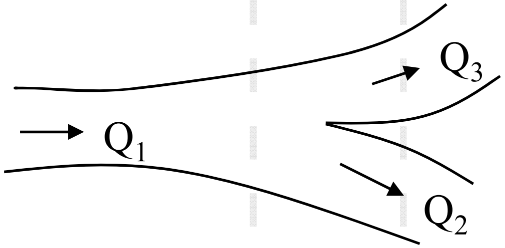
$\rho_1 u_1 dA_1 dt = \rho_2 u_2 dA_2 dt$　　设 $\rho_1 = \rho_2$ ，则 $u_1 dA_1 = u_2 dA_2$

即有： $dQ_1 = dQ_2$　　微小流束的连续性方程

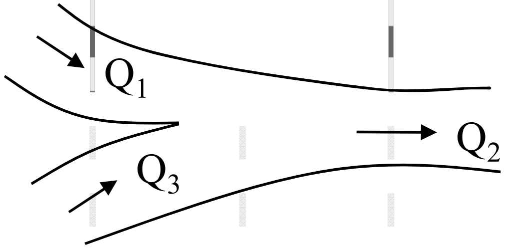
$$\left.\begin{array}{ll}\text{积分得：} & Q_1 = Q_2 \\ \text{也可表达为：} & V_1 A_1 = V_2 A_2\end{array}\right\}\text{恒定总流的连续性方程}$$

适用条件：恒定、不可压缩的总流且没有支汇流。

若有支流：

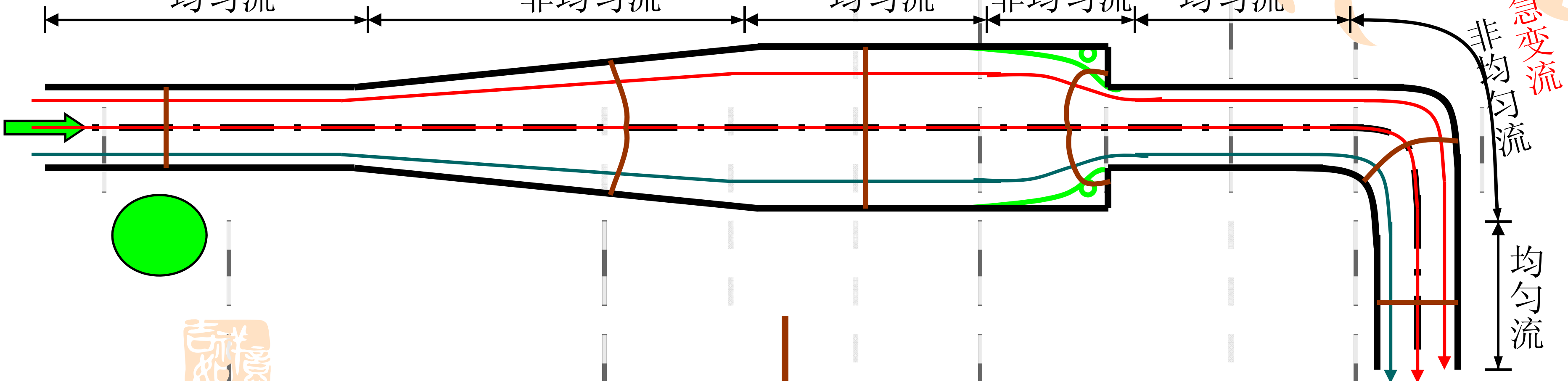


$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$



$$Q_1 + Q_3 = Q_2$$

流线图



均匀流

渐变流

非均匀流

均匀流

急变流

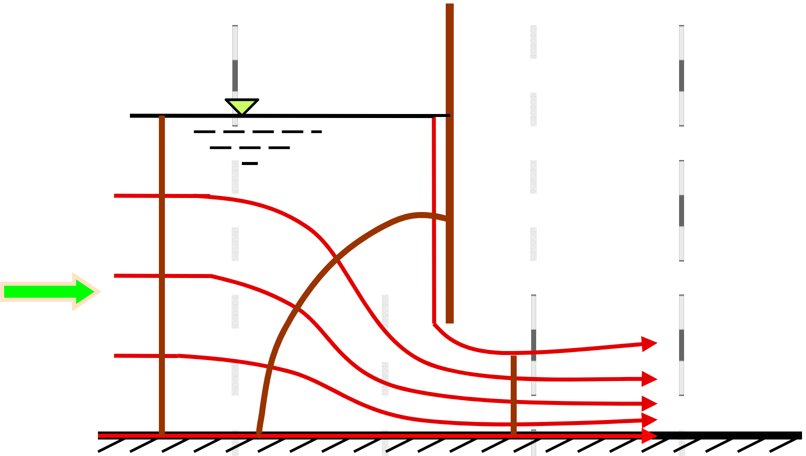
非均匀流

均匀流

急变流

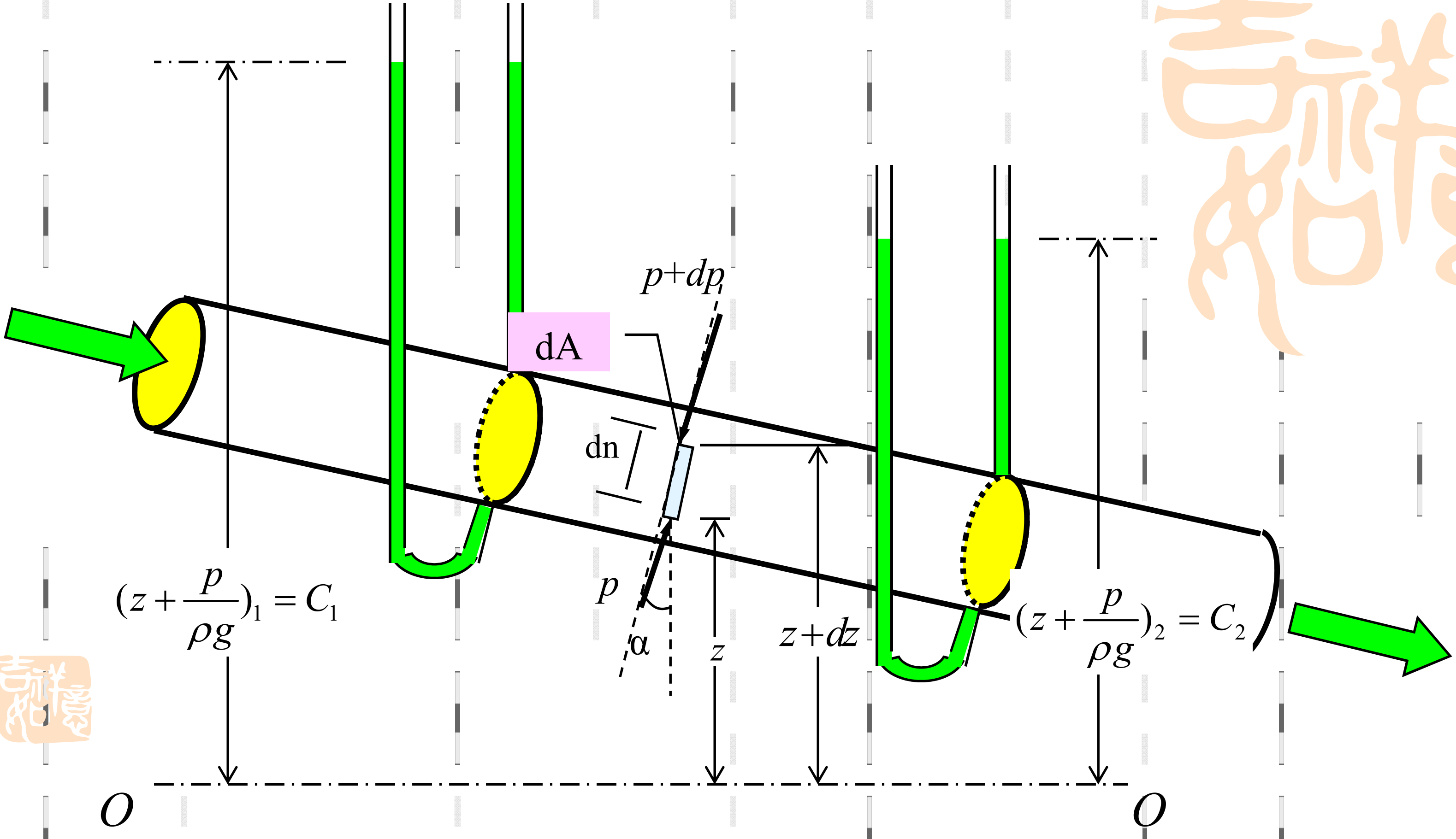
非均匀流

均匀流



非均匀流

急变流



在均匀流，与流线正交的n方向上无加速度，所以有 $\sum F_n = 0$

即： $pdA-(p+dp)dA-\rho gdAdn\cdot\cos\alpha=0 \Longrightarrow dp+\rho gdz=0$

积分得： $z+\frac{\rho g}{p}=C$

【例3-4】 假设有一不可压缩流体三维流动，其速度分布规律为）U=3（x+y³)，v=4y+z²，w=x+y+2z。试分析该流动是否连续。

【解】 根据式（3-28）

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=4 \qquad \frac{\partial w}{\partial z}=2$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=9\neq 0$$

故此流动不连续。不满足连续性方程的流动是不存在的

【例3-5】 有一不可压缩流体平面流动，其速度分布规律为$u=x^2\sin y$，$v=2x\cos y$，试分析该流动是否连续。

【解】 根据式（3-29）

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\sin y \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-2x\sin y$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=2x\sin y+(-2x\sin y)=0$$

故此流动是连续的。

【例3-6】 有一输水管道，如图3-14所示。水自截面1-1流向截面2-2。测得截面1-1的水流平均流速$\overline{V}=2$ m/s，已知d_1=0.5m，d_2=1m，试求截面2-2处的平均流速 $\overline{V}_2$ 为多少？

【解】 由式（3-33）得

$$\overline{V}_1 \frac{\pi}{4} d_1^2 = \overline{V}_2 \frac{\pi}{4} d_2^2$$

$$\overline{V}_2 = \overline{V}_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 2 \times \left(\frac{0.5}{1}\right)^2 = 0.5$$

(m/s)

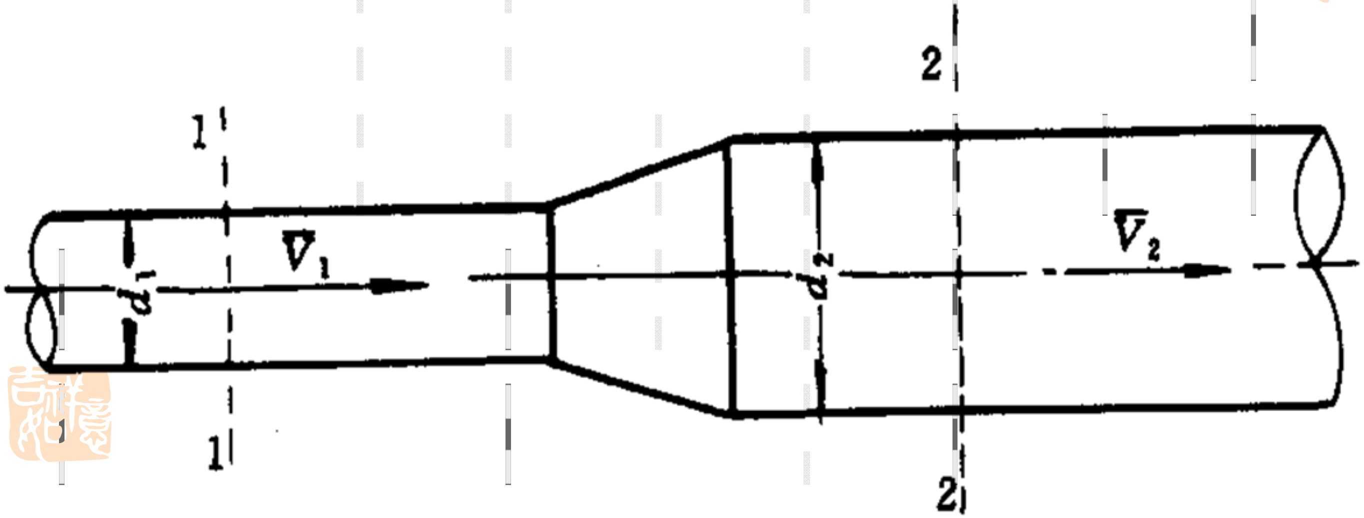


图 3-14 输水管道

§3.6恒定元流能量方程

3.6.1理想液体恒定元流能量方程

动能定理：运动物体在某一时段内动能的增量等于各外力对物体所作的功之和

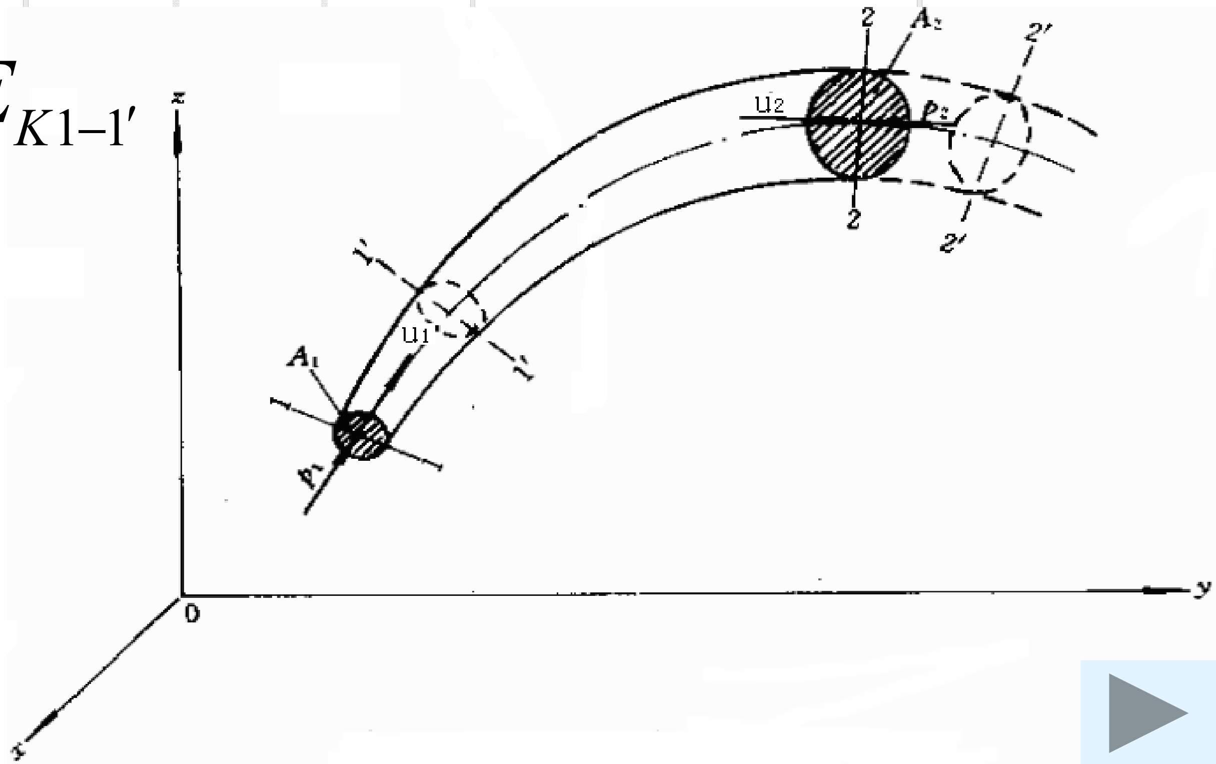
$$\sum W=\frac{1}{2}mV^2-\frac{1}{2}mV_o^2$$

动能的增量

$$\Delta E_K = E_{K1'-2'} - E_{K1-2}$$

$$= (E_{K1'-2} + E_{K2-2'}) - (E_{K1-1'} + E_{K1'-2})$$

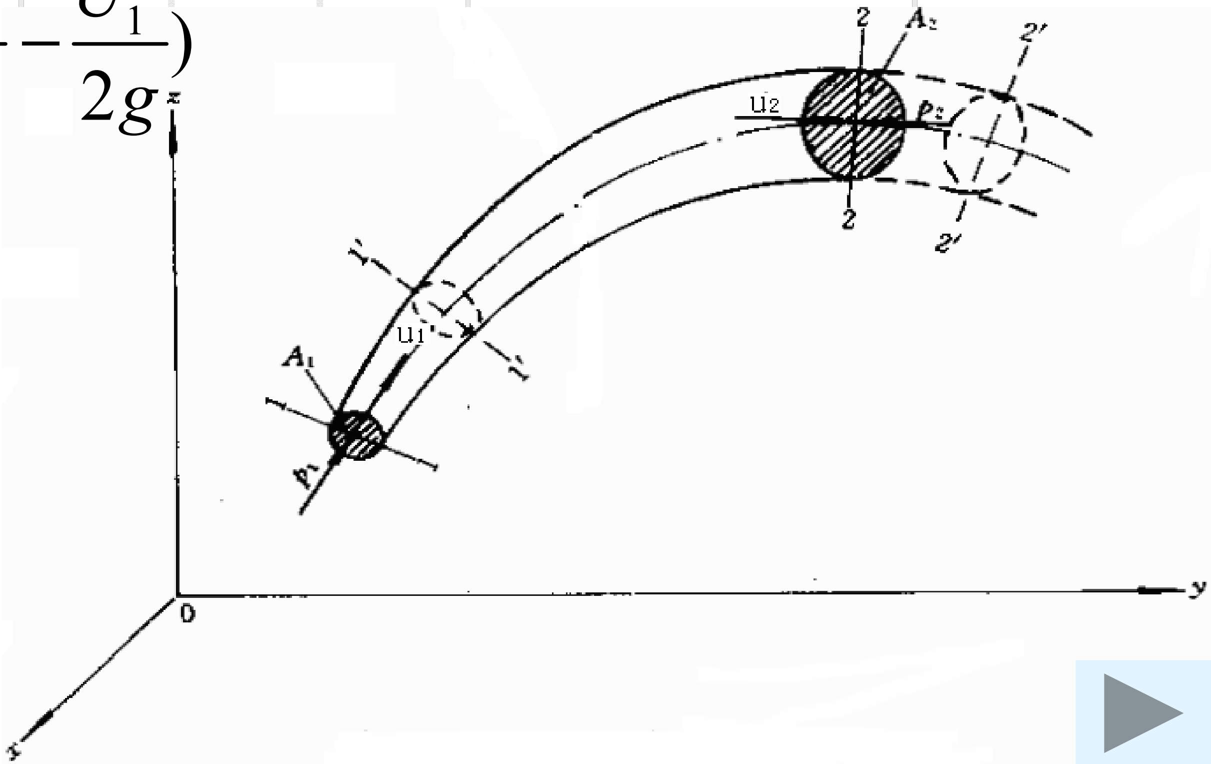
$$= E_{K2-2'} - E_{K1-1'}$$



$$\Delta E_K = \frac{1}{2}dmU_2^2 - \frac{1}{2}dmU_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\rho dQdt(U_2^2 - U_1^2)$$

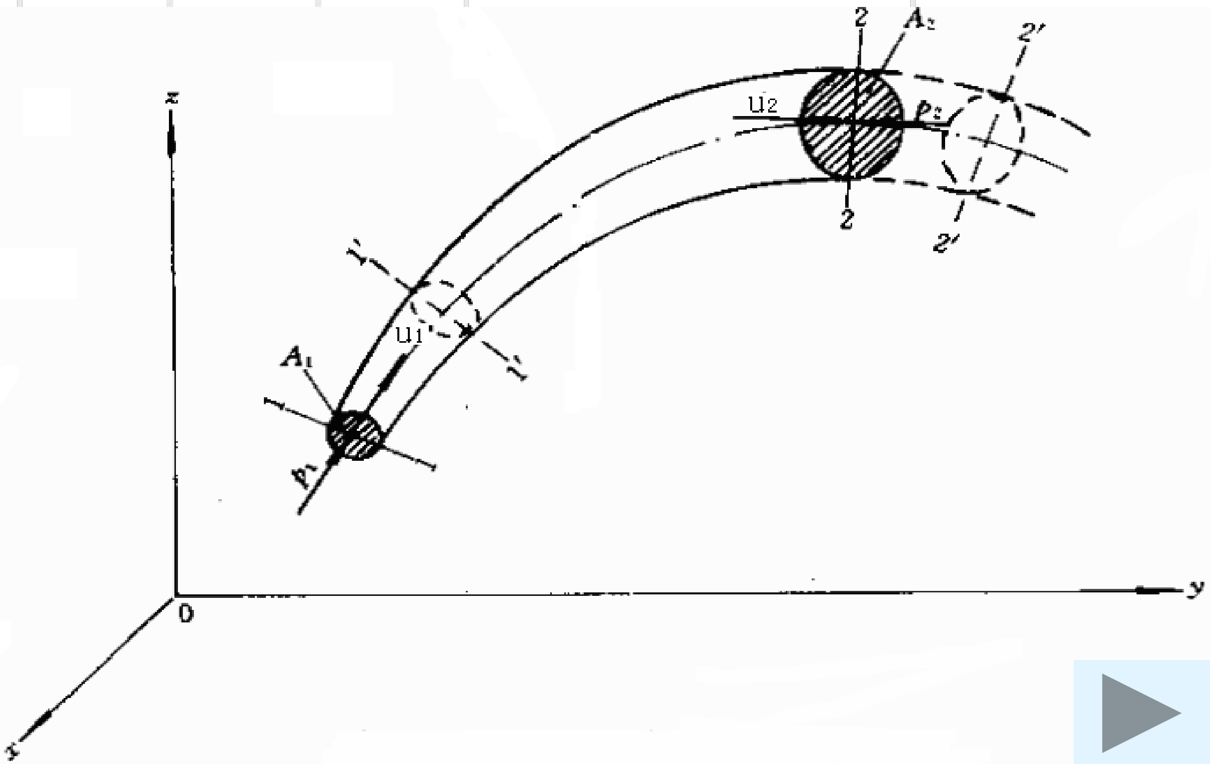
$$= \rho gdQdt(\frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g})$$



- 重力作功：

$$W_G = dmg(z_1 - z_2)$$

$$= \rho g dQdt(z_1 - z_2)$$

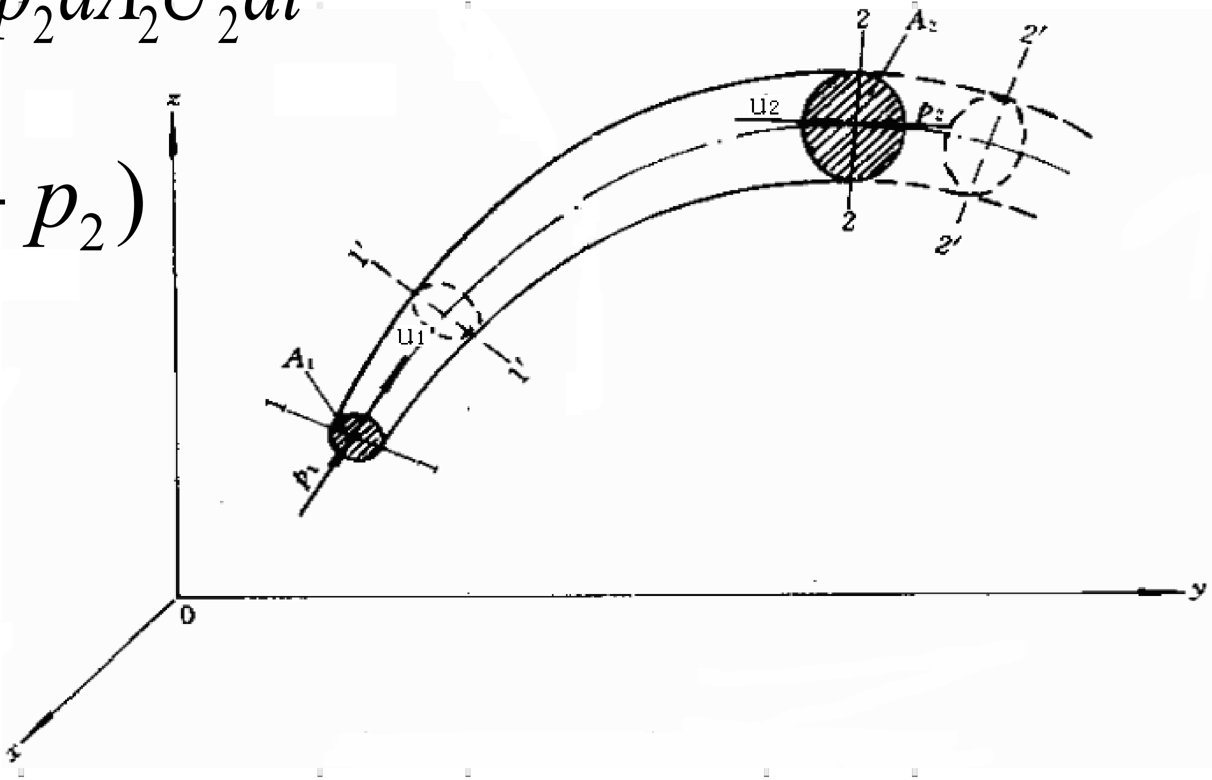


- 压力作功：

$$W_P = p_1 dA_1 dS_1 - p_2 dA_2 dS_2$$

$$= p_1 dA_1 U_1 dt - p_2 dA_2 U_2 dt$$

$$= dQdt(p_1 - p_2)$$



$$W_G + W_P = \Delta E_K$$

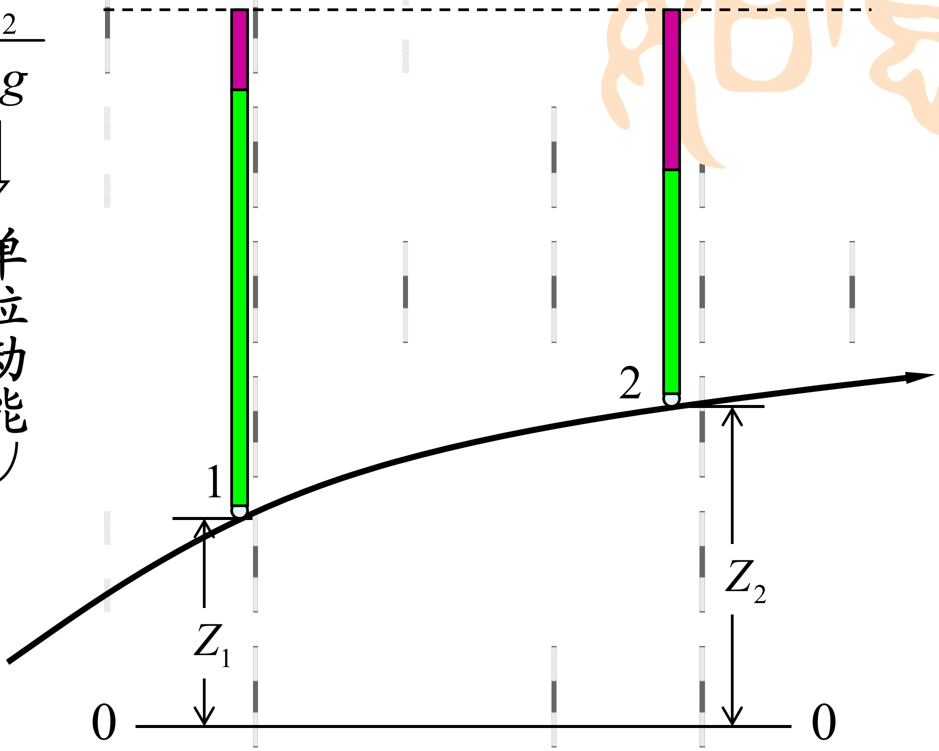
$$\rho g dQdt(z_1 - z_2) + dQdt(p_1 - p_2) = \rho g dQdt(\frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g})$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g}$$

理想流体恒定元流能量方程

方程式的物理意义

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{Z_1}_{\text{位置水头}} + \underbrace{\frac{p_1}{\rho g}}_{\text{压强水头}}}_{\text{测压管水头}} + \underbrace{\frac{u_1^2}{2g}}_{\text{流速水头}}}_{\text{总水头}} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{Z_2}_{\text{单位位能}} + \underbrace{\frac{p_2}{\rho g}}_{\text{单位压能}}}_{\text{单位势能}} + \underbrace{\frac{u_2^2}{2g}}_{\text{单位动能}}}_{\text{单位总机械能}}$$



表明：在不可压缩理想液体恒定流情况下，元流内不同过水断面上，单位重量液体所具有的机械能保持相等（守恒）。

该方程的适用范围是：理想不可压缩均质流体在重力作用下作定常流动，并沿同一流线（或微元流束）在特殊情况下，绝对静止流体V=0，由式(3-34)可以得到静力学基本方程

$$z+\frac{p}{\rho g}=常数$$

2. 方程的物理意义和几何意义

为了进一步理解理想流体微元流束的伯努利方程，现来叙述该方程的物理意义和几何意义。

1）物理意义

z———单位重量流体所具有的位势能；

$p/(\rho g)$——单位重量流体的压强势能；

$u^2/(2g)$——单位重量流体所具有的动能。

位势能、压强势能和动能之和称为机械能。

因此，伯努利方程可叙述为：理想不可压缩流体在重力作用下作定常流动时，沿同一流线（或微元流束）上各点的单位重量流体所具有的位势能、压强势能和动能之和保持不变，即机械能是一常数，但位势能、压强势能和动能三种能量之间可以相互转换，所以伯努利方程是能量守恒定律在流体力学中的一种特殊表现形式。

2）几何意义图

z——单位重量流体的位置水头，

$p/(\rho g)$——单位重量流体的压强水头，

$u^2/(2g)$——单位重量流体的速度水头。

位置水头、压强水头和速度水头之和称为总水头。

伯努利方程也可叙述为：理想不可压缩流体在重力作用下作定常流动时，沿同一流线(或微元流束)上各点的单位重量流体所具有的位置水头、压强水头和速度水头之和保持不变，即总水头是一常数。

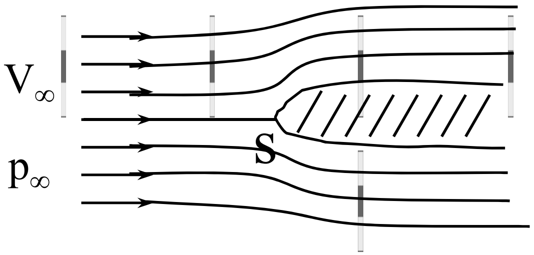
恒定元流能量方程的物理意义

	物理意义	几何意义
z	单位重量流体相对于某基准面所具有的位能	元流过流断面上某点相对于某基准面的位置高度/位置水头
$\frac{p}{\gamma}$	单位重量流体所具有的压能	压强水头
$z+\frac{p}{\gamma}$	单位重量流体所具有的总势能	测压管水头
$\frac{u^2}{2g}$	单位重量流体所具有的动能	速度水头
$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}$	单位重量流体所具有的总机械能	总水头
h_l'	单位重量流体的能量损失	损失水头

理想流体恒定元流能量方程的应用

例　已知无穷远 V_∞=1.2m/s , p_∞=0

求:驻点处的压强p_s



解:

$$\frac{V_\infty^2}{2g}+\frac{p_\infty}{\gamma}+z_\infty=\frac{V_s^2}{2g}+\frac{p_s}{\gamma}+z_s$$

$$\frac{p_s}{g\rho}=\frac{V_\infty^2}{2g}+\frac{p_\infty}{g\rho}-\frac{V_s^2}{2g}=\frac{1.2^2}{2\times 9.8}=0.073(m)$$

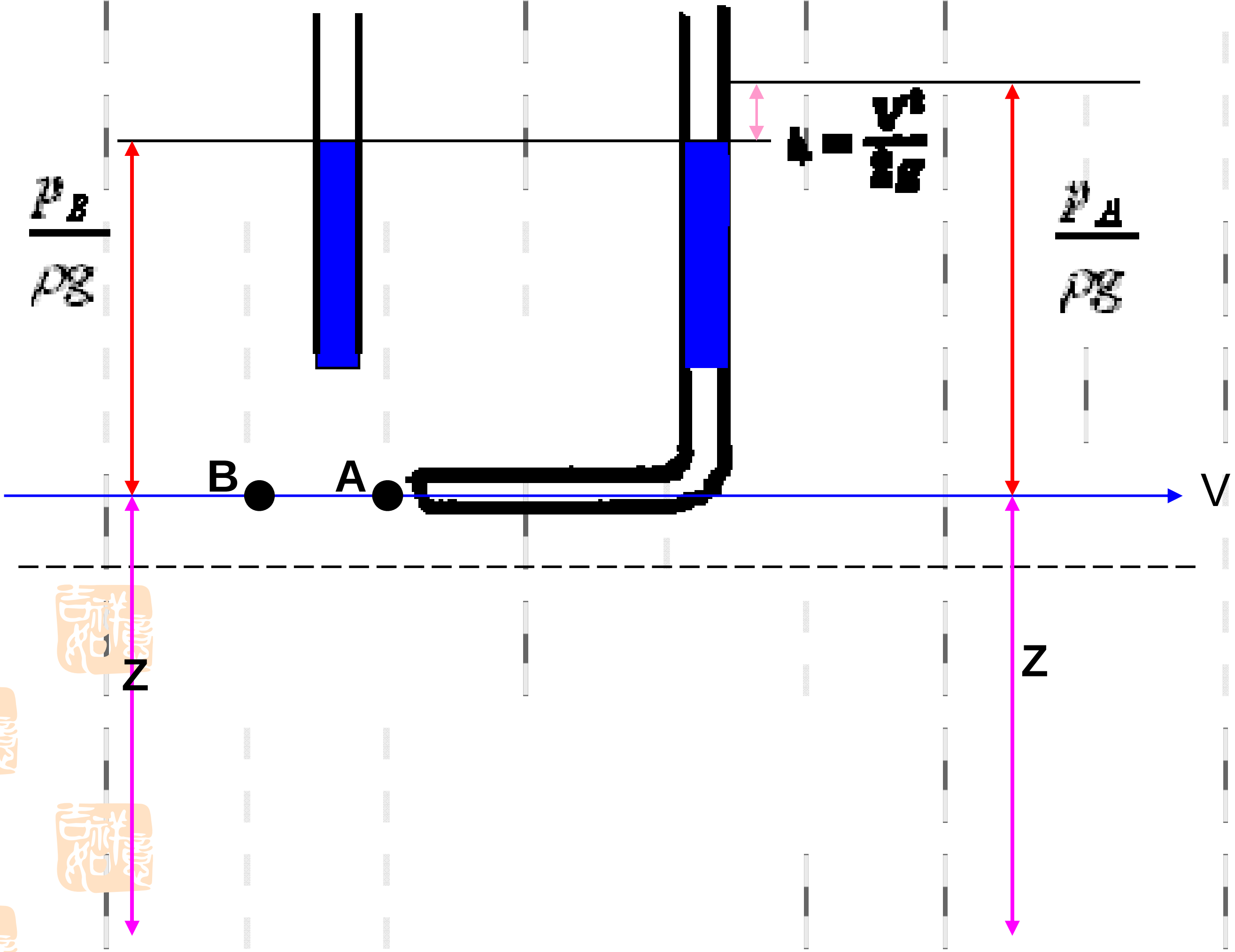
故 p_s= 0.073 m水柱

理想流体恒定元流能量方程的应用

皮托管测速仪

在工程实际中，常常需要来测量某管道中流体流速的大小，然后求出管道的平均流速，从而得到管道中的流量，要测量管道中流体的速度，可采用皮托管来进行，其测量原理如图所示。

在液体管道的某一截面处装有一个测压管和一根两端



皮托管测速原理图

开口弯成直角的玻璃管（称为测速管）。将测速管（又称皮托管）的一端正对着来流方向，另一端垂直向上，这时测速管中上升的液柱比测压管内的液柱高h。这是由于当液流流到测速管入口前的A点处，液流受到阻挡，流速变为零，则在测速管入口形成一个驻点A。驻点A的压强P_A称为全压，在入口前同一水平流线未受扰动处（例如B点）的液体压强为 P_B，速度为V。应用伯努利方程于同一流线上的B、A两点，则有

$$z+\frac{p_B}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}=z+\frac{p_A}{\rho g}+0$$

则

$$h=\frac{p_A}{\rho g}-\frac{p_B}{\rho g}=\frac{V^2}{2g}$$

$$v=\sqrt{2\frac{p_A-p_B}{\rho}}=\sqrt{2gh}$$

上式表明，只要测量出流体的运动全压和静压水头的差值h，就可以确定流体的流动速度。由于流体的特性，以及皮托管本身对流动的干扰，实际流速比用该式计算出的要小，因此，实际流速为

$$V = \psi\sqrt{2gh}$$

式中 ψ—流速修正系数，一般由实验确定， ψ =0.97。

如果测定气体的流速，则无法直接用皮托管和静压管测量出气柱差来，必须把两根管子连接到一个U形差压计上，从差压计上的液面差来求得流速，如图所示，则

$$p_A - p_B = h_{液} g(\rho_{液} - \rho)$$

则得

$$V = \sqrt{2g\frac{\rho_{液} - \rho}{\rho} h_{液}} = \sqrt{2gh_{液}\left(\frac{\rho_{液}}{\rho} - 1\right)}$$

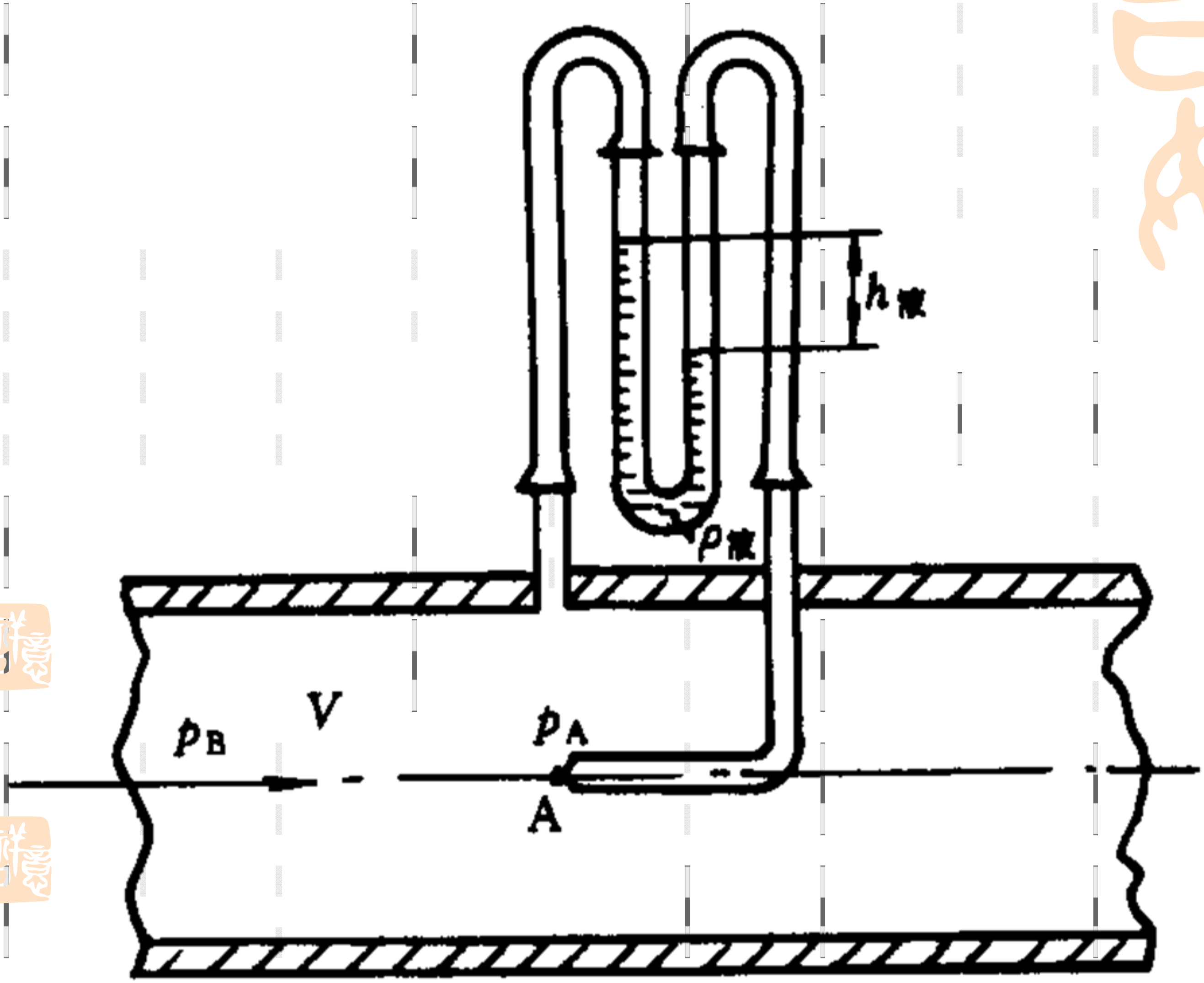


图 用皮托管和静压管测量气体流速

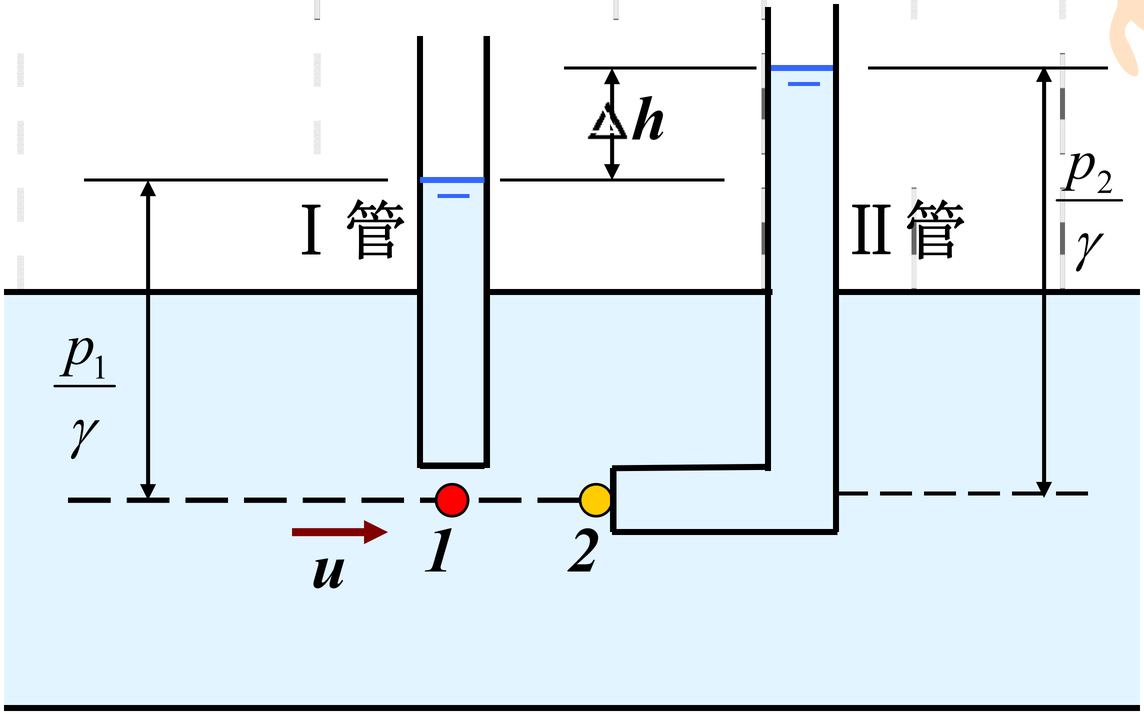
考虑到实际情况，

$$V = \psi\sqrt{2gh_{液}\left(\frac{\rho_{液}}{\rho}-1\right)}$$

在工程应用中多将静压管和皮托管组合成一件，称为皮托—静压管，又称动压管，习惯上常简称它为皮托管，其示意图如图所示。图中1点为总压测点，2点为静压测点，将总静压孔的通路分别连接于差压计的两端，则差压计的指示为总压和静压的差值，从而可由上式求得测点的流速。皮托-静压管的构造及使用方法。

• 元流能量方程的应用举例

毕托管测速



假设

Ⅰ、Ⅱ管的存在不扰动原流场。

$$u_1 = u$$
$$u_2 = 0$$
$$z_1 = z_2$$

代 入

伯努利方程

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + 0$$

$$u = \sqrt{\frac{2g(p_2 - p_1)}{\gamma}} = \sqrt{2g\Delta h}$$

Ⅰ管 —— 测压管，开口方向与流速垂直。
Ⅱ管 —— 总压管，开口方向迎着流速。

思考为什么？

****

毕托管利用两管测得总水头和测压管水头之差——速度水头，来测定流场中某**点流速**。

****

实际使用中，在测得 Δh，计算流速 u 时，还要加上毕托管修正系数φ，即

$$u = \varphi\sqrt{2g\Delta h}$$

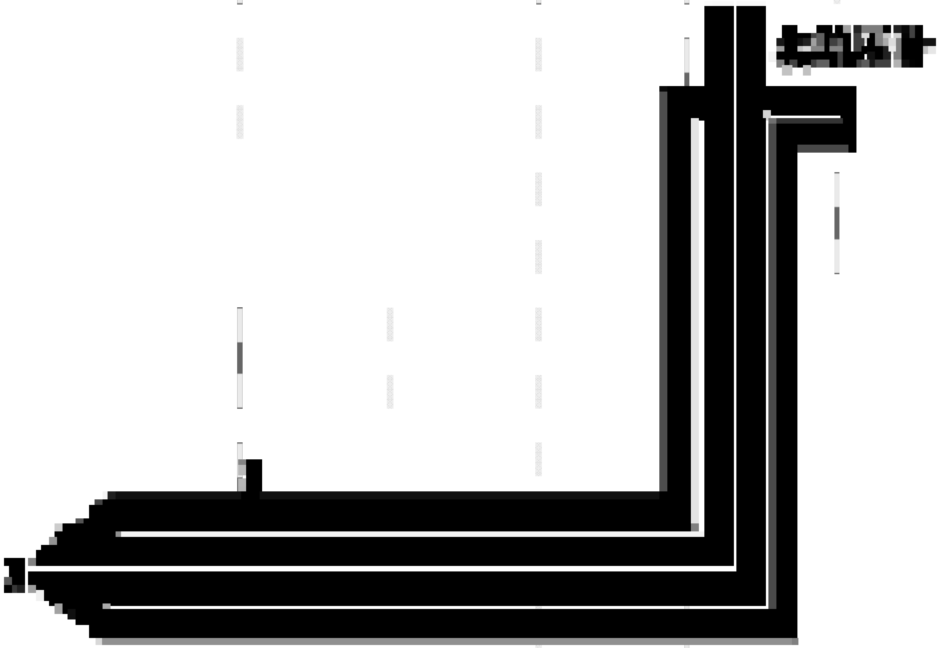
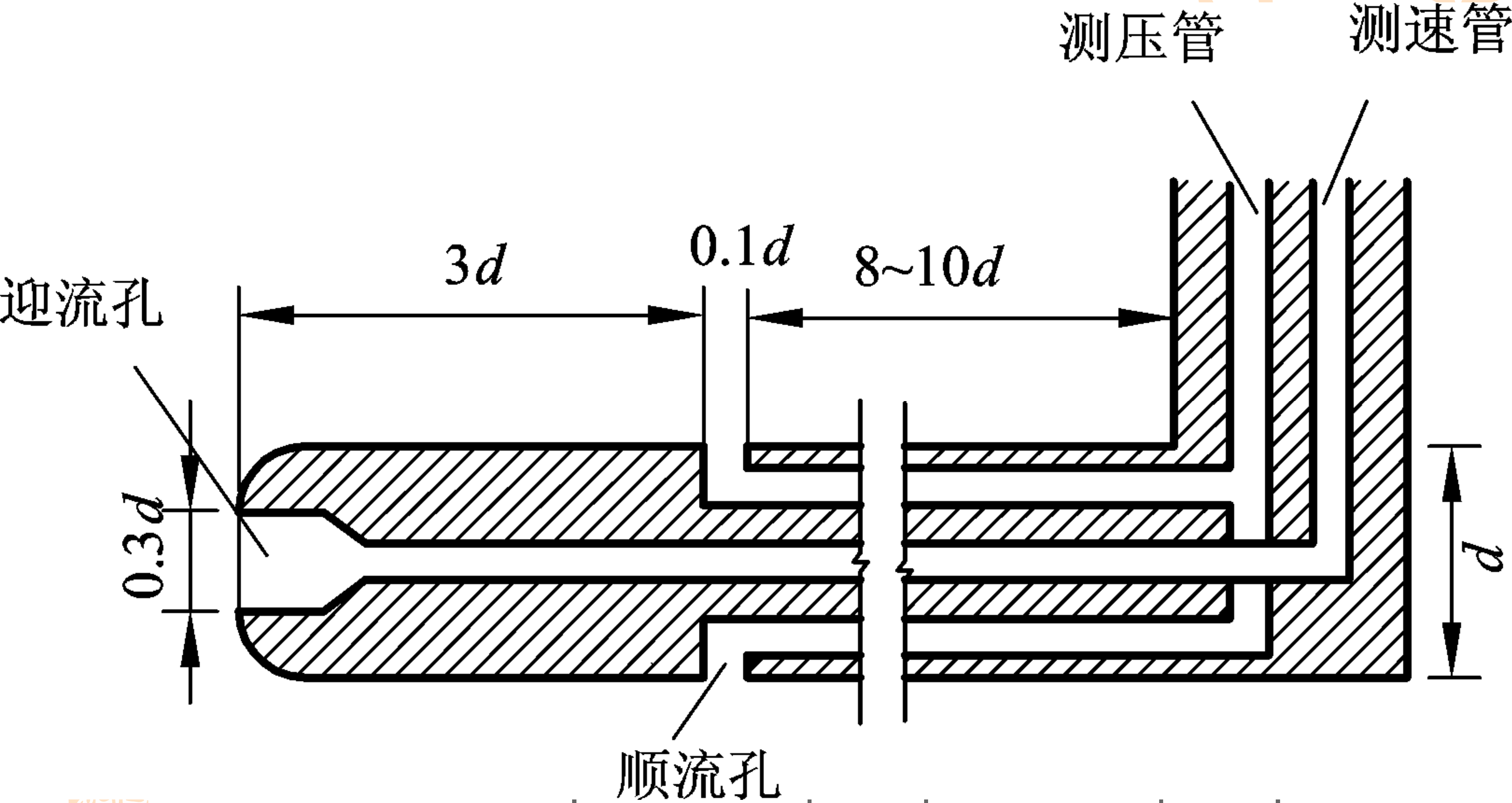


图 皮托-静压管

实用的毕托管常将测压管和总压管结合在一起。



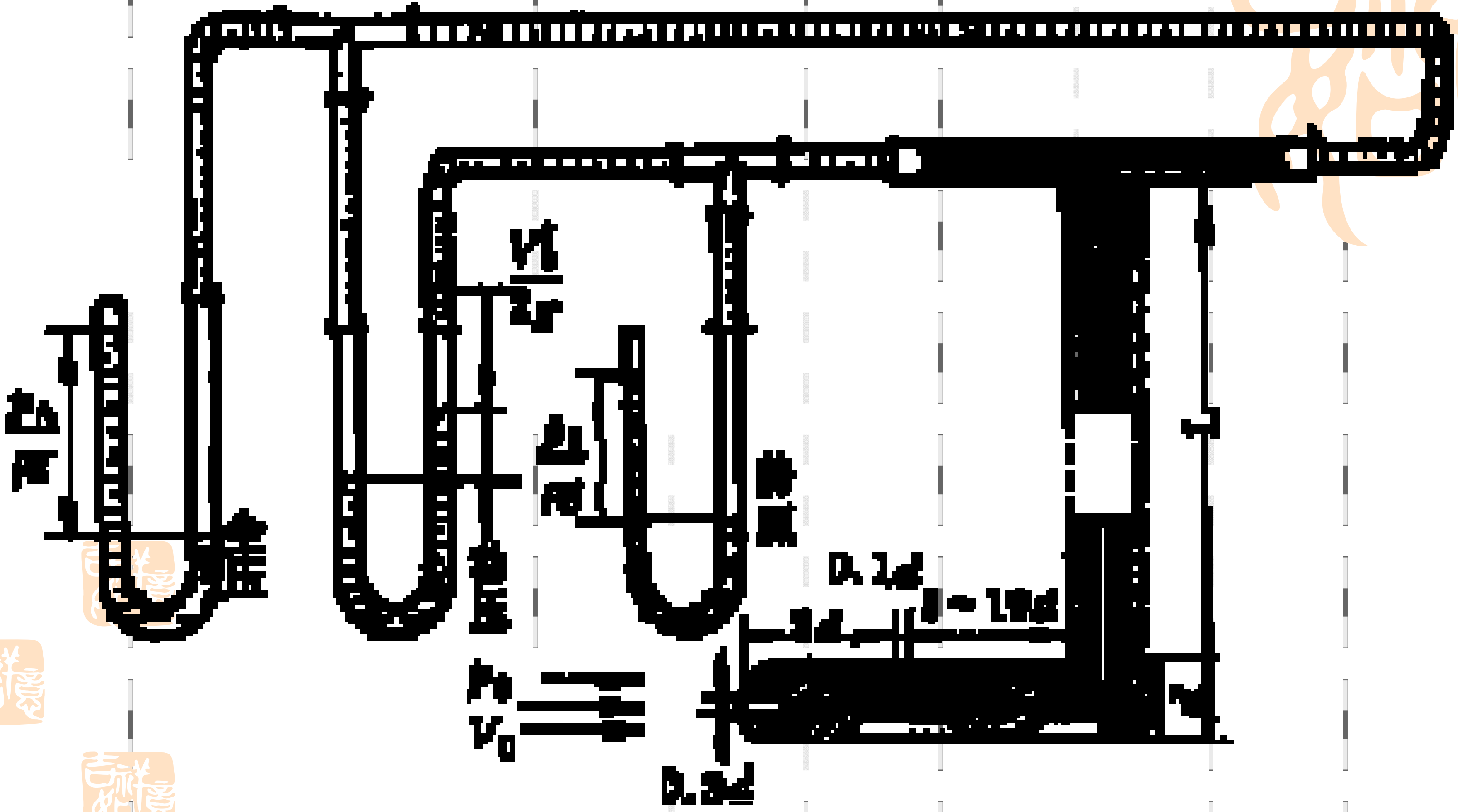
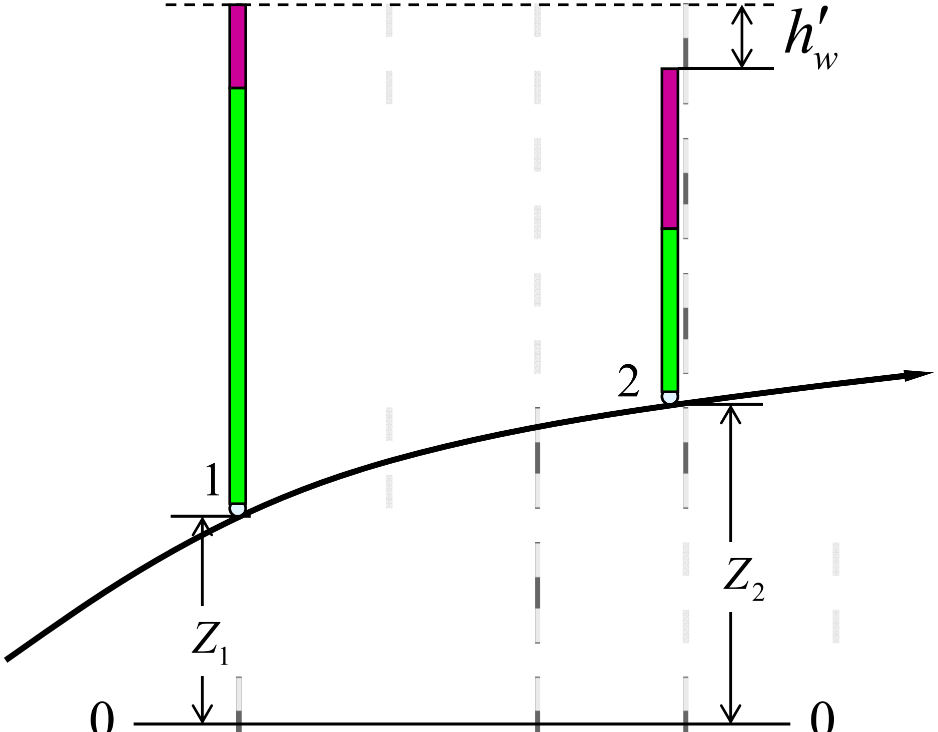


图 3-20 皮托-静压管构造及连接方式

实际液体恒定元流的能量方程式

$$Z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{u_1^2}{2g}=Z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{u_2^2}{2g}+h_w'$$

h_w' ——单位重量液体从断面1-1流至断面2-2所损失的能量，称为水头损失。

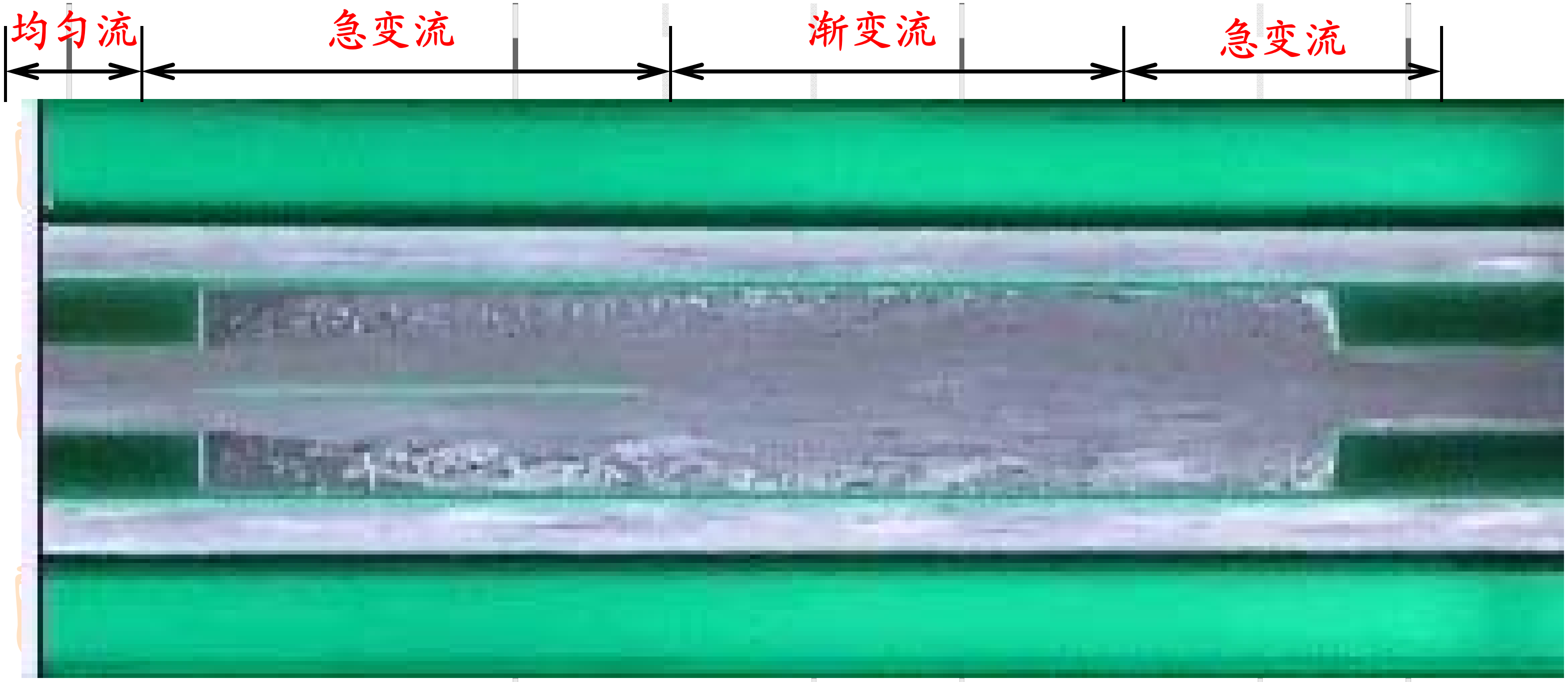


§3.7 过流断面的压强分布

$$\frac{p_1}{\gamma}+Z_1+\frac{u_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+Z_2+\frac{u_2^2}{2g}+h_{l1-2}^{'} \qquad (3\text{-}6\text{-}8)$$

为进一步得到总流能量方程，还必须研究压强在过流断面上的分布。

根据流速是否随流向变化分为均匀流和非均匀流，非均匀流又按流速随流向变化的缓急，分为渐变流和急变流。



返回

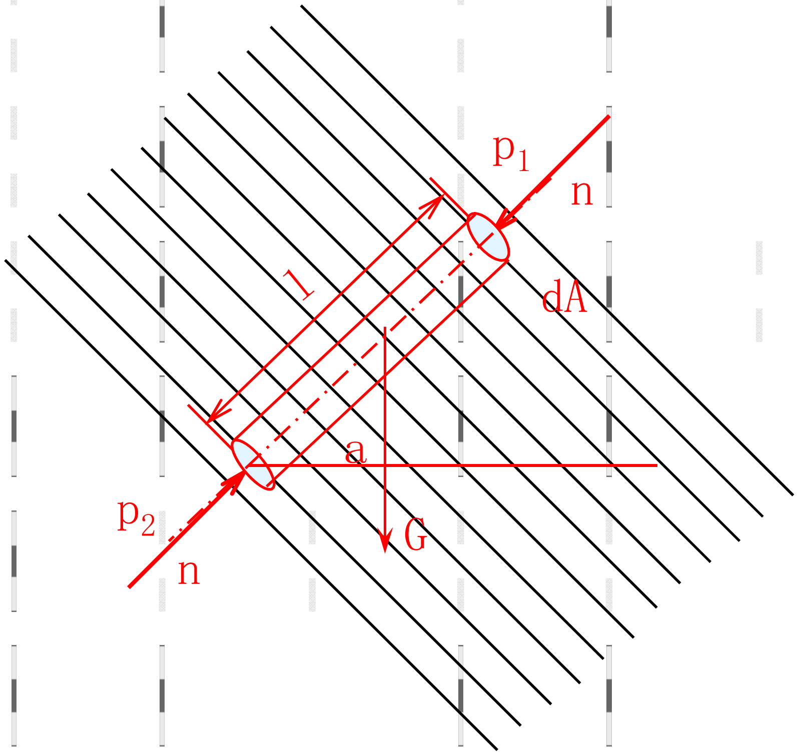
证明：均匀流过流断面上的压强分布规律

(1)柱体重力在n-n方向的分力为 $Gcosa=\gamma ldAcosa$;

(2)作用在柱体两端的压力为 p_1dA，p_2dA,侧表面压力垂直于n-n轴方向，在n-n轴上的投影为0;

(3)柱体端面切应力垂直于n-n轴，在n-n轴上的投影为0;

侧面无限小，侧面切应力在n-n轴对称断面上为大小相等，方向相反的反力，在n-n轴投影之和为0。



微小柱体的平衡方程为:

$$p_1 dA + \gamma l dA \cos a = p_2 dA$$

但 $l\cos a = Z_1 - Z_2$

则 $p_1 + \gamma(Z_1 - Z_2) = p_2$

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma}$$

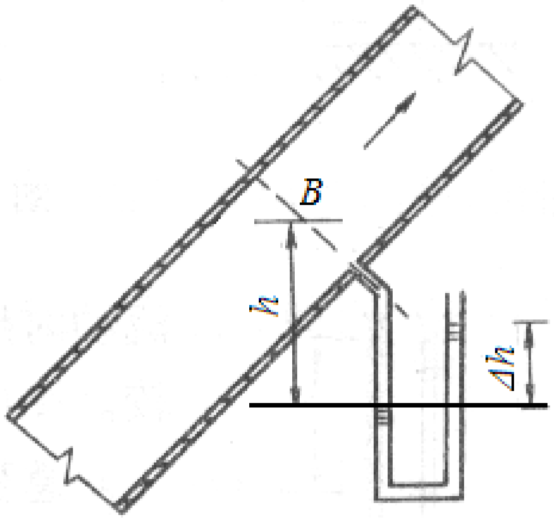
§ 3.7 过流断面的压强分布

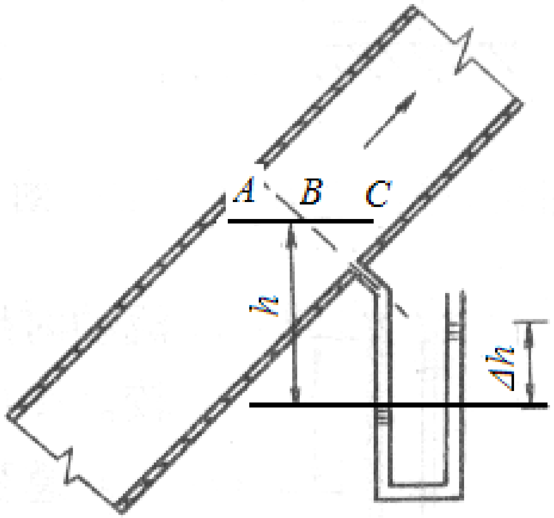
举例

$$p_B + \rho gh = \rho' g \Delta h$$

$$p_B = \rho' g \Delta h - \rho gh$$

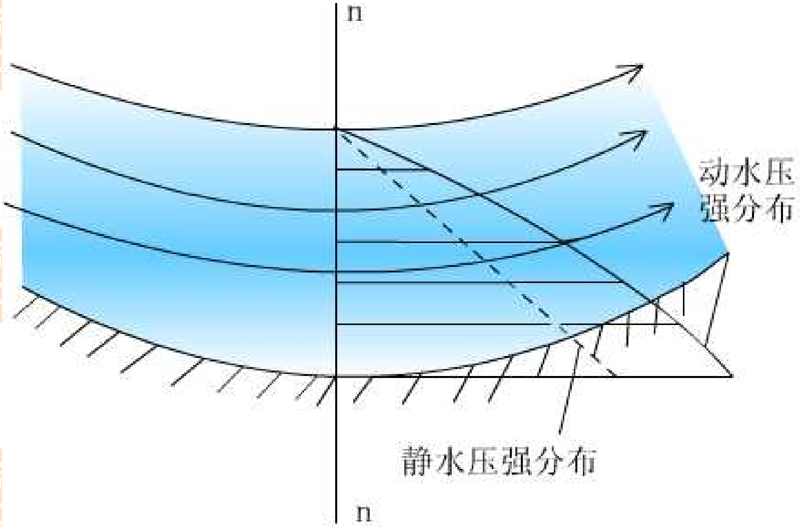
$$p_A > p_B > p_C$$

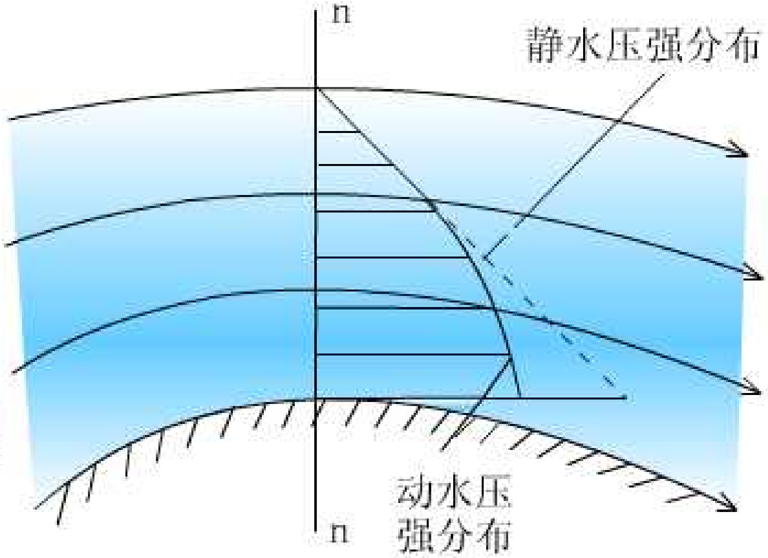




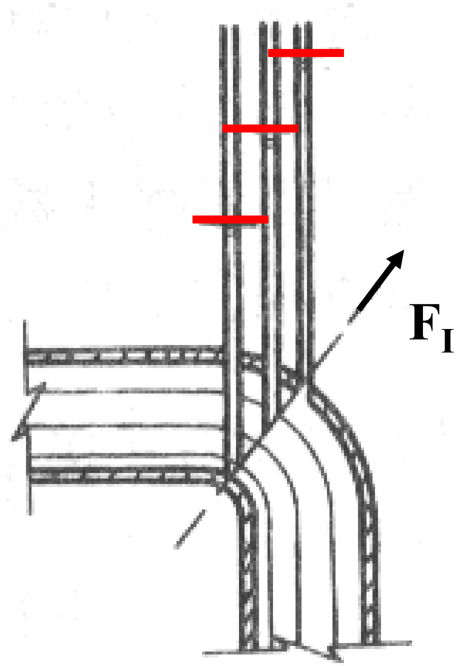
§ 3.7 过流断面的压强分布

急变流同一过流断面上的测压管水头不是常数





急变流压强的分布(举例)



沿惯性力方向，压强增加、流速减小

§ 3.8实际液体恒定总流的能量方程

$$Z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}=Z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}+h_w$$

$$\boxed{(Z_1+\frac{p_1}{\rho g})\rho g Q}+\boxed{\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}\rho g Q}=\boxed{(Z_2+\frac{p_2}{\rho g})\rho g Q}+\boxed{\frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}\rho g Q}+\boxed{h_w \rho g Q}$$

$$\int_Q (Z+\frac{p}{\rho g})\rho g dQ \xlongequal[(Z+\frac{p}{\rho g})=C]{\text{均匀流或渐变流过水断面上}} (Z+\frac{p}{\rho g})\rho g\int_Q dQ=(Z+\frac{p}{\rho g})\rho g Q$$

$$\int_Q \frac{u^2}{2g}\rho g dQ \xlongequal{dQ=udA} \frac{\rho g}{2g}\int_A u^3 dA \xlongequal[\text{动能修正系数,1.05~1.1}]{\text{V→u，}\quad \alpha=\frac{\int_A u^3 dA}{V^3 A}} \frac{\rho g}{2g}\alpha V^3 A=\frac{\alpha V^2}{2g}\rho g Q$$

$$\int_Q h'_w \rho g dQ \xlongequal{\text{取平均的}h_w} h_w \rho g\int_Q dQ=h_w \rho g Q$$

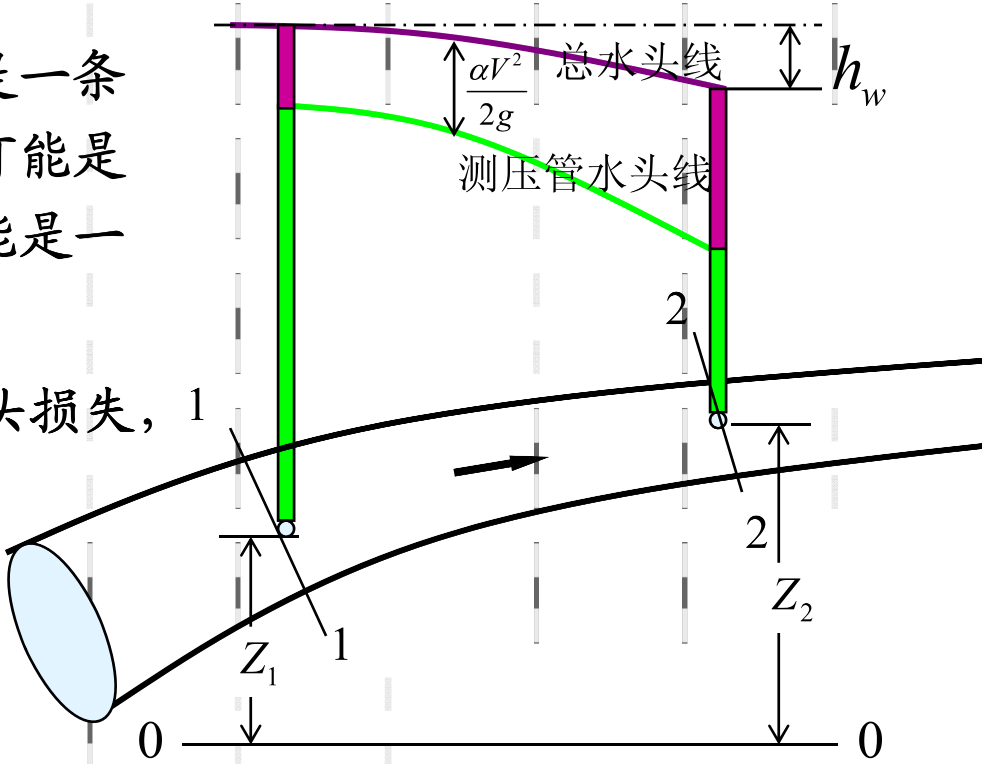
方程式的物理意义：

$$Z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}=Z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}+h_w$$

$$H_1=H_2+h_w$$

$$E_1=E_2+h_w$$

实际液体恒定总流的能量方程式表明：水流总是从水头大处流向水头小处；或水流总是从单位机械能大处流向单位机械能小处。



实际液体总流的总水头线必定是一条逐渐下降的线，而测压管水头线则可能是下降的线也可能是上升的线甚至可能是一条水平线。

水力坡度J——单位长度流程上的水头损失，

$$J=\frac{dh_w}{dL}=\frac{-dH}{dL}$$

测管坡度 $J_p=\dfrac{-d(Z+\dfrac{p}{\rho g})}{dL}$

前进

水力坡度

水头线的斜率冠以负号

$$J = -\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}h_w}{\mathrm{d}s}$$

称为水力坡度

测压管坡度

$$J_P = -\frac{dH_P}{ds}$$

称为测压管坡度

应用能量方程式的条件：$Z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}=Z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}+h_w$

（1）恒定流；

（2）质量力只有重力；

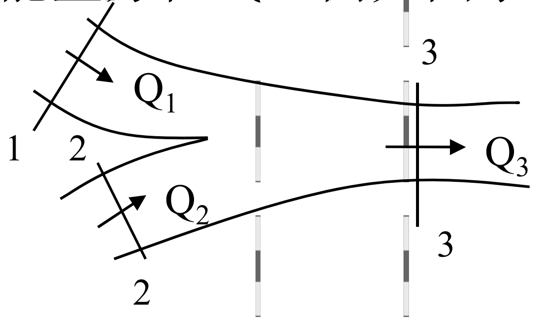
(3) 不可压缩流体；

（4）在所选取的两个过水断面上，水流应符合渐变流的条件，但所取的两个断面之间，水流可以不是渐变流；

（5）在所取的两个过水断面之间，流量保持不变，其间没有流量加入或分出。若有分支，则应对第一支水流建立能量方程式，例如图示有支流的情况下,能量方程为：

$$Z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}=Z_3+\frac{p_3}{\rho g}+\frac{\alpha_3 V_3^2}{2g}+h_{w1-3}$$

$$Z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}=Z_3+\frac{p_3}{\rho g}+\frac{\alpha_3 V_3^2}{2g}+h_{w2-3}$$



（6）流程中途没有能量H输入或输出。若有，则能量方程式应为：

$$Z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}\pm H_t=Z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}+h_w$$

§ 3.9　能量方程式的应用

能量方程是流体力学的基本方程之一，与连续性方程和流体静力学方程联立，可以全面地解决一维流动的流速(或流量)和压强的计算问题，用这些方程求解一维流动问题时，具体步骤如下：

（1）选取高程基准面；

（2）选取两过流断面；

所选断面上水流应符合渐变流的条件，但两个断面之间，水流可以不是渐变流。

（3）选取计算代表点；

（4）选取压强的计算基准；

（5）写出方程；

特别注意的几个问题:

(1) 弄清题意，看清已知什么，求解什么，是简单的流动问题，还是既有流动问题又有流体静力学问题。

(2) 选好有效截面，选择合适的有效截面，应包括问题中所求的参数，同时使已知参数尽可能多。

(3) 选好基准面，基准面原则上可以选在任何位置，但选择得当，可使解题大大简化。

(4) 求解流量时，结合一维流动的连续性方程求解。

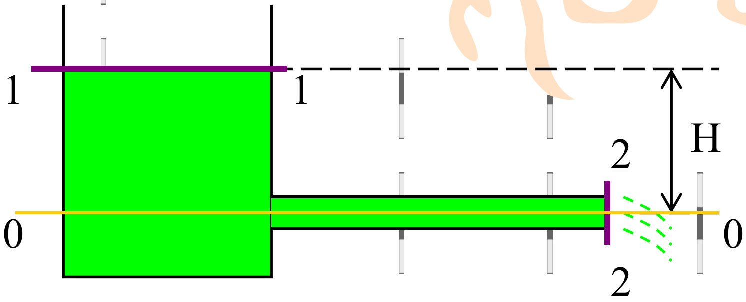
(5) 有效截面上的参数，如速度、位置高度和压强应为同一点的。

(6) 方程中各项单位的统一。

例1. 如图所示，一等直径的输水管，管径为d=100mm，水箱水位恒定，水箱水面至管道出口形心点的高度为H=2m，若不水流运动的水头损失，求管道中的输水流量。

分析：Q=VA；A=$\pi d^2/4$

所以需要用能量方程式求出V；



解：对1-1、2-2断面列能量方程式：$2+0+\frac{V_1^2}{2g}=0+0+\frac{V_2^2}{2g}+0$

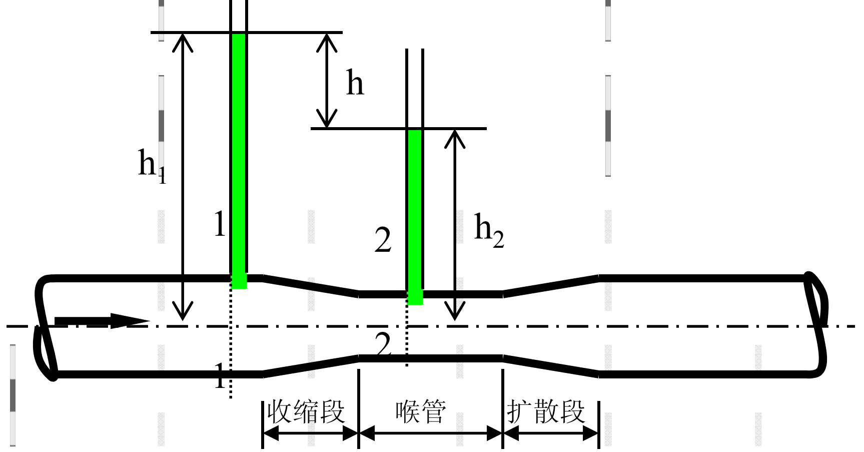
其中：$\frac{V_1^2}{2g}\approx 0$　　所以有：$\frac{V_2^2}{2g}=2$

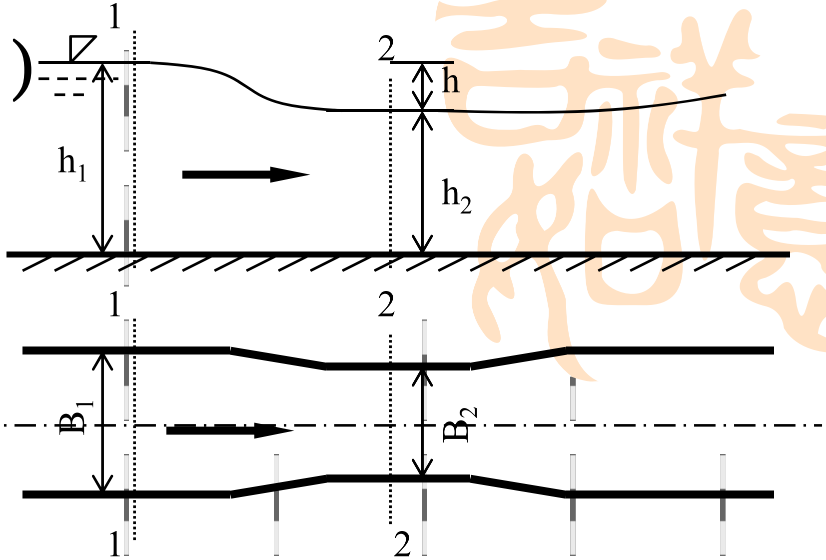
可解得：$V_2=\sqrt{4g}=6.26m/s$

则：$Q=\frac{\pi d^2}{4}V_2=\frac{3.14\times 0.1^2}{4}\times 6.26=0.049m^3/s$

答：该输水管中的输水流量为0.049m³/s。

文丘里流量计（文丘里量水槽）





以管轴线为高程基准面，暂不计水头损失，

对1-1、2-2断面列能量方程式：$h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} + 0$

整理得：$h_1 - h_2 = h =$

由连续性方程式可得：或 $V_2 = V_1($

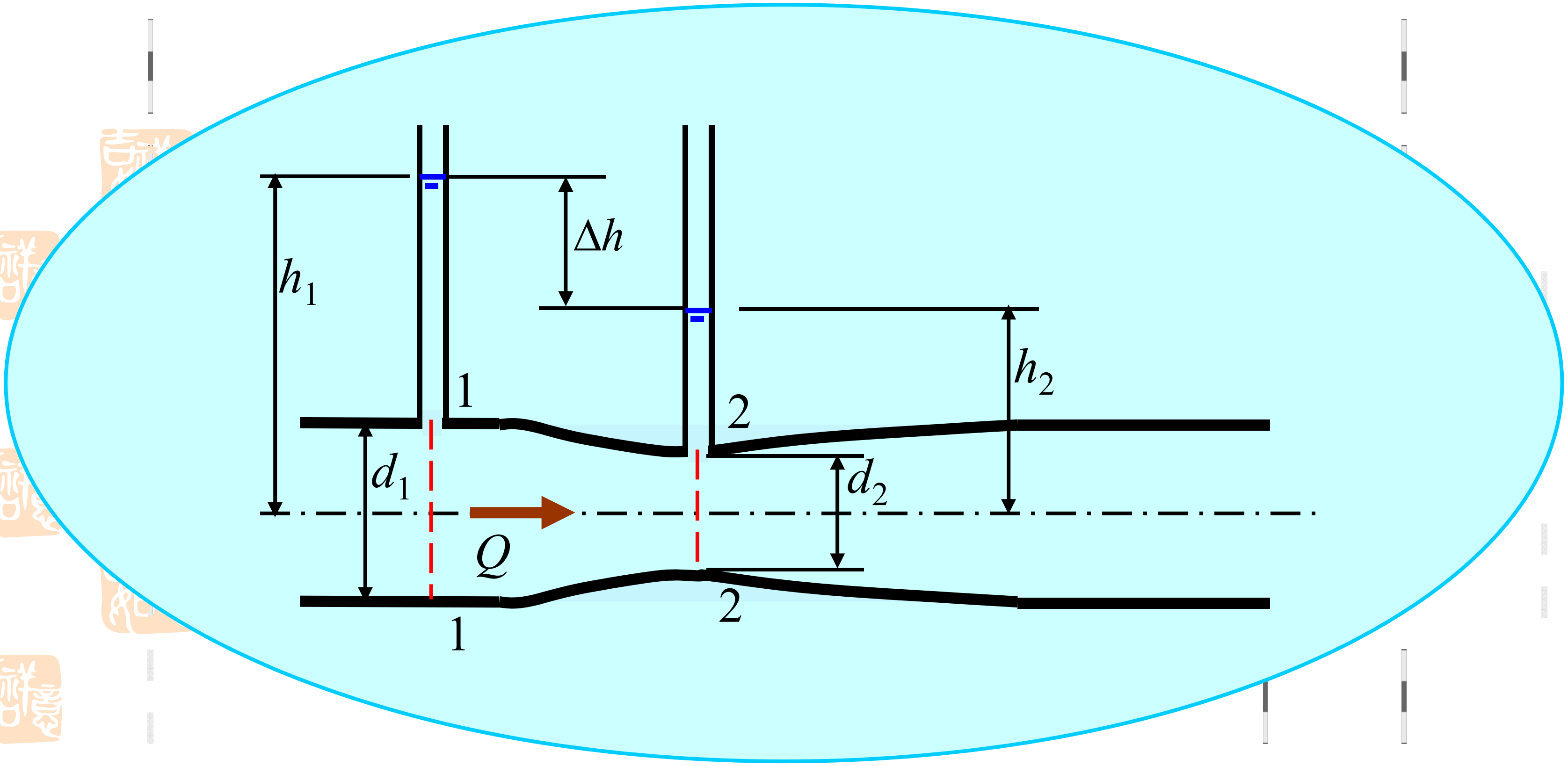
代入能 … 则 $Q = A_1V_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2gh}{(\frac{d_1}{d_2})^4 - 1}} = K\sqrt{h}$

当水管直径及喉管直径确定后，**K**为一定值，可以预先算出来。

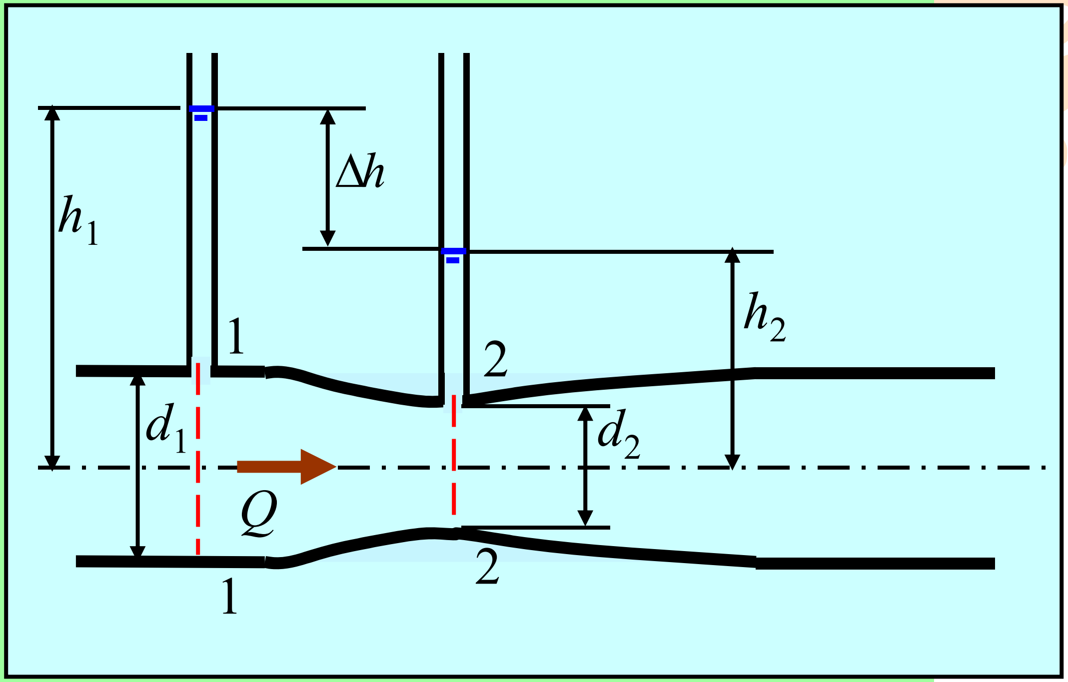
μ称为文丘里管的流量系数，一般约为**0.95~0.98**

若考虑水头损失，实际流量会减小，则 $Q = \mu K\sqrt{h}$

文丘里管是一种常用的量测管道流量的装置，它包括“收缩段”、“喉道”和“扩散段”三部分，安装在需要测定流量的管道上。在收缩段进口断面 1-1 和喉道断面 2-2 上接测压管，通过量测两个断面的测压管水头差，就可计算管道的理论流量 Q，再经修正得到实际流量。



水流从 1-1 断面到达 2-2 断面，由于过水断面的收缩，流速增大，根据恒定总流能量方程，若不考虑水头损失，速度水头的增加等于测压管水头的减小，所以



$$\Delta h = h_1 - h_2 = (z_1 + \frac{p_1}{\gamma}) - (z_2 + \frac{p_2}{\gamma}) = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} - \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \approx \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}$$

根据恒定总流连续方程又有

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

即

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

以上，由能量方程和连续方程得到了 v_1 和 v_2 间的两个关系式，联立求解，得

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 - 1}} \sqrt{2g\Delta h} = c\sqrt{\Delta h}$$

理论流量为：

$$Q_{理} = v_1 A_1 = K\sqrt{\Delta h}$$

式中

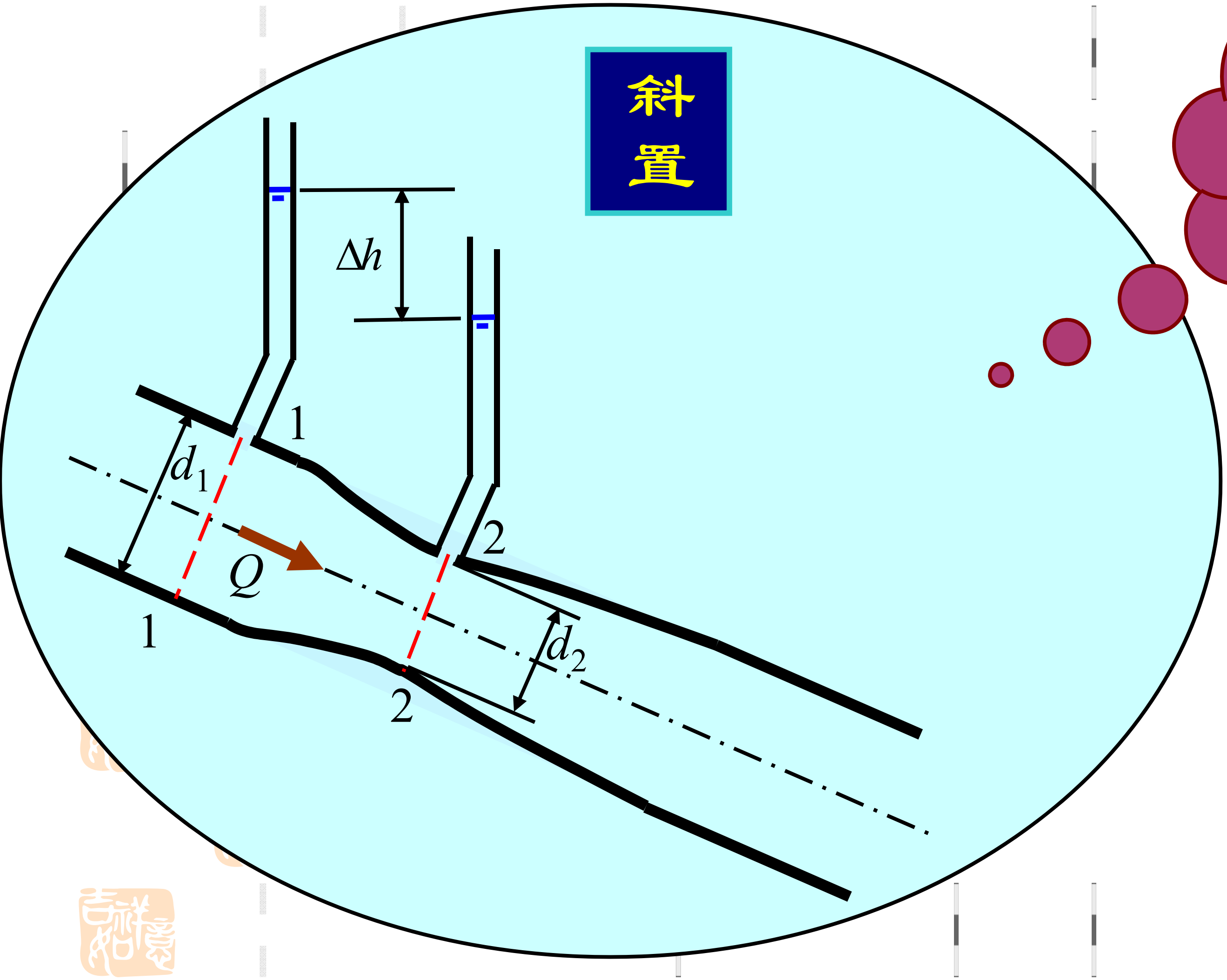
$$K = \frac{\pi}{4} \frac{d_1^2 d_2^2}{\sqrt{d_1^4 - d_2^4}} \sqrt{2g}$$

当管中流过实际液体时，由于两断面测管水头差中还包括了因粘性造成的水头损失，流量应修正为：

$$Q_{实} = \mu K\sqrt{\Delta h}$$

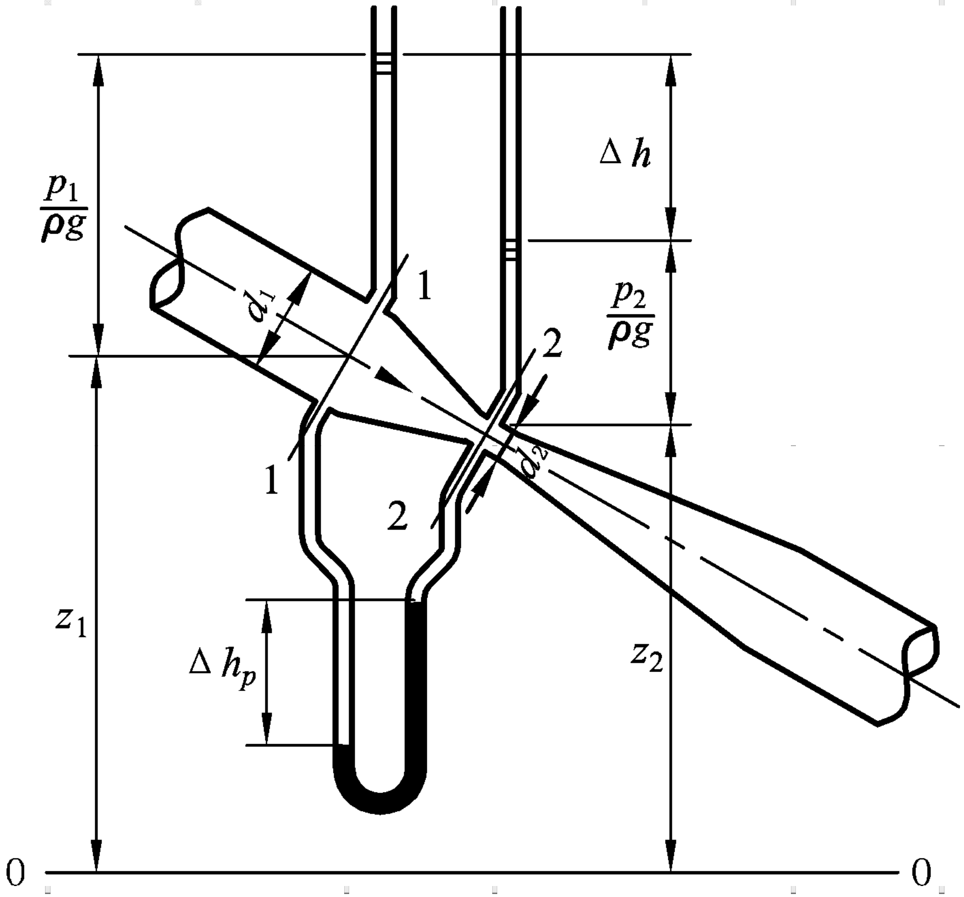
其中，$\mu < 1$ 称为文透里管的流量系数。

思考



文透里管可否斜置?

如图：已知某倾斜管路直径d_1，喉管直径d_2，实测两根测压管水头差Δh（或水银压差计的水银面高差Δh_p），反映实际流量与不计能量损失的理论流量之比的流量系数为μ，试求管道的实际流量。



解：列1-1，2-2断面的能量方程：

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w$$

则：

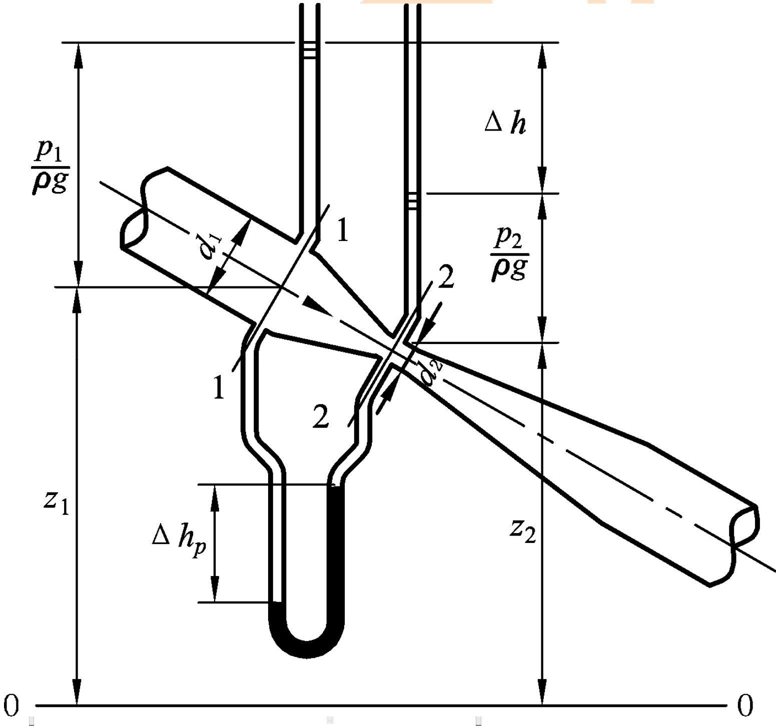
$$(z_1+\frac{p_1}{\gamma})-(z_2+\frac{p_2}{\gamma})=\Delta h=\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}$$

又 $v_2=v_1(\frac{d_1}{d_2})^2 \Rightarrow$

$$v_1=\sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1}}=c\sqrt{\Delta h};$$

管道的理论流量 $Q=\frac{\pi d_1^2}{4}c\sqrt{\Delta h}=K\sqrt{\Delta h}$

$$Q_{实}=\mu K\sqrt{\Delta h}$$



μ — 流量系数。μ<1; μ=0.95~0.98.

如果两断面的压差过大，读数不便时可直接安装水银压差计：

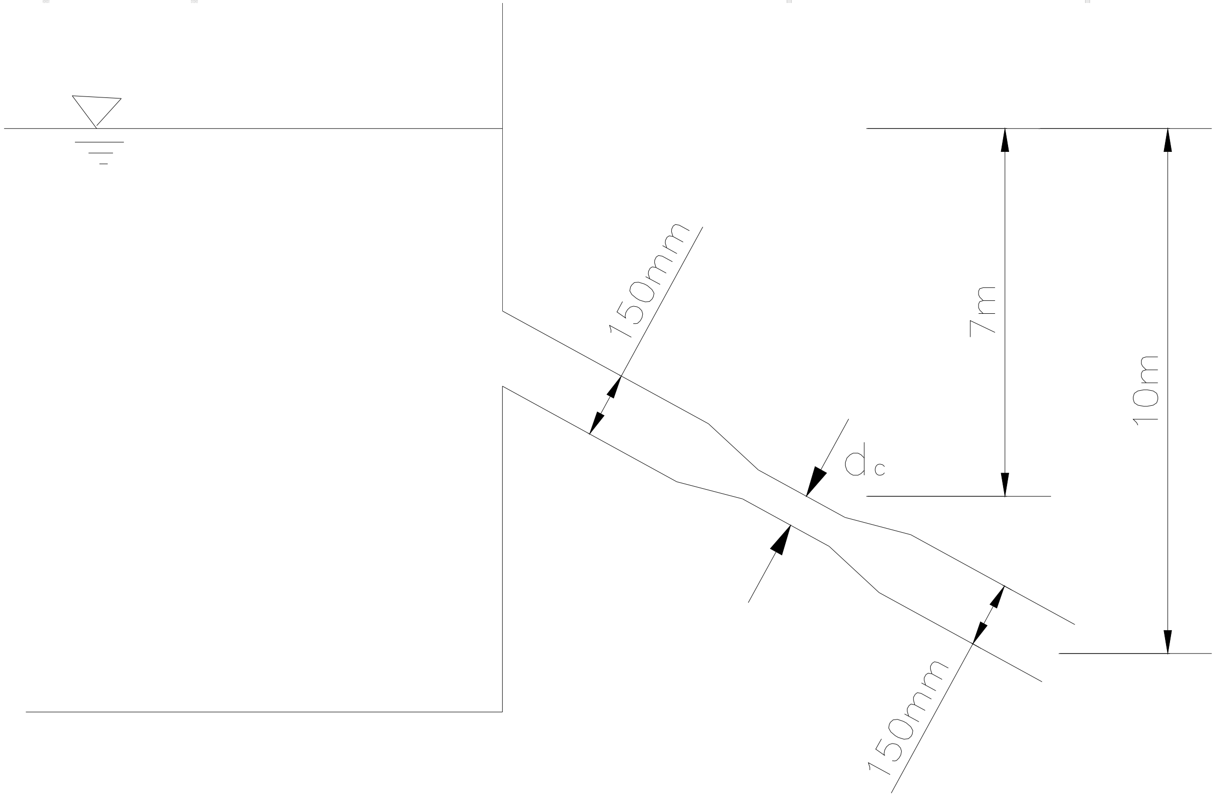
$$(z_1+\frac{p_1}{\gamma})-(z_2+\frac{p_2}{\gamma})=(\frac{\rho_p}{\rho}-1)\ \Delta h_p=12.6\Delta h_p$$

此时管道通过的实际流量：

$$Q_{实}=\mu K\sqrt{12.6\Delta h_p}$$

思考：当喉管管径过细时会出现什么情况?

如图大气压强为97kN/m^2。收缩段的直径应当限制在什么数值以上，才能保证不出现空化。已知水温为40°C，γ=9.73kN/m^3，ρ=992.2kg/m^3，汽化压强p’=7.38kN/m^2。



解：列水面和收缩断面的能量方程时，为了不出现空化，可以以汽化压强作为最小压强值，求出相应的收缩段直径d_{min}，当喉管直径大于d_{min}时，就可避免空化。

解：水面和收缩断面的能量方程如下：

$$10+\frac{p_a}{\gamma}=3+\frac{v_c^2}{2g}+\frac{p'}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{v_c^2}{2g}=16.25m$$

水面和出口断面的能量方程如下：

$$\frac{v^2}{2g}=10m$$

根据连续性方程：

$$\frac{v_c}{v}=\frac{d^2}{d_c^2}$$

$$\Longrightarrow \quad d_c=133mm$$

【例题】 有一贮水装置如图所示，贮水池足够大，当阀门关闭时，压强计读数为2.8个大气压强。而当将阀门全开，水从管中流出时，压强计读数是0.6个大气压强，试求当水管直径d=12cm时，通过出口的体积流量(不计流动损失)。

【解】 当阀门全开时列1-l、2-2截面的伯努利方程

$$H+\frac{p_a}{\rho g}+0=0+\frac{p_a+0.6p_a}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}$$

当阀门关闭时，根据压强计的读数，应用流体静力学基本

方程求出H值

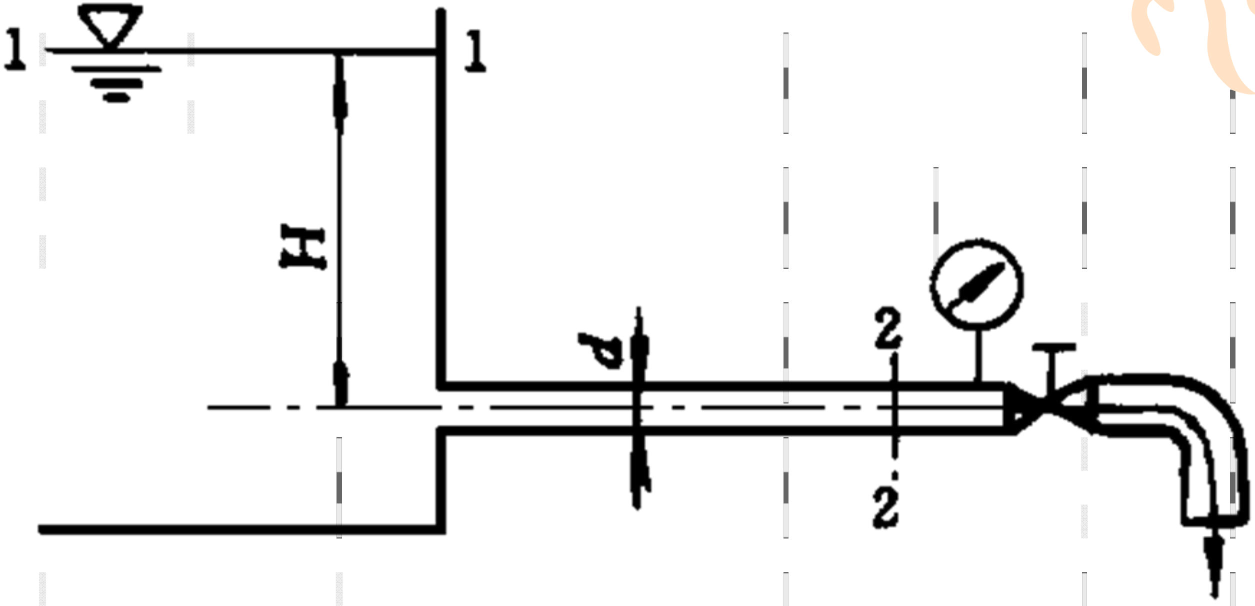
则
$$p_a+\rho gH=p_a+2.8p_a$$

代入到上式 $H=\dfrac{2.8p_a}{\rho g}=\dfrac{2.8\times98060}{9806}=28(\mathrm{mH_2O})$

$$V_2=\sqrt{2g\left(H-\frac{0.6p_a}{\rho g}\right)}=\sqrt{2\times9.806\times\left(2.8-\frac{0.6\times98060}{9806}\right)}=20.78$$（m/s）

- 所以管内流量

$$q_V=\frac{\pi}{4}d^2V_2=0.785\times0.12^2\times20.78=0.235$$（m^3/s）



例题图

【例题】 水流通过如图所示管路流入大气，已知：U形测压管中水银柱高差Δh=0.2m，h_1=0.72m H_2O，管径d_1=0.1m，管嘴出口直径d_2=0.05m，不计管中水头损失，试求管中流量q_v。

【解】 首先计算1-1断面管路中心的压强。因为A-B为等压面，列等压面方程得：

$$\rho_{\mathrm{Hg}} g\Delta h = p_1 + \rho g h_1$$

$$p_1 = \rho_{\mathrm{Hg}} g\Delta h - \rho g h_1$$

则

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{\rho_{\mathrm{Hg}}}{\rho}\Delta h - h_1 = 13.6\times 0.2 - 0.72 = 2 \quad (\mathrm{mH_2O})$$

列1-1和2-2断面的伯努利方程

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

由连续性方程：

$$V_1 = V_2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$$

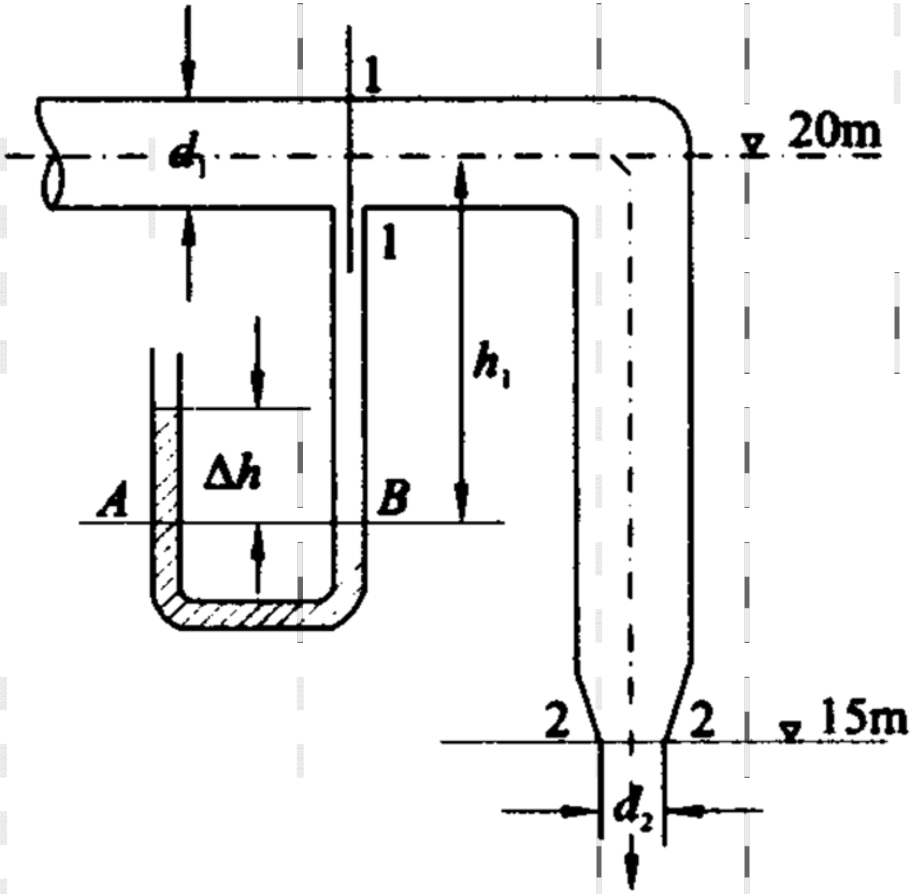
将已知数据代入上式，得

$$20+2+\frac{1}{16}\frac{V_2^2}{2g}=15+0+\frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2=\sqrt{\frac{19.6\times7\times16}{15}}=12.1$$ （m/s）

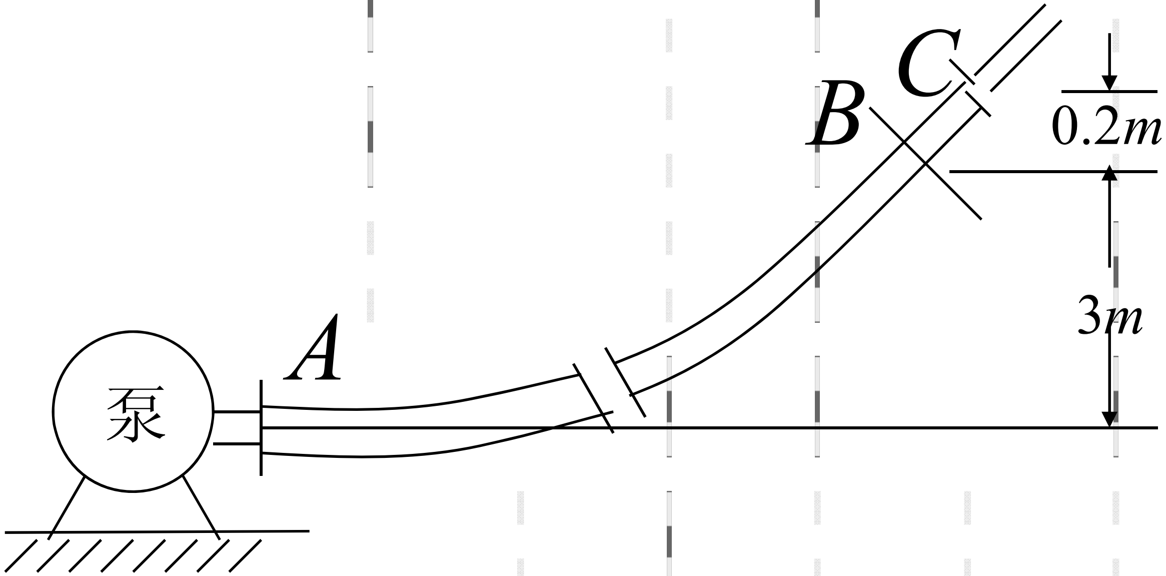
管中流量

$$q_V=\frac{\pi}{4}d_2^2V_2=\frac{\pi}{4}\times0.05^2\times12.1=0.024$$ （m^3/s）



例题图

[例题]一救火水龙带，喷嘴和泵的相对位置如图所示。泵出口压力（*A*点压力）为2个大气压（表压），泵排出管断面直径为50*mm*；喷嘴出口*C* 的直径20*mm*；水龙带的水头损失设为0.5*m*；喷嘴水头损失为0.1*m*。试求喷嘴出口流速、泵的排量及*B*点压强。



例题示意图

[解]　取A、C两断面写能量方程：

$$z_A+\frac{p_A}{\rho g}+\frac{\upsilon_A^2}{2g}=z_C+\frac{p_C}{\rho g}+\frac{\upsilon_C^2}{2g}+h'_{A-C}$$

通过A点的水平面为基准面，则　$z_A=0, z_C=3.2\text{m}$；

$p_A=2at=1.96\times10^8\text{Pa}, p_c=0$（在大气中）；水的重度$\rho g=9800\,\text{N}/m^3$，

重力加速度 $g=9.8\text{m/s}^2$；$h'_{A-C}=0.5+0.1=0.6\text{m}$水柱，即

$$\upsilon_A=\upsilon_C\frac{A_C}{A_A}=\upsilon_C\left(\frac{dc}{dA}\right)^2=\upsilon_C\left(\frac{20}{50}\right)^2=0.16\upsilon_C$$

将各量代入能量方程后，得

$$0+\frac{2\times9.8\times10^4}{9800}+\frac{(0.16\upsilon_C)^2}{2\times9.8}=3.2+0+\frac{\upsilon_C^2}{2\times9.8}+0.6$$

解得喷嘴出口流速为 $\upsilon_C = 18.06 \left({}^{m}/_{s} \right)$。

而泵的排量为

$$Q = \upsilon_C A_C = 18.06 \times \pi \times {}^{(0.02)^2}/_{4} = 0.00568\, {}^{m^3}/_{s} = 5.68\, {}^{l}/_{s}$$

为计算*B*点压强，取*B*、*C*两断面计算，即

$$z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{\upsilon_B^2}{2g} = z_C + \frac{p_C}{\rho g} + \frac{\upsilon_C^2}{2g} + h'_{B-C}$$

通过*B*点作水平面基准面，则

$$z_B = 0, z_C = 0.2m; \upsilon_B = \upsilon_A = 0.16\upsilon_C = 0.16 \times 18.06 = 2.89\, {}^{m}/_{s}; h'_{\mathrm{B}-C} = 0.1m;$$

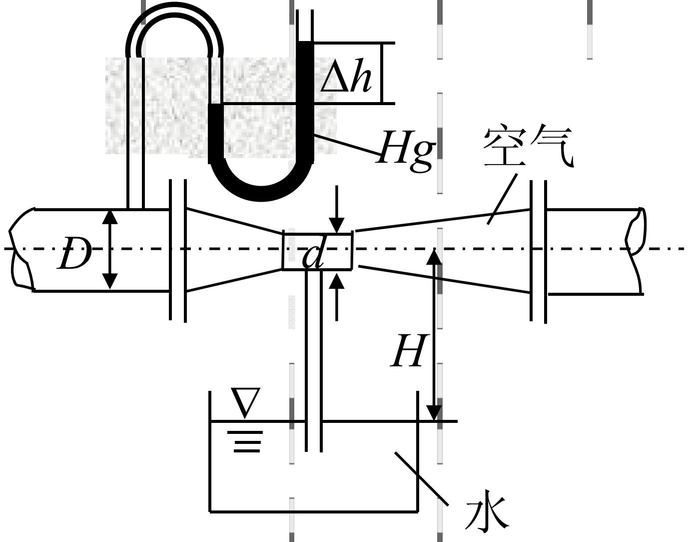
代入方程得

$$0 + \frac{p_B}{9800} + \frac{(2.89)^2}{2 \times 9.8} = 0.2 + 0 + \frac{(18.06)^2}{2 \times 9.8} + 0.1$$

解得压强

$$p_B = 1.65\ (at)$$

【例题】 风管直径 D=100 mm ,空气重度$\gamma=12\ \mathrm{N/m^2}$，在直径 d ＝50 mm 的喉部装一细管与水池相连，高差 H=150 mm ,当汞测压计中读数 $\Delta h=25\mathrm{mm}$时，开始从水池中将水吸入管中，问此时空气流量为多大？



例题 附 图

解:(1) 测压管处风压

$$p_1=\Delta h(\gamma_{汞}-\gamma_{气})\ =3331.7\ \mathrm{N/m^2}$$

(2) 喉部压力

$$p_2=-H\gamma_{水}=-1471.5\ \mathrm{N/m^2}$$

(3) 列1,2 两处能量方程，求速度

$$p_1+\frac{\rho V_1^2}{2}=p_2+\frac{\rho V_2^2}{2}$$

由连续方程 $V_2=V_1\dfrac{D^2}{d^2}$ 代入上式，解得

$$V_1=\sqrt{\frac{(p_1-p_2)2g}{\gamma[(\frac{D^2}{d^2})^2-1]}}=\sqrt{\frac{(3331.7+1471.5)\times2\times9.8}{12[(\frac{100^2}{50^2})^2-1]}}$$

$$=22.87\ \mathrm{m/s}$$

(4) 流量

$$Q=V_1\frac{\pi D^2}{4}=22.87\times\frac{3.14\times0.1^2}{4}=0.18\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

§3.10总水头线与测压管水头线

为了形象地反映总流中各种能量的变化规律，可将能量方程用图形表示。

纵坐标 长度（方程各项都具有长度因次），铅垂方向

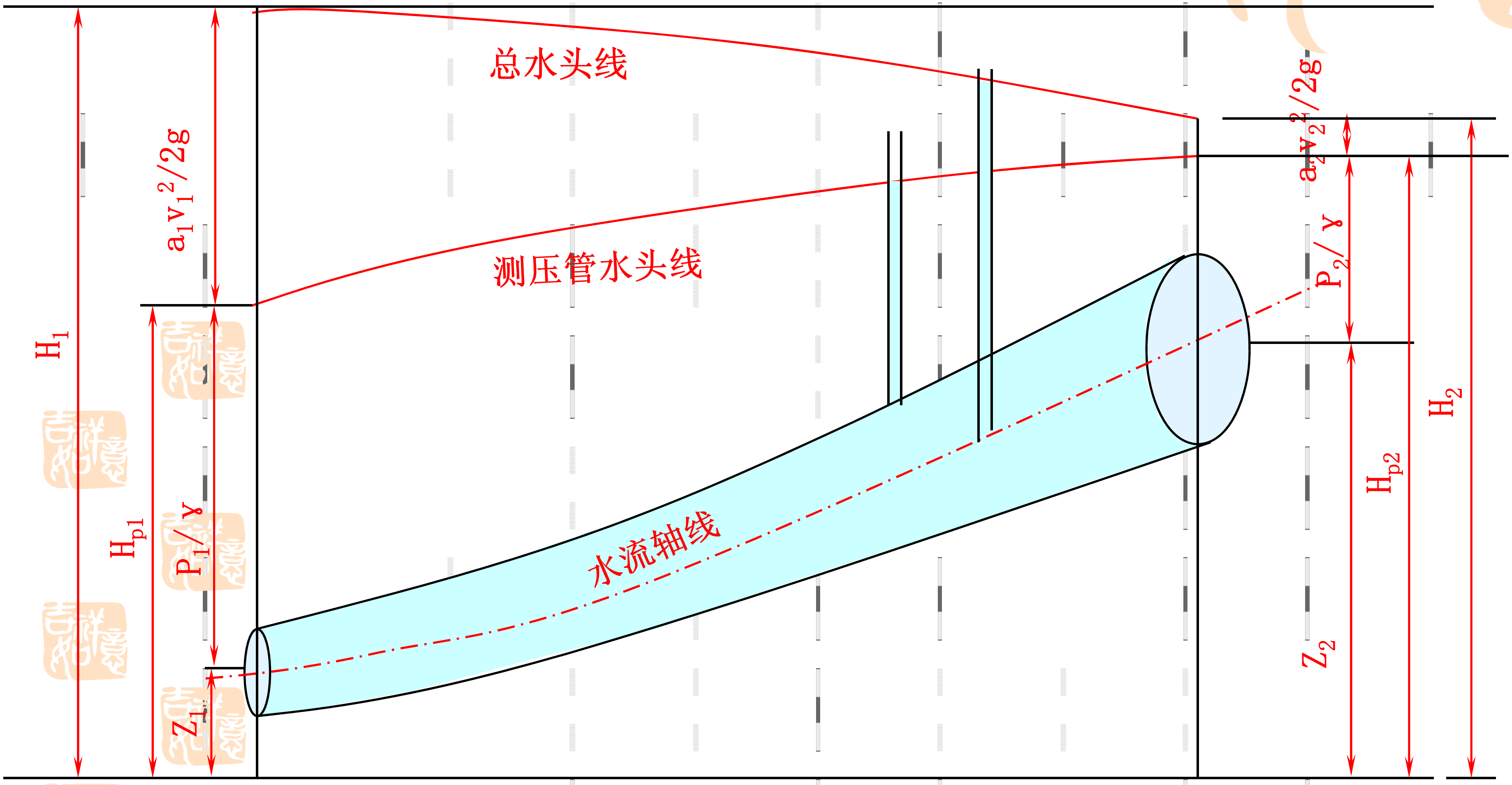
横坐标 流程坐标，管道：轴线；明渠：渠道底，并都将建筑物（管道、明渠）轮廓一并画出。

代表点 过水断面上，各点位置水头、压强水头不同，所以，要在过水断面选取代表点。

管道：管中心　　明渠：自由表面。

§3.10 总水头线和测压管水头线

应用总水头线和测压管水头线描绘一元流动全线压强和流速。

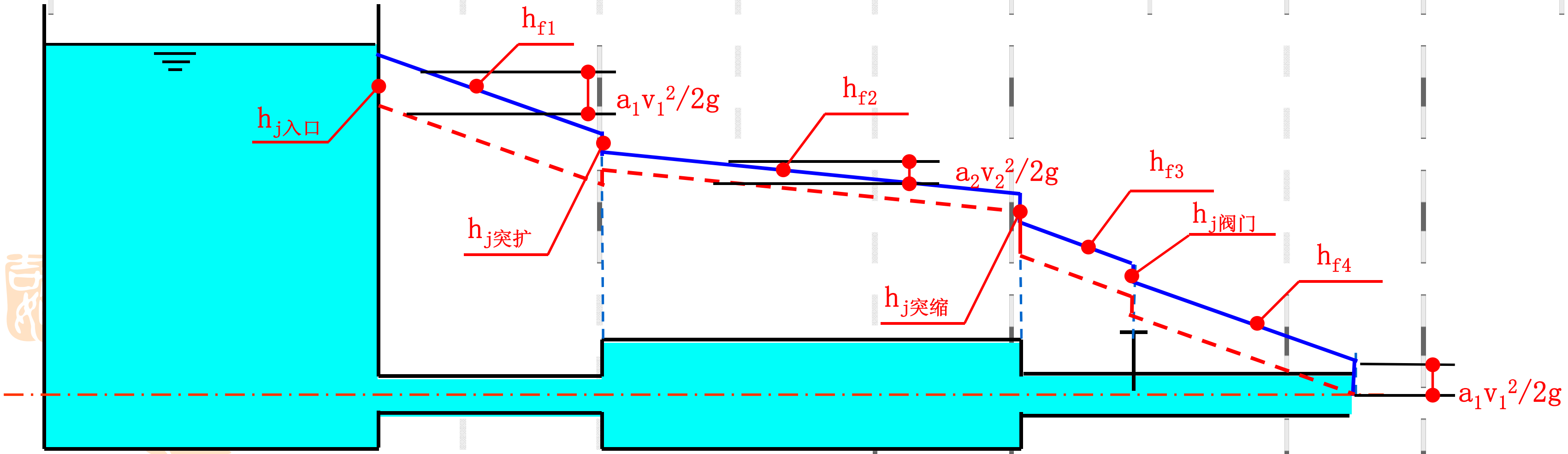


图中，H为总水头，H_p为测压管水头。

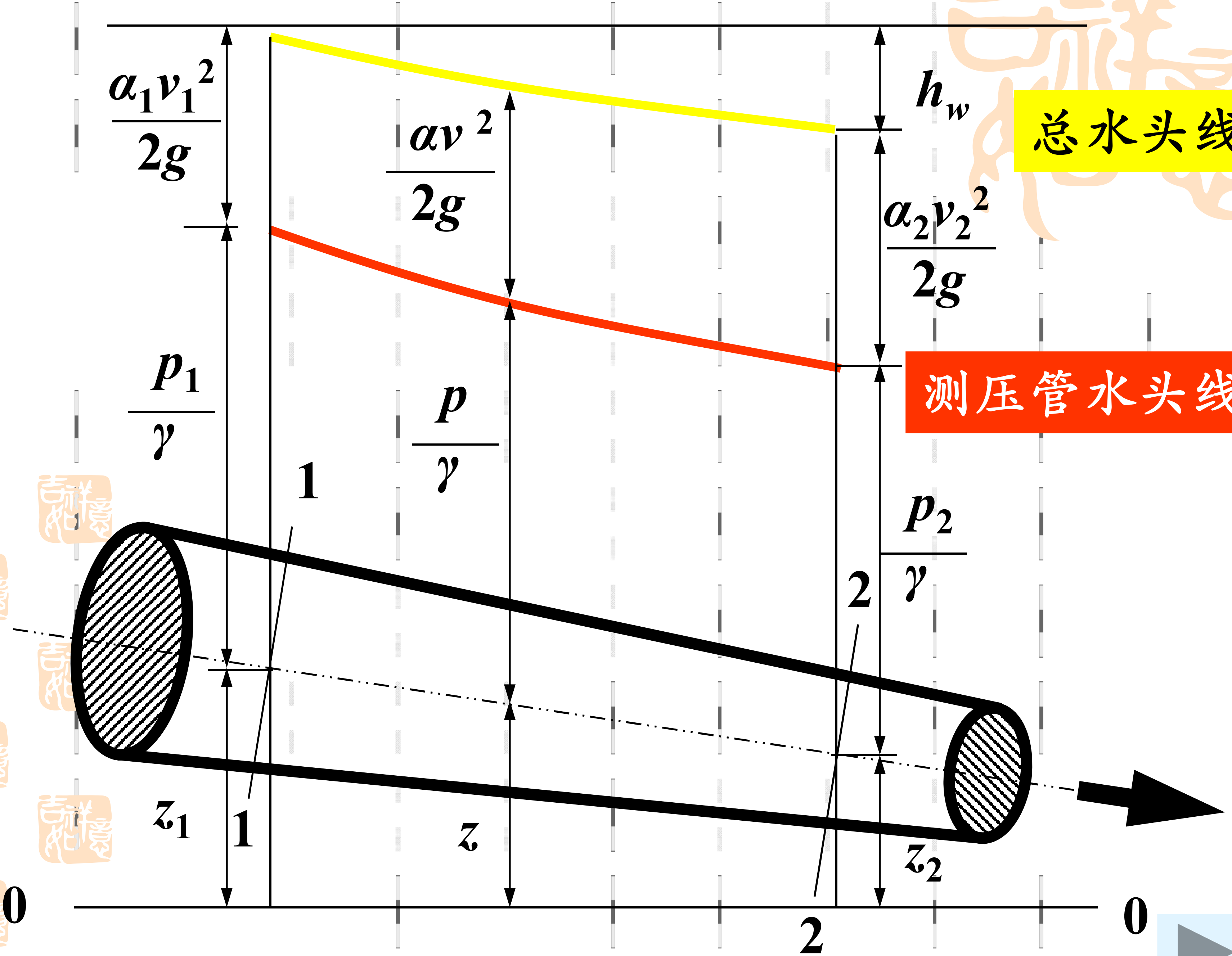
$$H = H_p + \frac{v^2}{2g}$$

$$H_p = Z + \frac{p}{\gamma}$$

若设h_f为沿程阻力损失，h_j为局部阻力损失。则管路系统的水头损失如下图。

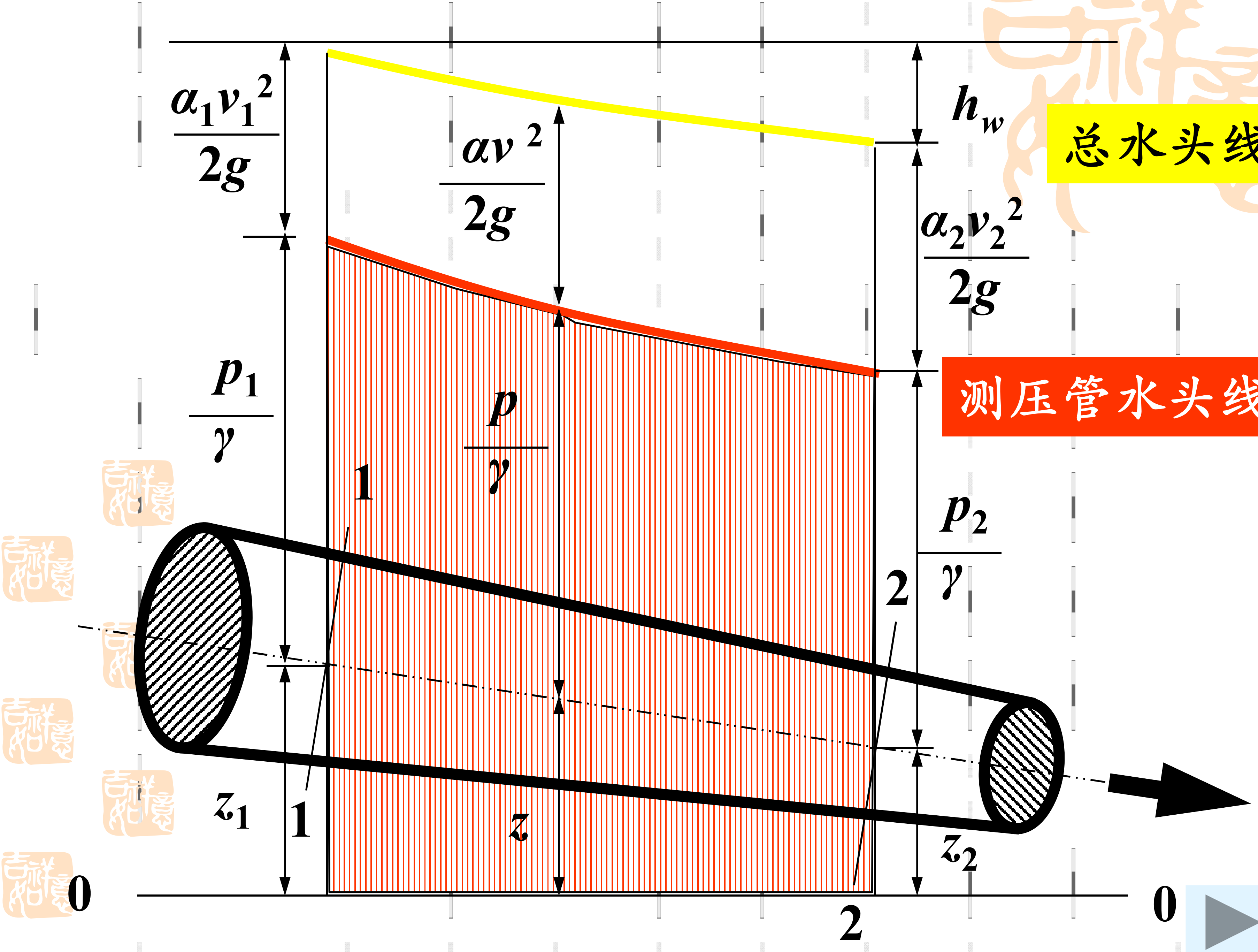


设 $J=h_f/L$，则称J为水力坡度。工程上成为单位长度摩擦阻力损失，也称为比摩阻。


$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}$
$\frac{\alpha v^2}{2g}$
h_w
$\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$
$\frac{p_1}{\gamma}$
$\frac{p}{\gamma}$
$\frac{p_2}{\gamma}$
1
1
2
2
z_1
z
z_2
0
0

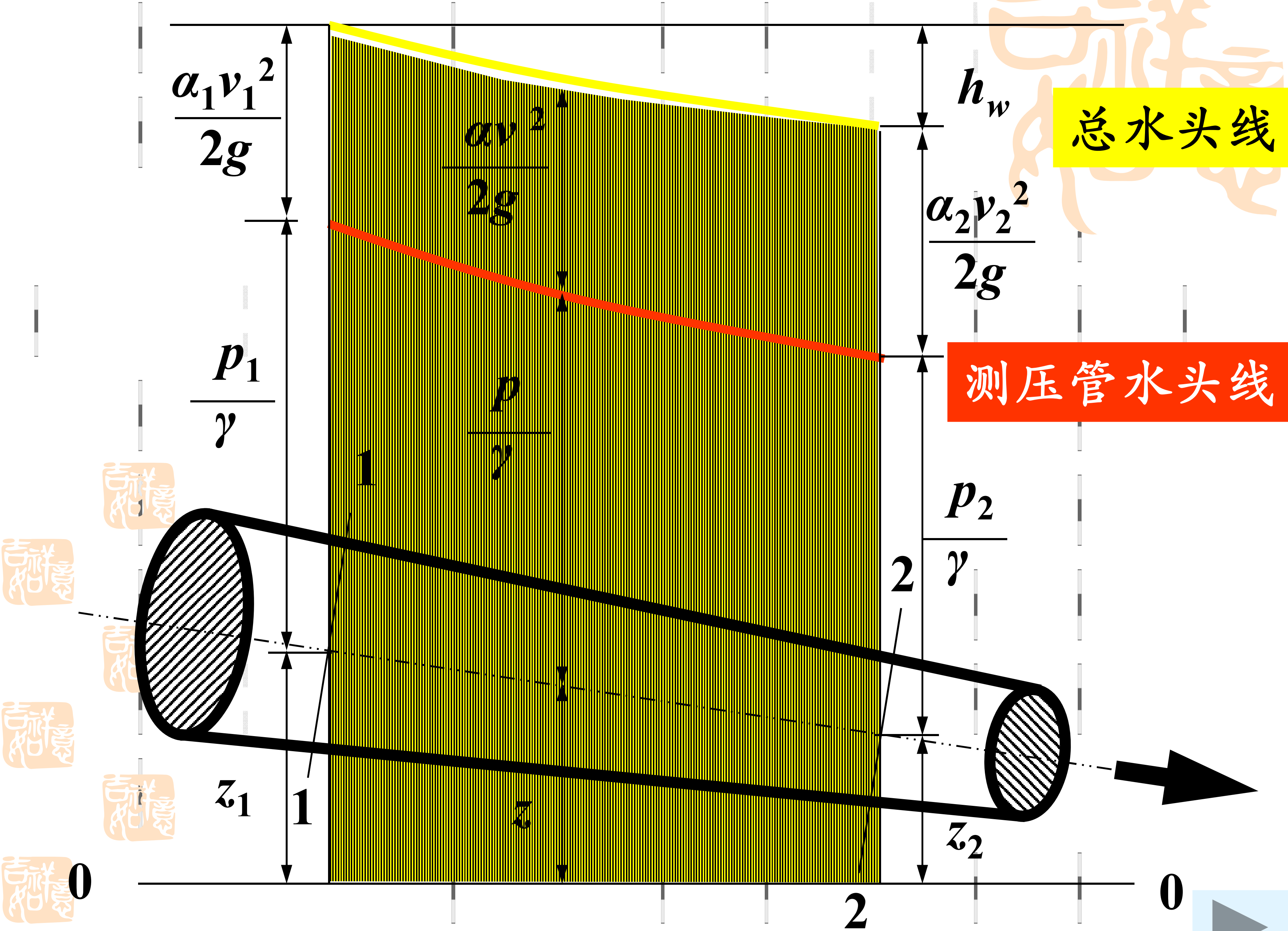
总水头线

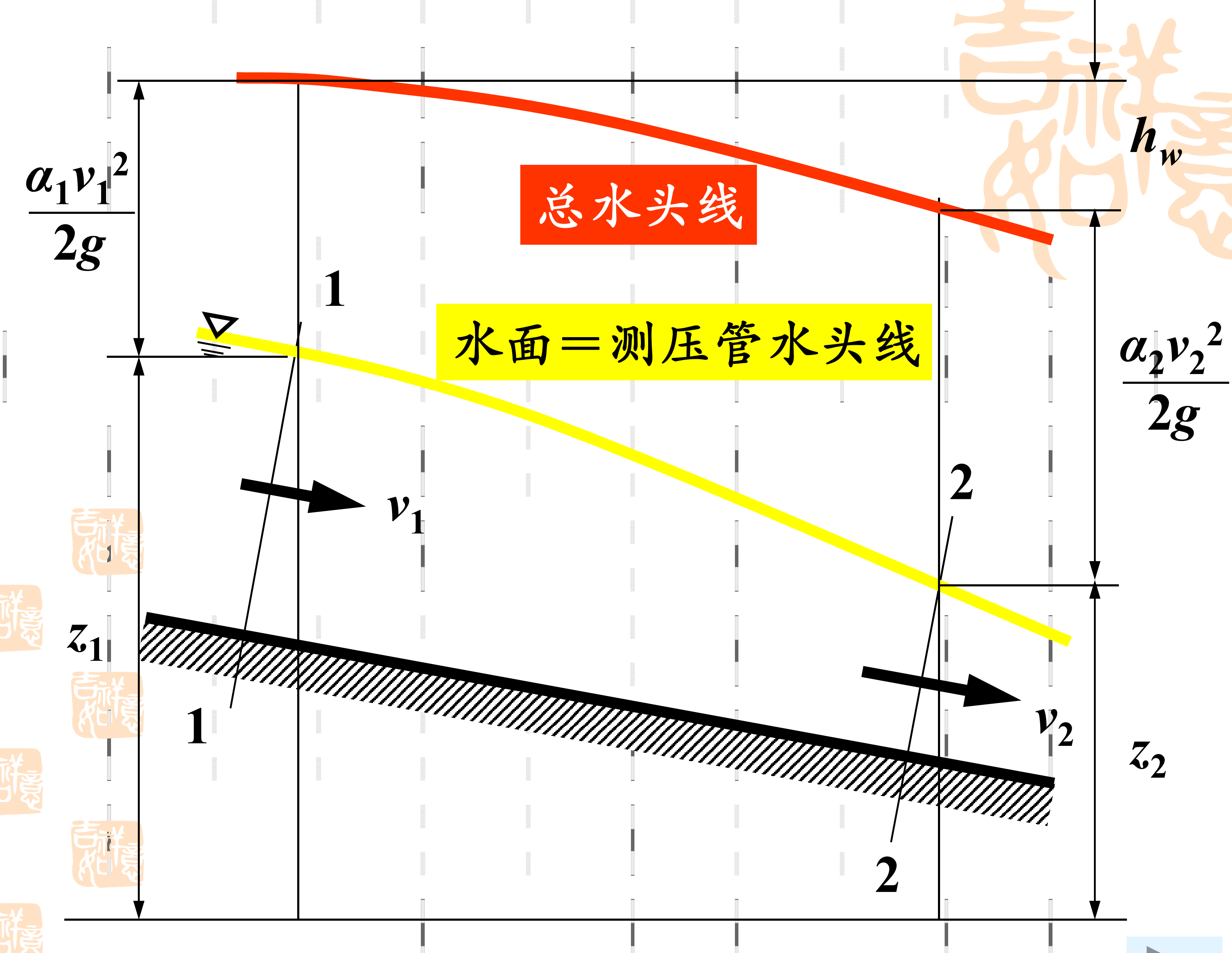
测压管水头线

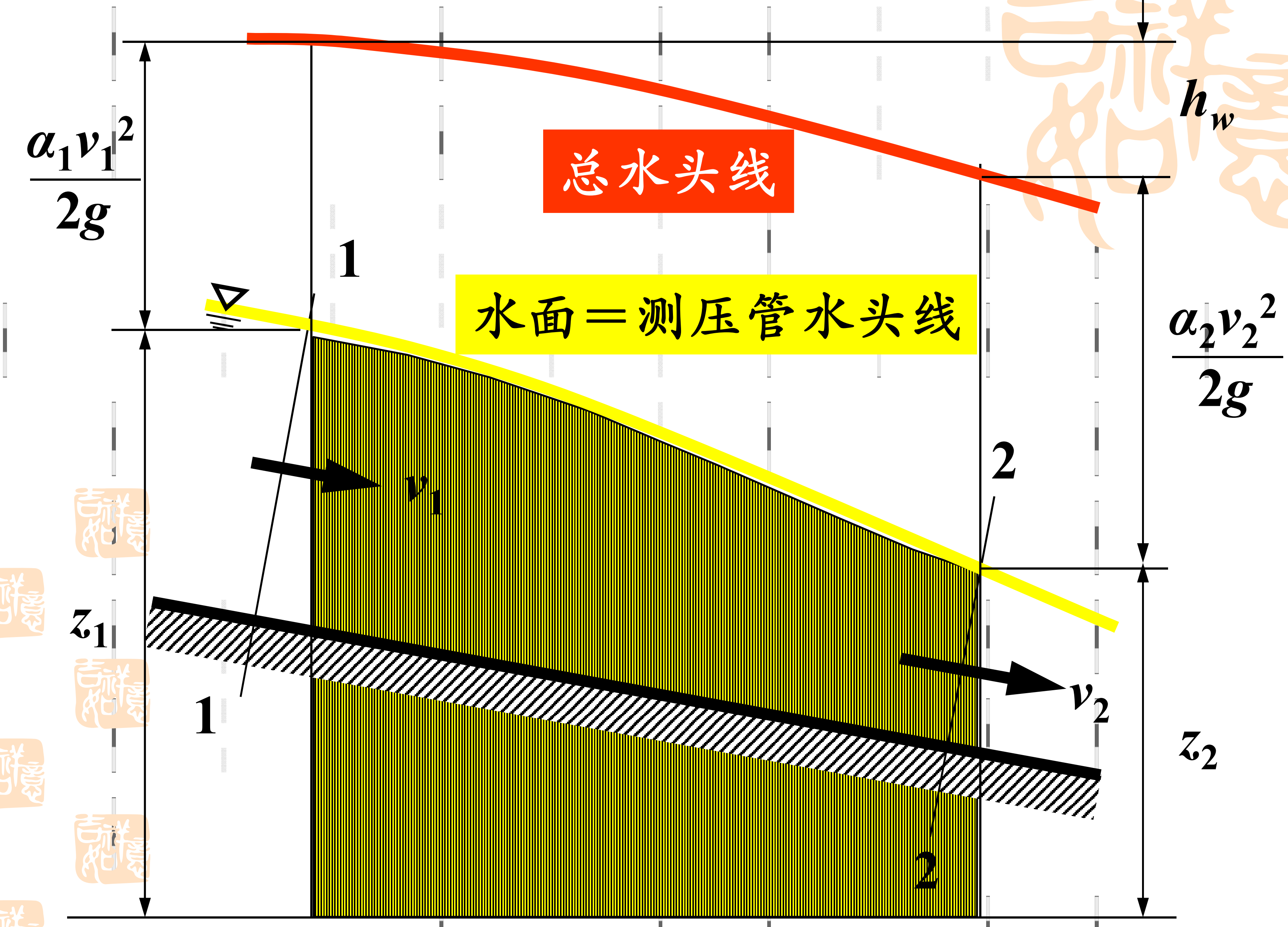

$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}$
$\frac{\alpha v^2}{2g}$
h_w
$\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$
$\frac{p_1}{\gamma}$
$\frac{p}{\gamma}$
$\frac{p_2}{\gamma}$
1
1
2
2
z_1
z
z_2
0
0

总水头线

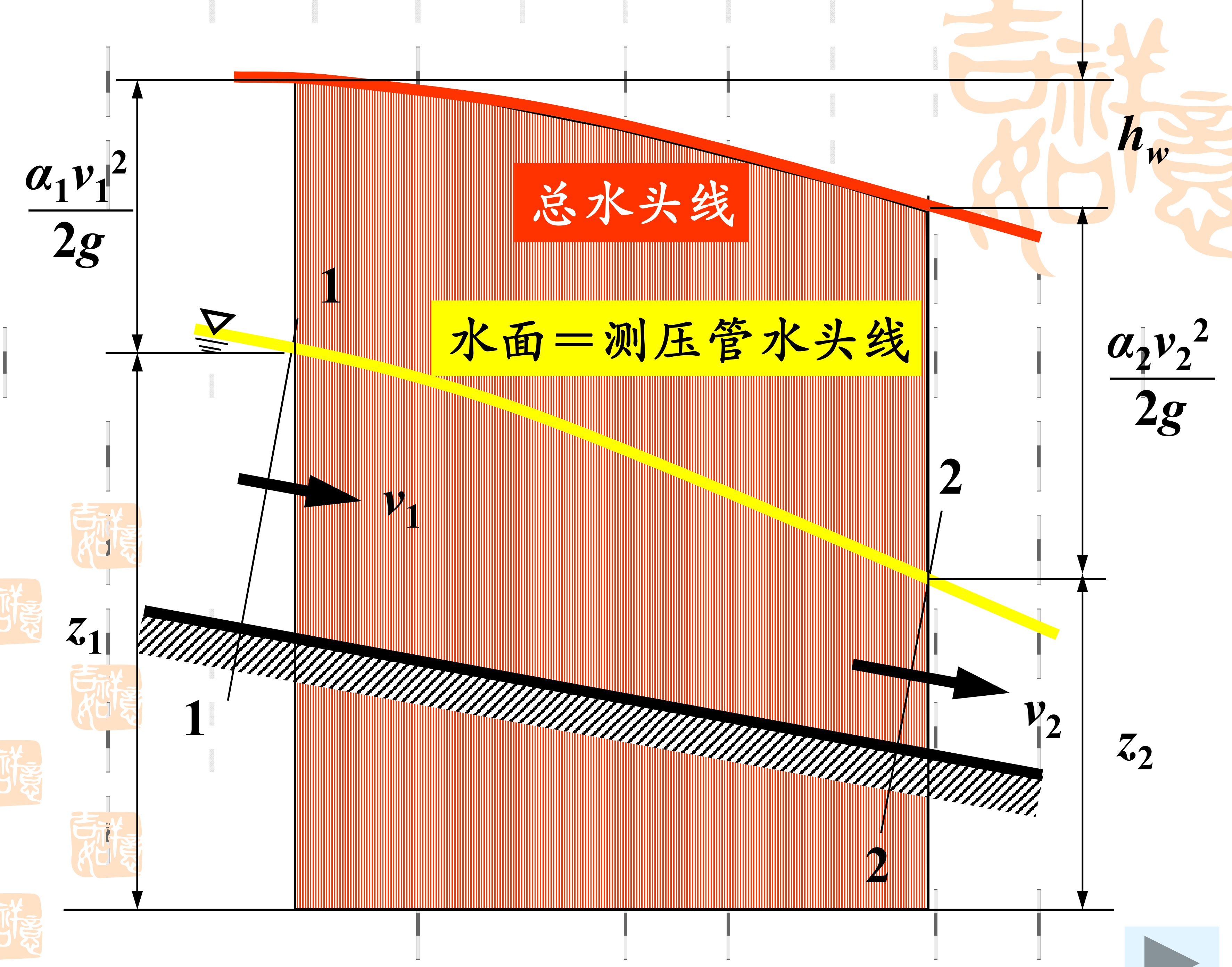
测压管水头线

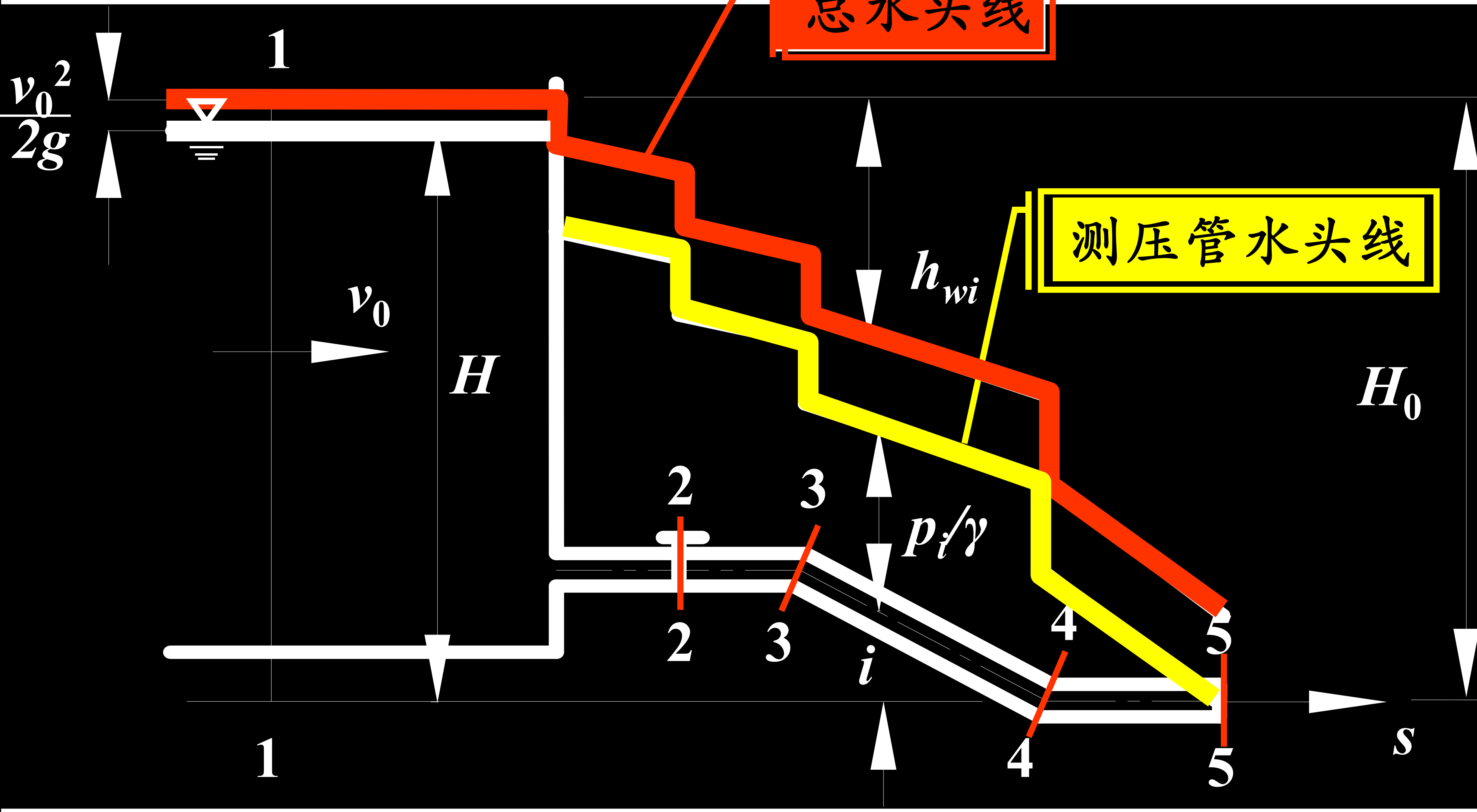

总水头线
测压管水头线
h_w
$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}$
$\frac{\alpha v^2}{2g}$
$\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$
$\frac{p_1}{\gamma}$
$\frac{p}{\gamma}$
$\frac{p_2}{\gamma}$
z_1
z
z_2
1
1
2
2
0
0

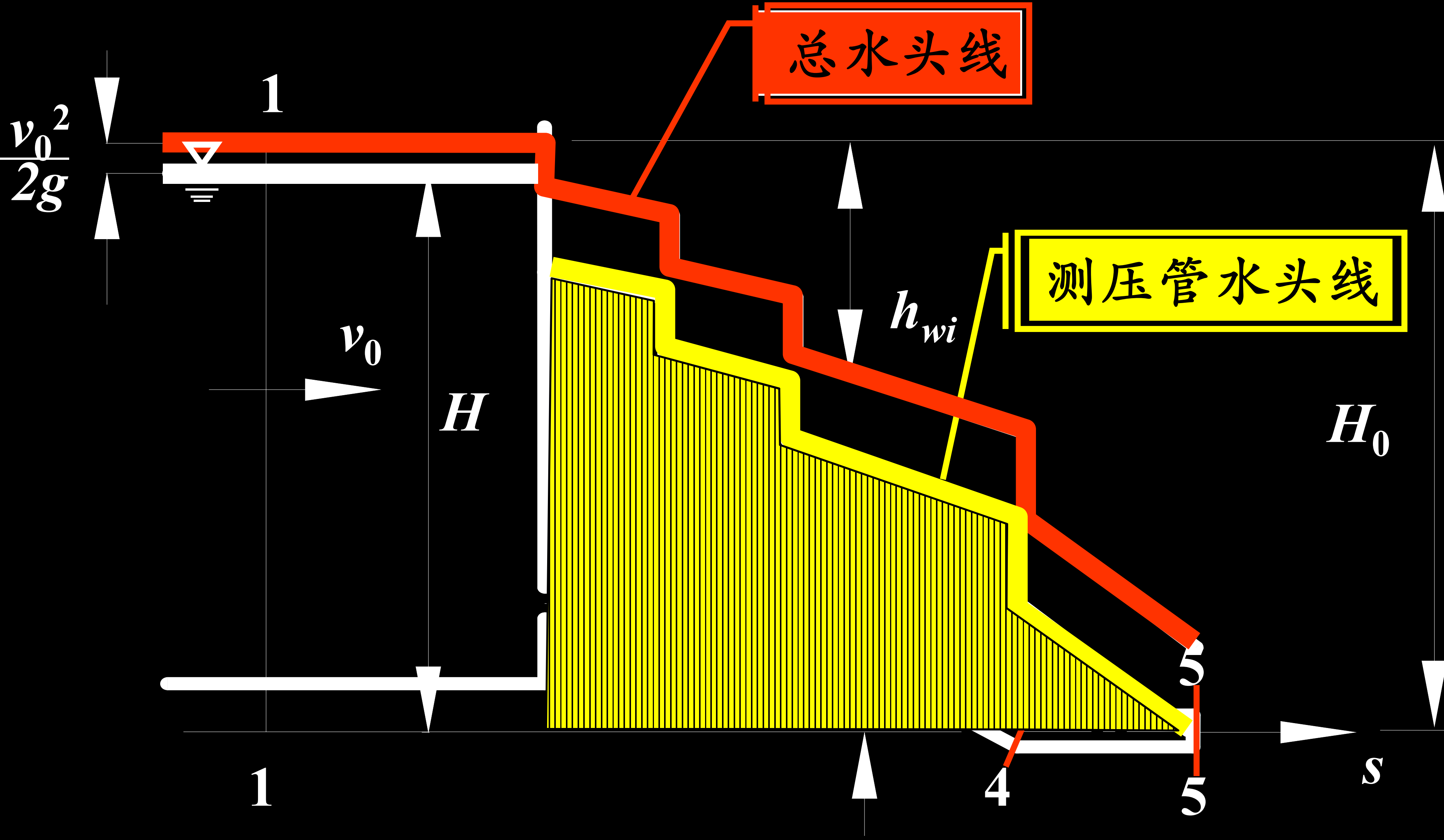

$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}$
总水头线
h_w
1
水面＝测压管水头线
$\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$
v_1
2
z_1
1
v_2
z_2
2

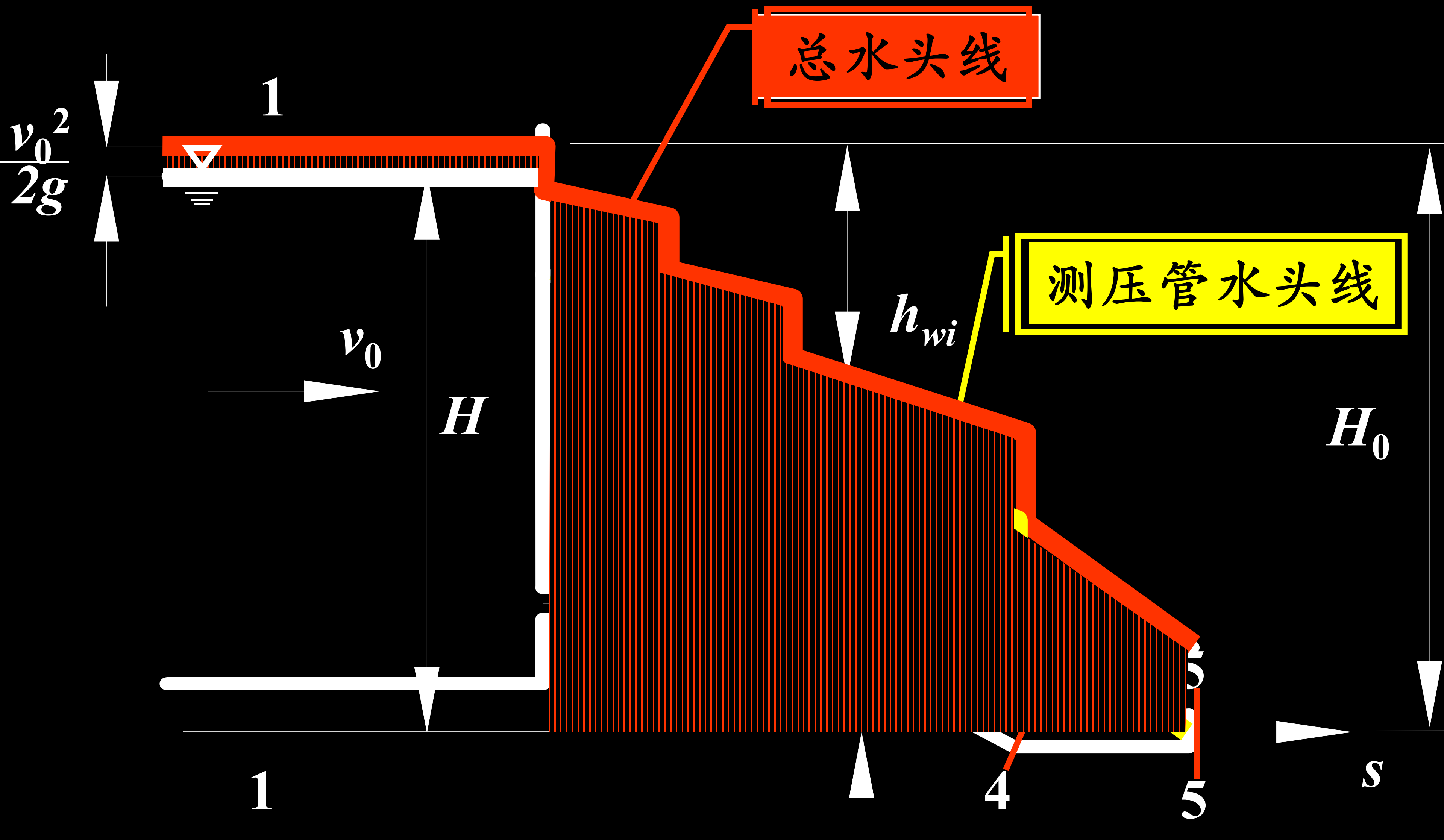


$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}$
h_w
总水头线
1
水面＝测压管水头线
$\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$
v_1
2
z_1
1
v_2
z_2
2


$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}$
总水头线
h_w
1
水面＝测压管水头线
$\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$
2
v_1
z_1
1
v_2
z_2
2


总水头线
测压管水头线
1
$\frac{v_0^2}{2g}$
v_0
H
h_{wi}
H_0
p_i/γ
2
3
2
3
i
4
5
4
5
1
s


总水头线
测压管水头线
1
$\frac{v_0^2}{2g}$
v_0
H
h_{wi}
H_0
1
4
5
5
s


总水头线
测压管水头线
1
$\frac{v_0^2}{2g}$
v_0
H
h_{wi}
H_0
5
1
4
5
s

液体运动的三大方程

连续方程：$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 =$ 常数

动量方程：$\rho Q(\beta_2 \vec{\mathbf{v}}_2 - \beta_1 \vec{\mathbf{v}}_1) = \sum \vec{\mathbf{F}}$

能量方程：

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \underline{hw}$$

§3.11　恒定总流动量方程

恒定流动量方程主要作用是解决作用力问题，特别是流体与固体之间的总作用力。

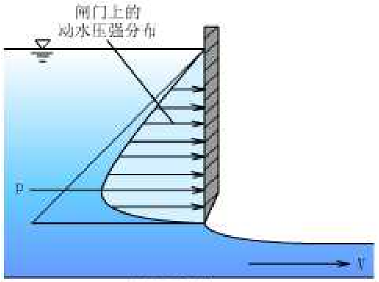
动量定律：作用与物体的冲量，等于物体的动量增量。

$$\sum \vec{F}\, dt = d\left(m\vec{v} \right)$$

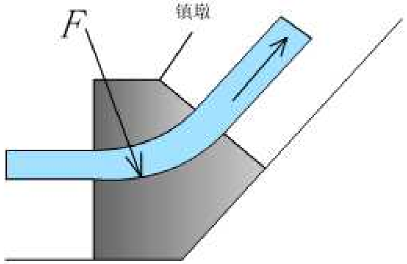
§3.11　恒定总流动量方程

计算水流与固体边界的相互作用力问题

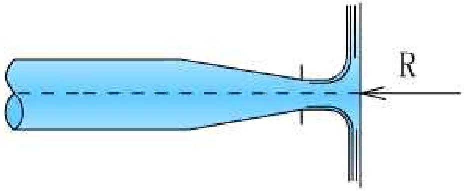
运动物体单位时间内动量的变化等于物体所受外力的合力



(a)闸门上的
动水总压力



(b)弯头上的
动水总作用力



(c)射流冲击力

§3.11 恒定总流动量方程

3.11.1动量方程推导

动量方程是动量定理在流体力学中的具体表达。本节讨论流体作定常流动时的动量变化和作用在流体上的外力之间的关系。一般力学中动量定理表述为：物体动量的变化率等于作用在该物体上的所有外力的矢量和。

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\vec{k} = m\vec{u}$$

在此先建立控制体的概念：所谓控制体是空间的一个固定不变的区域，它的边界面称为控制面。

如图，现以总流的一段管段为例。取断面1和2以及其间管壁表面所组成的封闭曲面为控制面，内部的空间为控制体。流体从控制面1流入控制体，从控制面2流出，管壁可看成流管，无流体进出。

在t时刻流段所具有的动量为

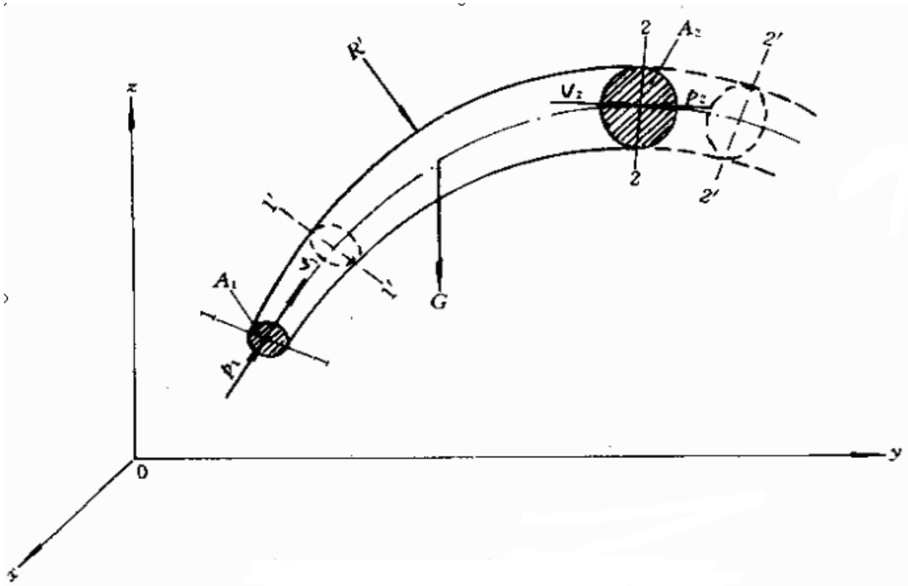
$$\vec{k}_{1-2}=\vec{k}_{1-1'}+\left(\vec{k}_{1'-2}\right)_{\Delta t_0}$$

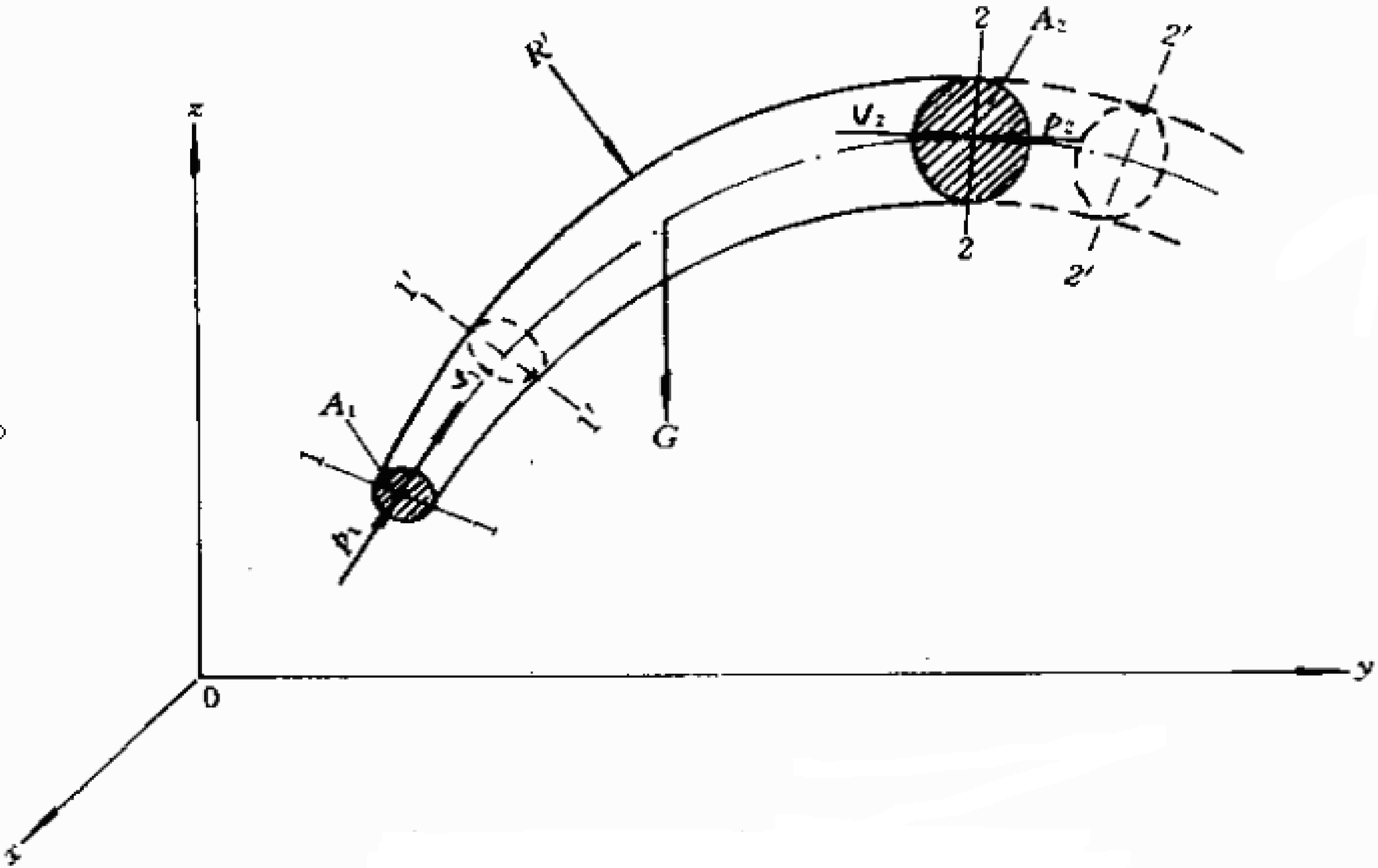
经过dt时段后，流段移动到$1'-2'$，这时流段所具有的动量为

$$\vec{k}_{1'-2'}=\left(\vec{k}_{1'-2}\right)_{\Delta t}+\vec{k}_{2-2'}$$

对定常流有

$$\left(\vec{k}_{1'-2}\right)_{\Delta t_0}=\left(\vec{k}_{1'-2}\right)_{\Delta t}$$





z
R'
2
A₂
2'
V₂
p₂
1
S₁
A₁
p₁
G
2
2'
0
y
x

所以 $d\vec{k}=\vec{k}_{1'-2'}-\vec{k}_{1-2}=\vec{k}_{2-2'}-\vec{k}_{1-1'}$

在此流段的总流中任取一元流，设进、出口断面1-1和2-2上的过水面积为dA_1、dA_2，则

$$\vec{k}_{1-1'}=\int_{A_1}(\rho_1 u_1 dA_1)\vec{u}_1 dt$$

$$\vec{k}_{2-2'}=\int_{A_2}(\rho_2 u_2 dA_2)\vec{u}_2 dt$$

令动量修正系数 $\beta=\frac{\int_A u^2 dA}{V^2 A}$ ，则上式可进一步写成

$$\vec{k}_{1-1'}=\beta_1\rho_1 u_1 A_1\vec{u}_1 dt$$

$$\vec{k}_{2-2'}=\beta_2\rho_2 u_2 A_2\vec{u}_2 dt$$

其中 $\rho_1 V_1 A_1=\rho_2 V_2 A_2=\rho_1 Q_1=\rho_2 Q_2=\rho Q$。将这些关系代入动量定理的表达式中，可得

$$\sum \vec{F} = \rho Q\left(\beta_2 \vec{V}_2 - \beta_1 \vec{V}_1\right)$$

上式为恒定流总流动量方程。它是矢量方程，实际上常用三个坐标轴上的投影式表示，即

$$\left.\begin{aligned}\sum F_x &= \rho Q\left(\beta_2 V_{2x} - \beta_1 V_{1x}\right)\\ \sum F_y &= \rho Q\left(\beta_2 V_{2y} - \beta_1 V_{1y}\right)\\ \sum F_z &= \rho Q\left(\beta_2 V_{2z} - \beta_1 V_{1z}\right)\end{aligned}\right\}$$

应用动量方程解题时要注意以下几点:

- 动量方程是一个矢量方程，经常使用投影式。注意外力、速度和方向问题，它们与坐标方向一致时为正，反之为负。
- 在考虑外力时注意控制体外的流体通过进口断面和出口断

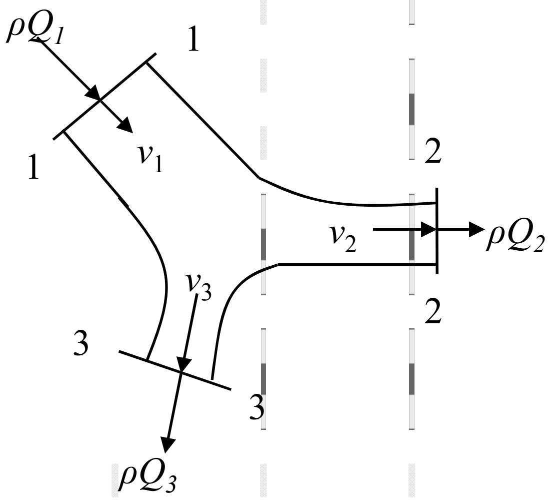
面对控制体内流体的作用力。

- 外力中包含了壁面对流体作用力 $\vec{R}$ ，而求解问题中往往需要确定流体作用在壁面上的力 $\vec{R}'$ ，这两个力按牛顿第三定理 $\vec{R}=\vec{R}'$ 。
- 动量修正系数在计算要求精度不高时，常取1。

适用条件：不可压缩液体、恒定流、过水断面为均匀流或渐变流过水断面、无支流的汇入与分出。

如图所示的一分叉管路，动量方程式应为：

$$\sum \vec{F} = \rho Q_2\beta_2\vec{V}_2 + \rho Q_3\beta_3\vec{V}_3 - \rho Q_1\beta_1\vec{V}_1$$



应用动量方程式解决问题的步骤：

选取适当的过流断面与隔离体

隔离体应包括动量发生的全部流段，即应对总流取隔离体；隔离体的两端断面要紧接所要分析的流段；隔离体的边界一般沿流向由固体边壁、自由液面组成，垂直于流向则由过流断面组成

建立适当的坐标系

投影轴可任意选取，以计算方便为宜

分析隔离体的受力情况

注意不要遗漏，并以正负号表明力的方向

分析隔离体流入、流出的动量，列动量方程

动量方程的右端是流出的动量减去流入的动量，不可颠倒

结合使用连续性方程和柏努利方程求解

动量方程式在工程中的应用

- 弯管内水流对管壁的作用力
- 水流对建筑物的作用力
- 射流对平面壁的冲击力

恒定总流动量方程式在工程中的应用

举例

适用条件

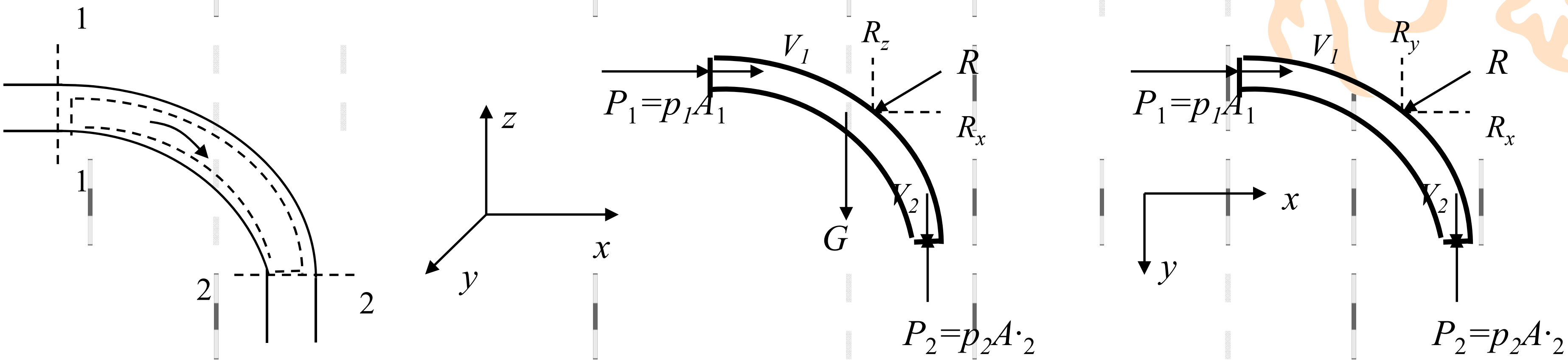
- 液流为恒定流；
- 液体为连续、不可压缩的液体；
- 所选的两个过水断面必须为渐变流断面。

注意事项

- 选取脱离体（上下游断面取在渐变流段上）；
- 选取合适的坐标轴，分析外力；
- 把动量方程写成分量形式求解；
- 联立其他方程求解

弯管内水流对管壁的作用力

- 管轴竖直放置
- 管轴水平放置



沿x方向列动量方程为：

$$p_1A_1 - R_x = \rho Q(0 - \beta_1 V_1)$$

$$R_x = p_1A_1 + \beta_1 \rho Q V_1$$

沿z方向列动量方程为：

$$p_2A_2 - G - R_z = \rho Q(-\beta_2 V_2 - 0)$$

$$R_z = p_2A_2 - G + \beta_2 \rho Q V_2$$

沿x方向列动量方程为：

$$p_1A_1 - R_x = \rho Q(0 - \beta_1 V_1)$$

$$R_x = p_1A_1 + \beta_1 \rho Q V_1$$

沿y方向列动量方程为：

$$R_y - p_2A_2 = \rho Q(\beta_2 V_2 - 0)$$

$$R_y = p_2A_2 + \beta_2 \rho Q V_2$$

例题 一变径弯管，轴线位于同一水平面，转角 $\alpha=60^o$ ，直径由 d_A＝200 mm 变为 d_B＝150 mm，在流量 $Q=0.1\text{m}^3/s$ 时，压强 $p_A=18\ \text{KN/m}^2$，求流对 AB 段弯管的作用力。不计弯管段的水头损失。

解： 求解流体与边界的作用力问题，一般需要联合使用连续性方程，能量方程和动量方程。

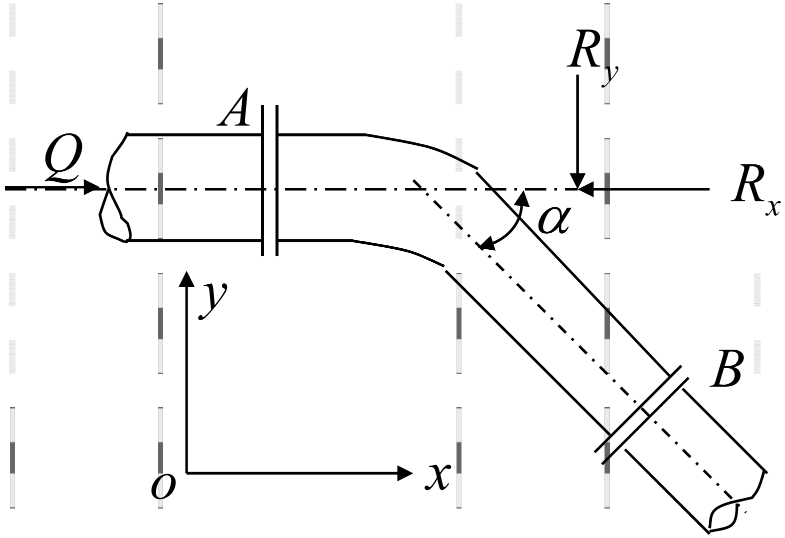
（1）用连续性方程计算 V_A 和 V_B

$$V_A=\frac{4Q}{\pi d_A^2}=3.18\ \text{m/s}$$

$$V_B=\frac{4Q}{\pi d_B^2}=5.66\ \text{m/s}$$

（2）用能量方程计算 p_B

$$p_B=p_A+\gamma(\frac{V_A^2}{2g}-\frac{V_B^2}{2g})=7.03\ \text{KN/m}^2$$



例题 附图

(3) 将流段AB作为隔离体取出，规定坐标正方向，假定弯管反力 R_x 和 R_y 的方向，写 x 和 y 两个坐标方向的动量方程：

$$\sum F_x = \rho Q(V_{Bx} - V_{Ax})$$

$$\sum F_y = \rho Q(V_{By} - V_{Ay})$$

代入题中的外力和流速，注意力和流速的正负性

$$p_A \frac{\pi}{4} d_A^2 - p_B \frac{\pi}{4} d_B^2 \cos\alpha - R_x = \rho Q(V_B \cos\alpha - V_A)$$

$$p_B \frac{\pi}{4} d_B^2 \sin\alpha - R_y = \rho Q(-V_B \sin\alpha - 0)$$

代入已知数据可求得 $R_x = 0.538\,\mathrm{KN}$, $R_y = 0.598\,\mathrm{KN}$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\ ,\ \theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$

（4）结论：流体对弯管的作用力与弯管的反力大小相等，方向相反，即 $R' = -R$ 。

二、动量方程应用举例

【例3-9】 水平放置在混凝土支座上的变直径弯管，弯管两端与等直径管相连接处的断面1-1上压力表读数$p_1=17.6\times10^4$Pa，管中流量$q_v=0.1m^3/s$，若直径$d_1=300$㎜，$d_2=200$㎜，转角Θ=60^0，如图3-25所示。求水对弯管作用力F的大小

【解】 水流经弯管，动量发生变化，必然产生作用力F。而F与管壁对水的反作用力R平衡。管道水平放置在xoy面上，将R分解成R_x和R_y两个分力。

取管道进、出两个截面和管内壁为控制面，如图所示，坐标按图示方向设置。

1.根据连续性方程可求得：

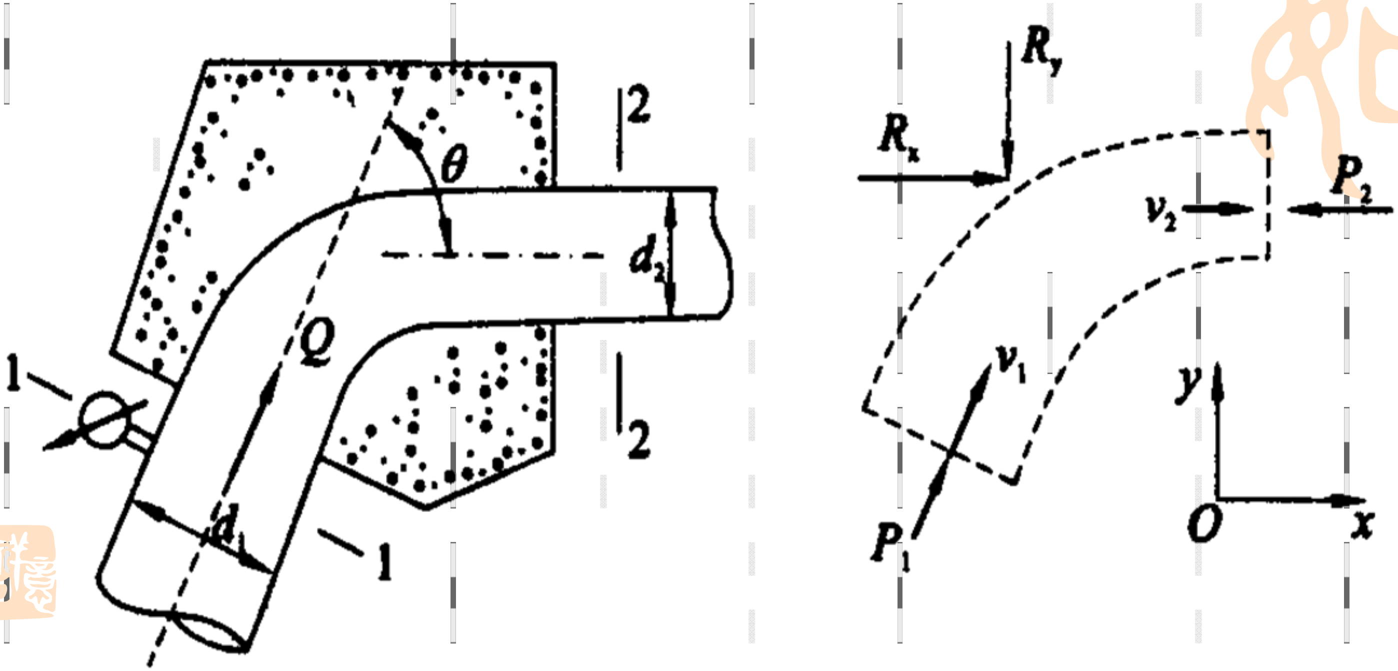


图 3-25

$$v_1 = \frac{q_V}{\frac{\pi}{4} d_1^2} = \frac{0.1 \times 4}{\pi \times 0.3^2} = 1.42 \text{(m/s)}$$

$$v_2 = \frac{q_V}{\frac{\pi}{4} d_2^2} = \frac{0.1 \times 4}{\pi \times 0.2^2} = 3.18 \text{(m/s)}$$

2.列管道进、出口的伯努利方程

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

则得：

$$p_2 = p_1 + \rho(v_1^2 - v_2^2)/2$$

$$= 17.6 \times 10^3 + 1000 \times (1.42^2 - 3.18^2)/2$$

$$= 17.2 \times 10^3 \quad \text{(Pa)}$$

3.所取控制体受力分析

进、出口控制面上得总压力：

$$P_1 = p_1 A_1 = 17.6\times10^3\times\frac{\pi}{4}\times0.3^2 = 12.43$$ （kN）

$$P_2 = p_2 A_2 = 17.2\times10^3\times\frac{\pi}{4}\times0.2^2 = 5.40$$ （kN）

壁面对控制体内水的反力R_x、R_y，其方向先假定如图(3-25)所示。

4.写出动量方程

选定坐标系后，凡是作用力（包括其分力）与坐标轴方向一致的，在方程中取正值；反之，为负值。

沿x轴方向

$$P_1\cos\theta - P_2 + R_x = \rho q_V (v_2 - v_1\cos\theta)$$

则 $R_x = \rho q_V (v_2 - v_1 \cos\theta) + P_2 - P_1 \cos\theta$

$$= 0.1 \times (3.18 - 1.42\cos 60^\circ) + 5.40 - 12.43\cos 60^\circ = -0.568（\text{kN}）$$

沿y轴方向 $P_1 \sin\theta - R_y = \rho q_V (0 - v_1 \sin\theta)$

$$R_y = P_1 \sin\theta + \rho q_V v_1 \sin\theta$$

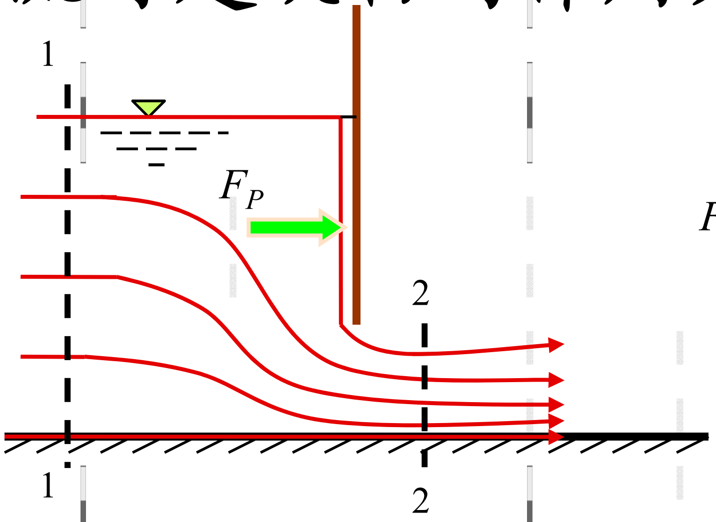
$$= 12.43\sin 60^\circ + 0.1 \times 1.42\sin 60^\circ = 10.88（\text{kN}）$$

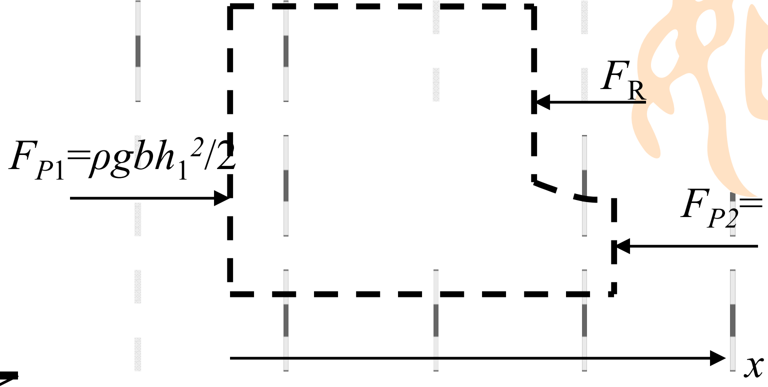
管壁对水的反作用力

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-0.568)^2 + 10.88^2} = 10.89\ (\text{kN})$$

水流对弯管的作用力F与R大小相等，方向相反。

水流对建筑物的作用力





沿x方向列动量方程为：

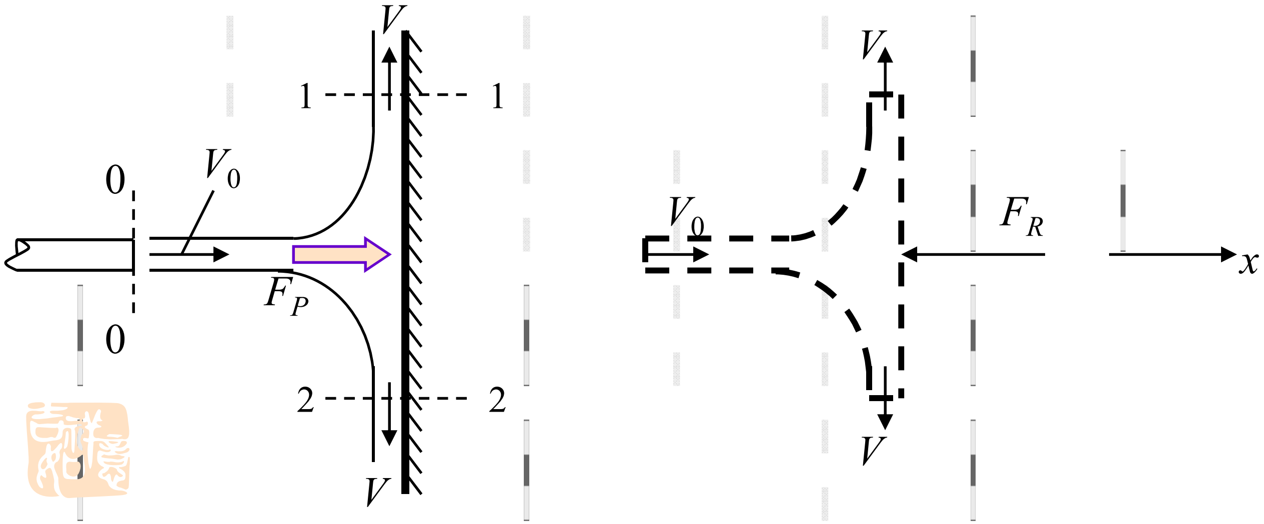
$$F_{P1}-F_{P2}-F_R=\rho Q(\beta_2V_2-\beta_1V_1)$$

$$F_R=F_{P1}-F_{P2}-\rho Q(\beta_2V_2-\beta_1V_1)$$

$$=\frac{1}{2}\rho gbh_1^2-\frac{1}{2}\rho gbh_2^2-\rho Q(\frac{Q}{A_2}-\frac{Q}{A_1})$$

$$=\frac{1}{2}\rho gbh_1^2-\frac{1}{2}\rho gbh_2^2-\rho\frac{Q^2}{b}(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1})$$

射流对平面壁的冲击力

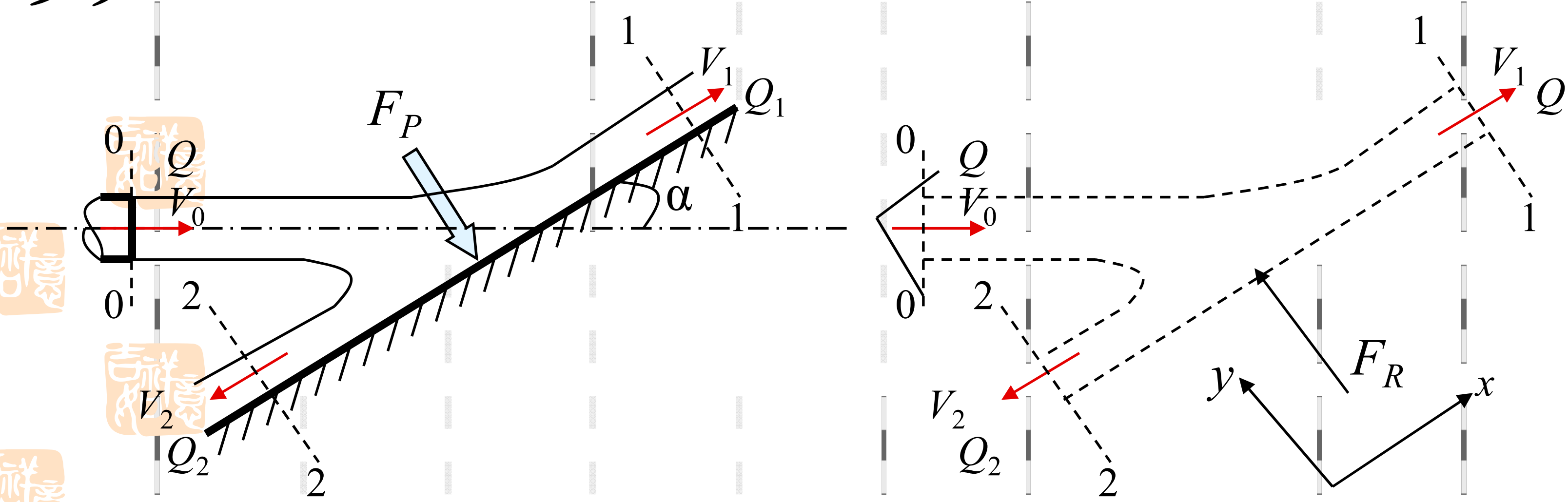


沿x方向列动量方程为： $-F_R = \rho Q(0-\beta_0 V_0)$

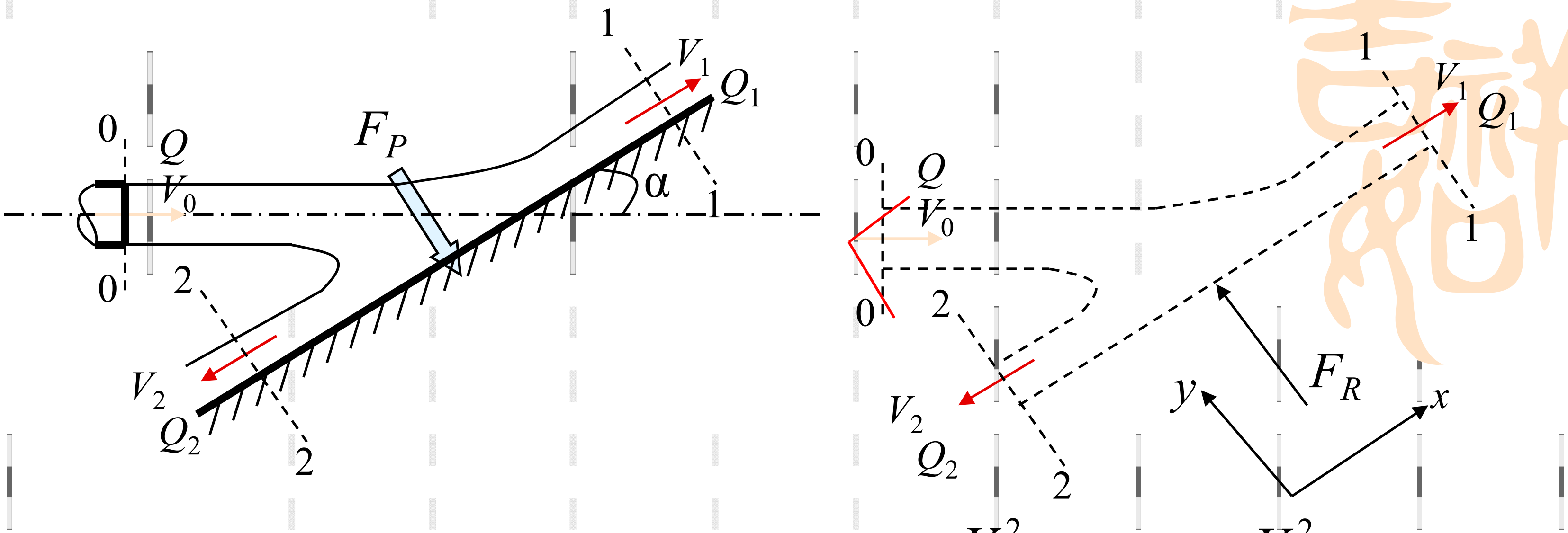
整理得： $F_R = \beta_0 \rho Q V_0$

前进

例：设有一股自喷嘴以速度v$_0$喷射出来的水流，冲击在一个与水流方向成α角的固定平面壁上，当水流冲击到平面壁后，分成两面股水流流出冲击区，若不计重量（流动在一个水平面上），并忽略水流沿平面壁流动时的摩擦阻力，试推求射流施加于平面壁上的压力F_P, 并求出Q_1和Q_2各为多少？



沿y方向列动量方程为：$F_R = 0-\rho Q\beta_0(-V_0\sin\alpha)=\rho Q V_0\sin\alpha$



对0-0、1-1断面列能量方程为： $$0+0+\frac{V_0^2}{2g}=0+0+\frac{V_1^2}{2g}+0$$

可得： $V_0=V_1$ 同理有： $V_0=V_2$

依据连续性方程有： $Q=Q_1+Q_2$

沿x方向列动量方程为： $0=\rho Q_1V_1-\rho Q_2V_2-\rho QV_0\cos\alpha$

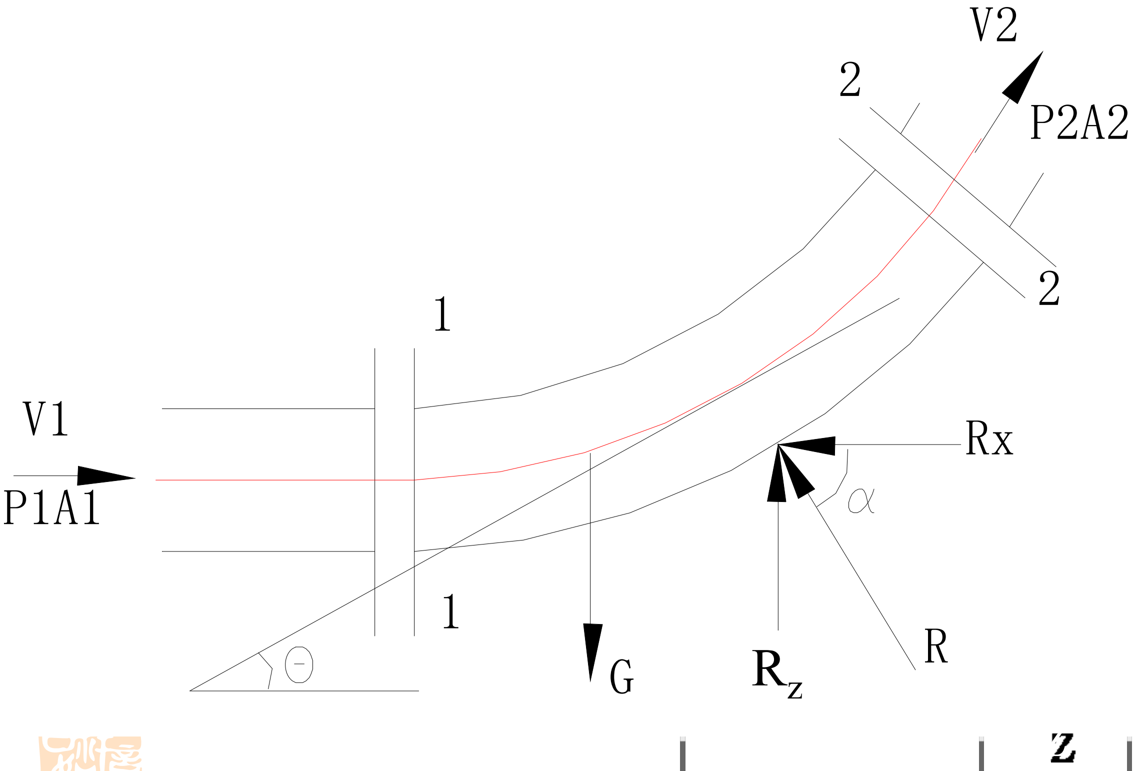
整理得： $Q\cos\alpha=Q_1-Q_2$

所以： $$Q_1=\frac{1+\cos\alpha}{2}Q \qquad Q_2=\frac{1-\cos\alpha}{2}Q$$

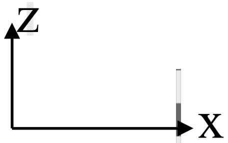
二. 方程的应用举例

1. 液流对弯管壁的作用力

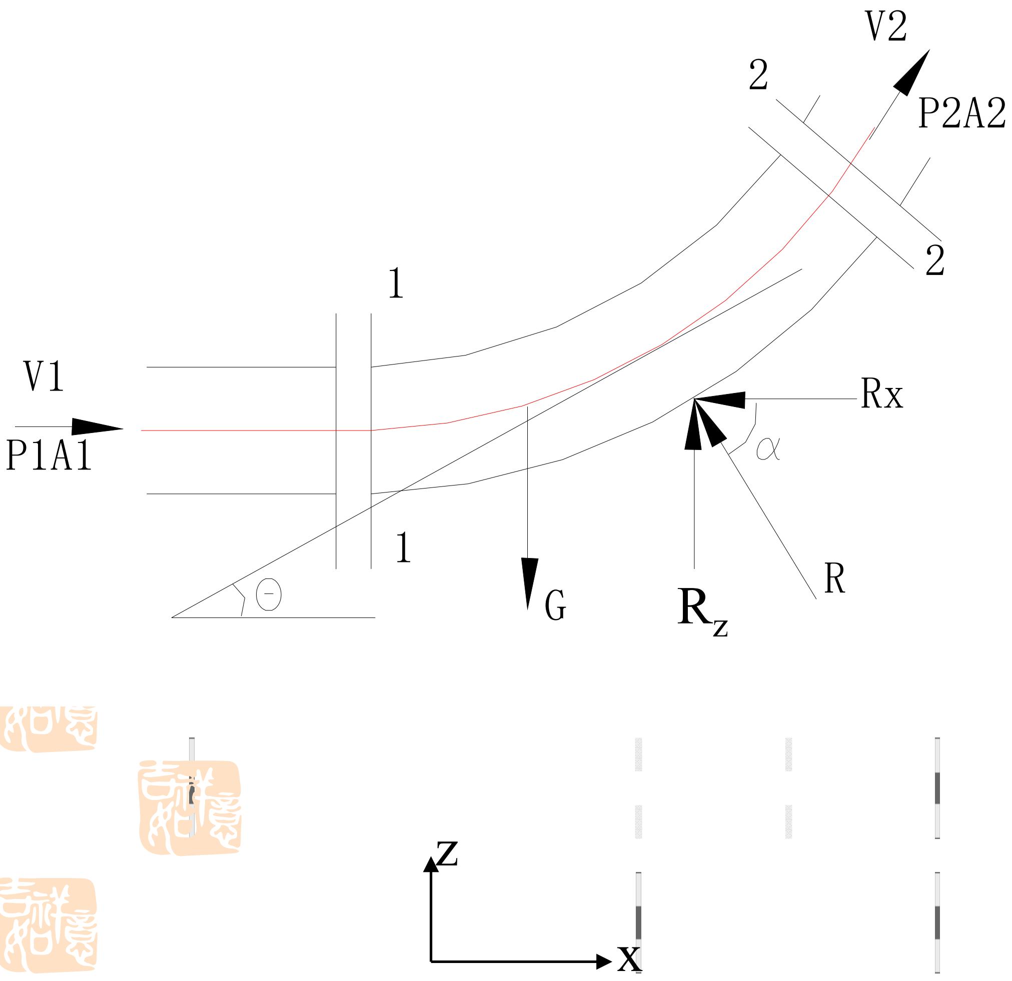
如图一段弯管，液体以速度v_1流入1-1面，以速度v_2流出2-2面，以弯管1-2中的流体为隔离体，建立如图的坐标系，分析它的受力，列出动量方程求解。



设弯管的转角为θ，取流体为分离体，流体的受力分析:



设弯管的转角为θ，取流体为分离体，流体的受力分析：



表面力：

①隔离体端面压力

$(p_1A_1 - p_2A_2)$

②与固体壁面的作用力，即待求的力R

质量力：只有重力G

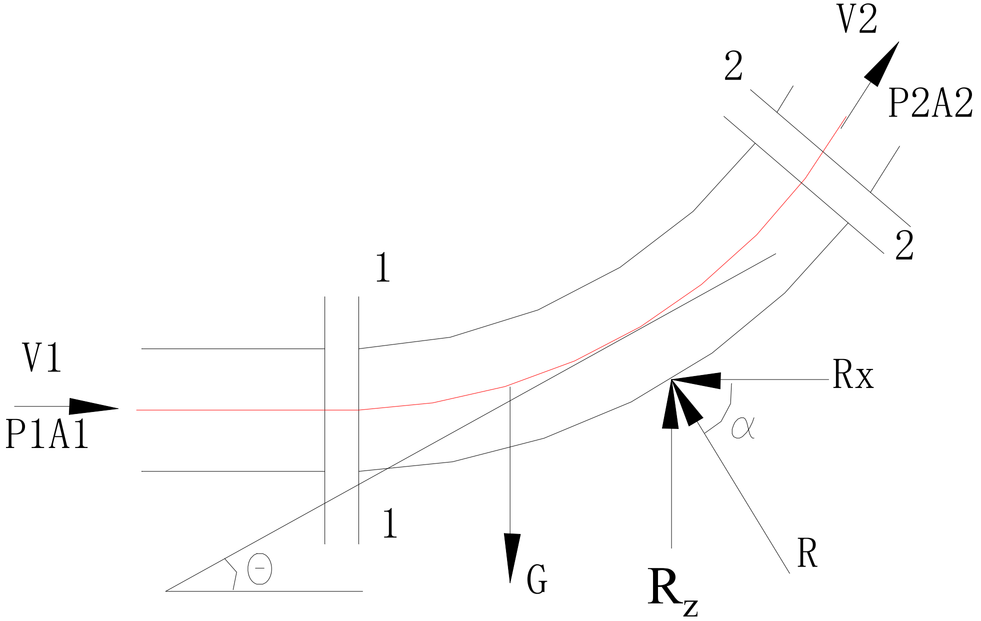
列动量方程：

$$\begin{cases} F_x = p_1A_1 - p_2A_2\cos\theta - R_x = \rho Q\left(v_{2X} - v_{1x}\right) \\ F_z = -p_2A_2\sin\theta - G + R_z = \rho Q\left(v_{2z} - v_{1z}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x = p_1A_1 - p_2A_2\cos\theta - \rho Q\left(v_2\cos\theta - v_1\right) \\ R_z = p_2A_2\sin\theta + G + \rho Q v_2\,\mathrm{si} \end{cases}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_Z^2}$$

$$\alpha = arctg\frac{R_Z}{R_x}$$

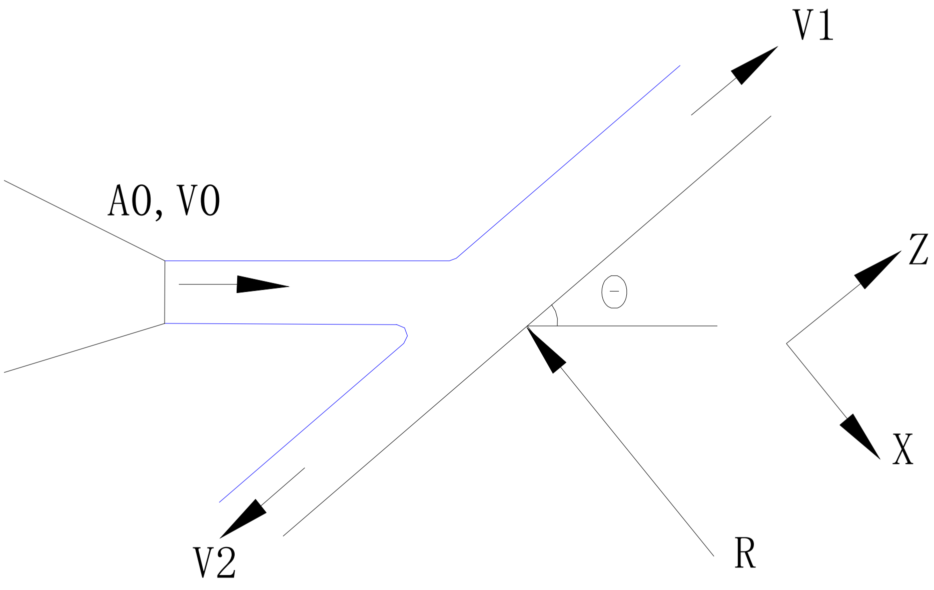


2.射流对固体壁的冲击力

如图液体自管嘴射出，形成射流，液流处在同一大气压强下，如忽略重力的影响，则作用在流体上的力，只有固体壁对射流的阻力，其反作用力则为射流对固体壁的冲击力。

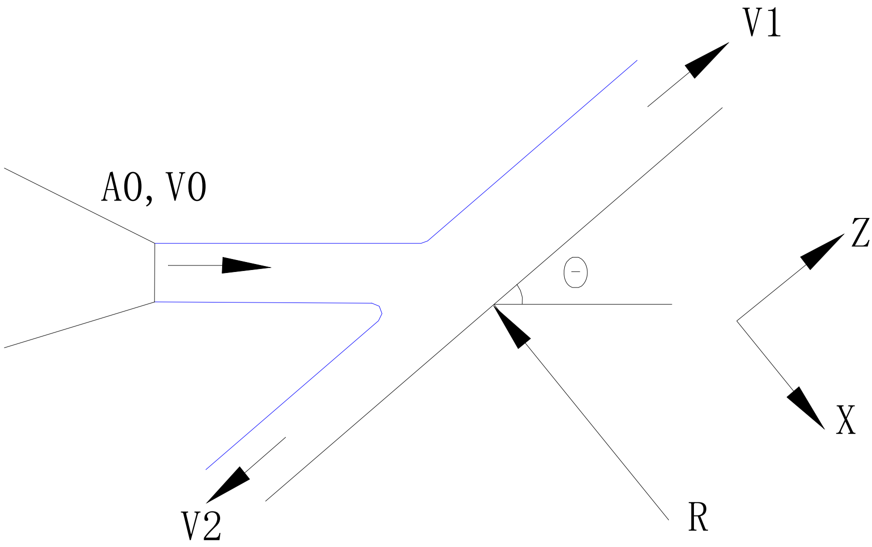
当流体自喷嘴射出时，设为A_0、v_0, 射向平板后，分散成两股，动量分别为m_1v_1、m_2v_2

取平板为分离体，平板沿其法线方向对射流的作用力为R，平板倾角为θ，取坐标如图，根据动量定理，得:



$$m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2}-m_0\vec{v_0}=\vec{R}t$$

$$m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2}-m_0\vec{v_0}=\vec{R}t$$



则在x方向的投影：

$$m_1v_{1x}=m_2v_{2x}=0$$

$$-R\cdot t=-m_0v_0\sin\theta=-\rho A_0v_0tv_0$$

$$\Rightarrow R'=\rho A_0v_0^2\sin\theta$$

与R大小相等，方向相反的R'，就是射流对平板的冲击力。

当θ=90^0时， $R^{/}=-\rho A_0v_0^2$

当θ=90^0且平板以速度U移动时， $R^{/}=-\rho A_0\left(v_0-u\right)^2$

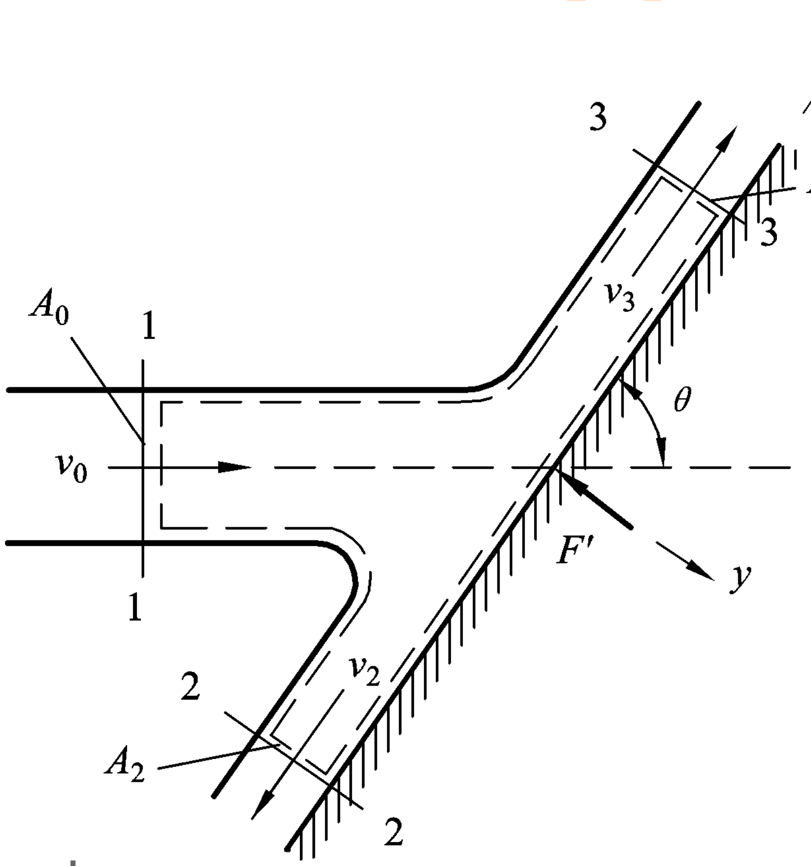
例题：水平射流从喷嘴射出，冲击一个前后斜置的固定平板，射流轴线与平板成Θ角，已知射流流量为Q_0，速度为v_0，空气及平板阻力不计。求（1）射流沿平板的分流量Q_2，Q_3；

（2）射流对平板的冲击力。

解：

①选取适当的过流断面与隔离体

选射流冲击平板之前的**1-1**断面和冲击后转向的**2-2**，**3-3**断面，取**1**，**2**，**3**及平板、大气所包围的封闭体内的液体为隔离体。



② 建立适当的坐标系

如图

③分析隔离体的受力情况

只有平板对射流的阻力

④分析隔离体流入、流出的动量，列动量方程

⑤ 结合使用连续性方程和柏努利方程求解

列1-1，2-2断面的能量方程:

$$0+0+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=0+0+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_l$$

令: $\alpha_1=\alpha_2=1;\quad h_l=0$

可得: $v_1=v_2$

同理: $v_1=v_3$

求（1）射流沿平板的分流量Q_2, Q_3;

列x方向的动量方程和连续性方程:

$$\rho Q_3 v_3+(-\rho Q_2 v_2)-\rho Q_0 v_0\cos\theta=0$$

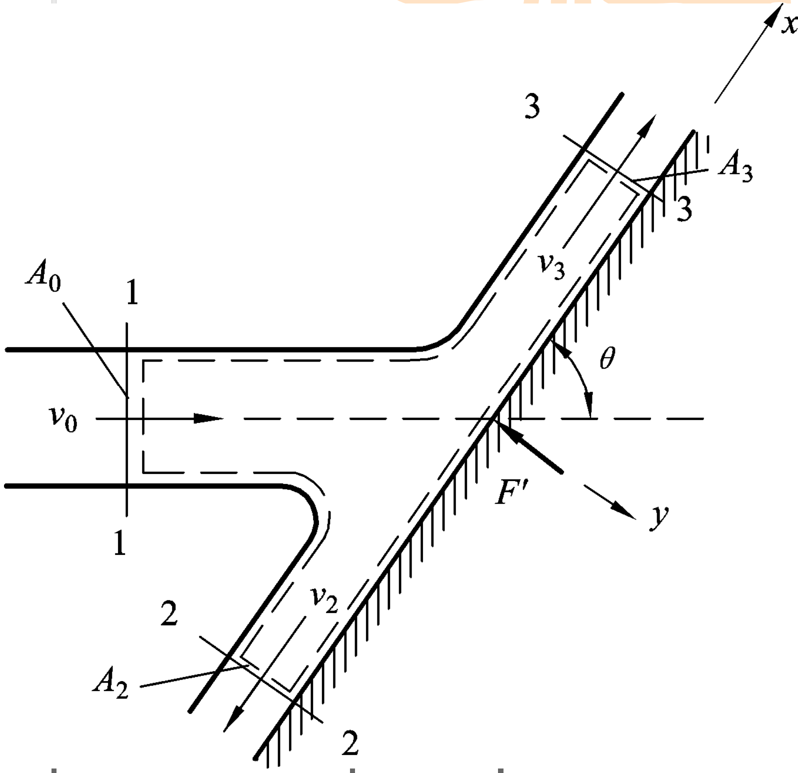
$$Q_2+Q_3=Q_0$$

⇨

$$Q_2=\frac{Q_0}{2}(1-\cos\theta)$$

$$Q_3=\frac{Q_0}{2}(1+\cos\theta)$$

求（2）射流对平板的冲击力



列y方向的动量方程:

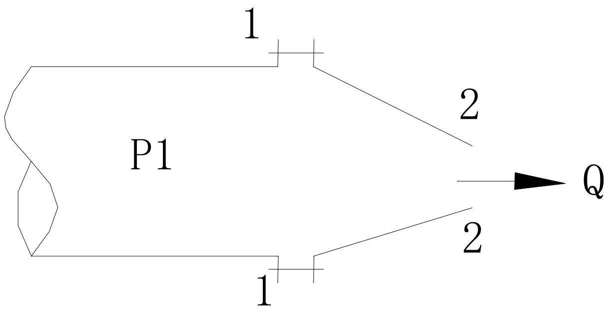
$$-F'=0-\rho Q_0 v_0\sin\theta$$

$$F'=\rho Q_0 v_0\sin\theta$$

3、水流对喷嘴的作用力

如图是消防水龙头的喷嘴，高速水流从管道经过一个喷嘴射入大气，截面积从A_1收缩为A_2 表压A_1处为(p_1-p_a)，表压A_2处为0。求水流给喷嘴的力R。取坐标，设向右为正，则喷嘴给水流的作用力为-R，由动量方程可得：

$$-R+(p_1-p_a)A_1=\rho Q(v_2-v_1)$$



根据连续性方程：

$$v_1=\frac{A_2}{A_1}v_2$$

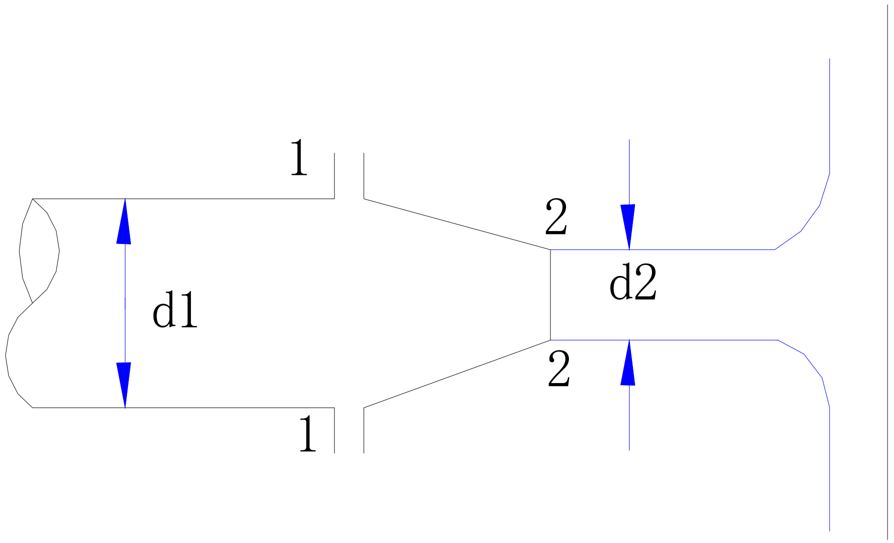
根据柏努利方程

$$\frac{p_1-p_a}{r}+\frac{v_1^2}{2g}=0+\frac{v_2^2}{2g}$$

$$p_1-p_a=\frac{1}{2}\rho\left(v_2^2-v_1^2\right)$$

$$R=(p_1-p_a)A_1\left[1-\frac{2}{1+A_1/A_2}\right]$$

井巷喷锚采用的喷嘴如图，入口直径d_1=50mm，出口直径d_2=25mm ，水从喷嘴射入大气，表压p_1=60N/cm^2，如果不计摩擦损失，求喷嘴与水管接口处所受的拉力和工作面所受的冲击力各为多少？



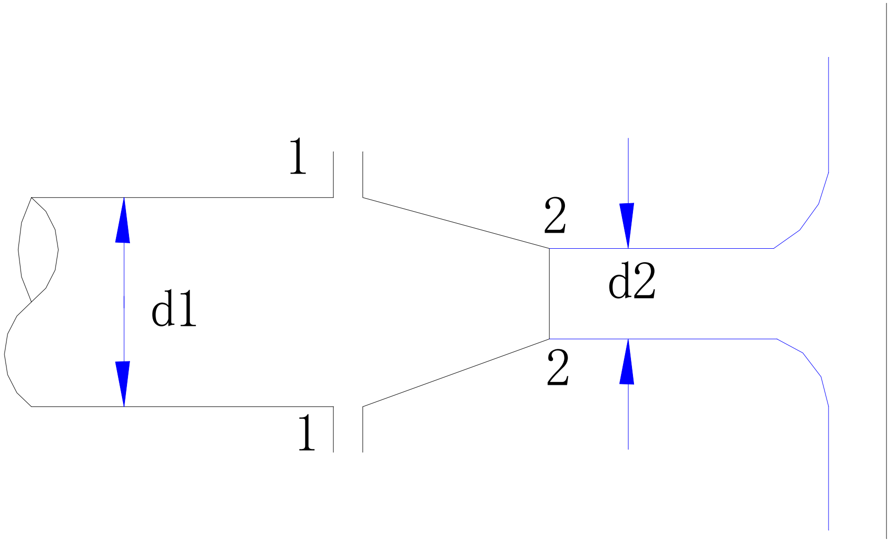
解：1、喷嘴与水管接口处所受拉力实际是水对喷嘴的作用力。由连续性方程：

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{A_1}{A_2}=(\frac{d_2}{d_1})^2=\frac{1}{4} \Longrightarrow v_2=4v_1$$

由柏努利方程：$\frac{p_1}{r}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{r}+\frac{v_2^2}{2g} \Longrightarrow 600=p_1=\frac{1}{2}\rho(v_2^2-v_1^2)$

$$v_1=8.9m/s$$

$$v_2=35.8m/s$$



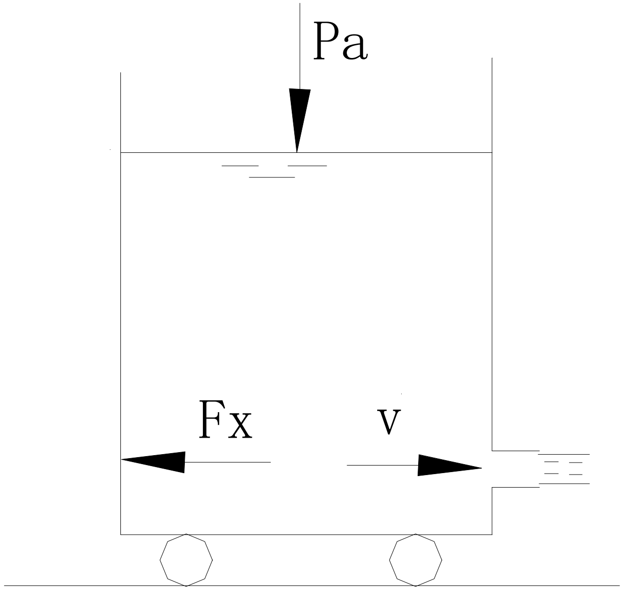
$$R=p_1A_1\left[1-\frac{2}{1+A_1/A_2}\right]=706(N)$$

2、工作面所受的冲击力为多少

$$R^{'}=\rho A_0v_0^2\sin\theta \qquad \theta=90^0$$

$$\Longrightarrow R^{'}=\rho A_0v_0^2=628(N)$$

4、射流的反推力



设有内装液体的容器，在其侧壁上开一面积为A 的小孔，液体从小孔泻出，如图设流量很小，可视为正常流动，即出流的速度：

$$v=\sqrt{2gh}$$

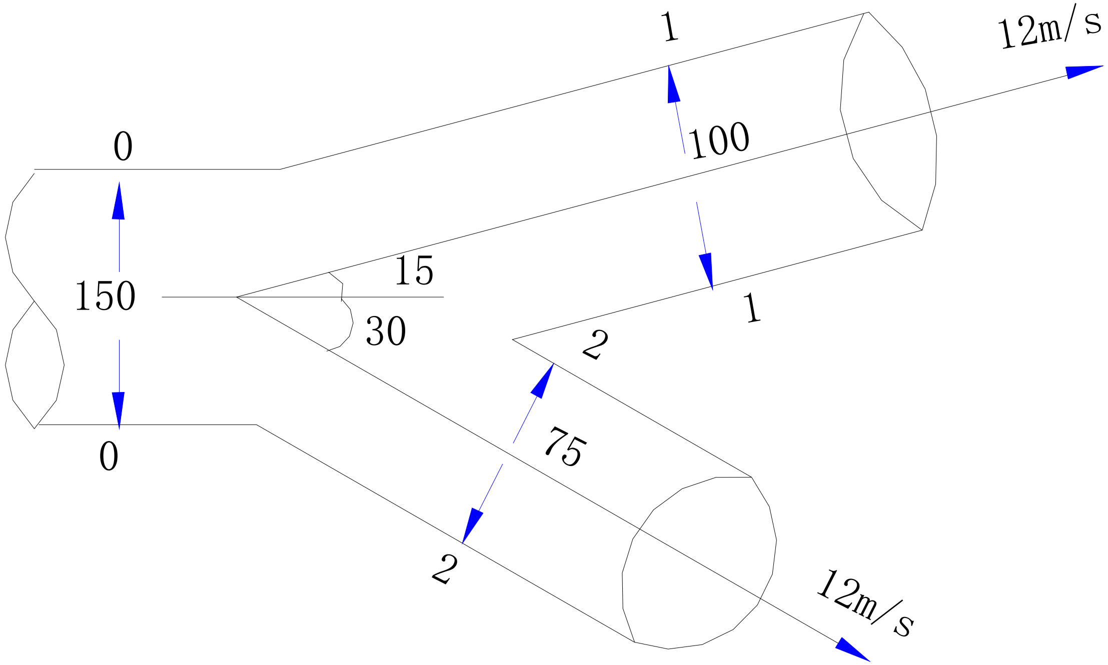
又设容器给液体的作用力在x轴的投影为F_X 即：

$$F_x=\rho Q(v_2-v_1)$$

$$F_x=\rho A v_2^2=\rho A v^2$$

如果容器能够沿x轴自由移动，则由于R_X 的作用，使容器反方向运动，这就是射流的反推力

直径为150mm的水管末端，接上分叉管嘴，其直径分别为75mm和100mm，水以12m/s的速度射入大气，如果轴线在同一水平面上，夹角如图，忽略阻力，求水作用在管嘴上的力的大小和方向。



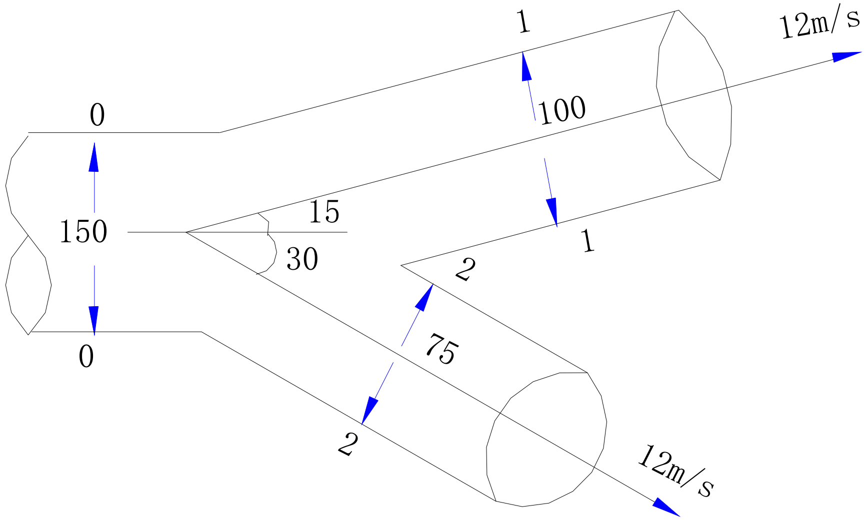
解：根据已知条件和连续性方程，可得：$v_0=8.333(m/s)$

列出截面0-0，1-1，2-2的柏努利方程：

$$\frac{p_0}{r}+\frac{v_0^2}{2g}=\frac{p_1}{r}+\frac{v_1^2}{2g}$$

$$p_0=\frac{1}{2}\rho(v_1^2-v_0^2)$$

$$P_0=37.28kN/m^2$$



设水作用在管嘴上的水平分力为F_X,

则水流对管嘴的反作用力为$-F_X$

$$F_x=p_0A_0+\rho v_0Q_0-\rho v_1Q_1\cos 15^0-\rho v_2Q_2\cos 30^0$$

$$F_x=0.242(KN)$$

方向向右

$$F_y=\rho Q_1v_1\sin 15^0-\rho Q_2v_2\sin 30^0$$

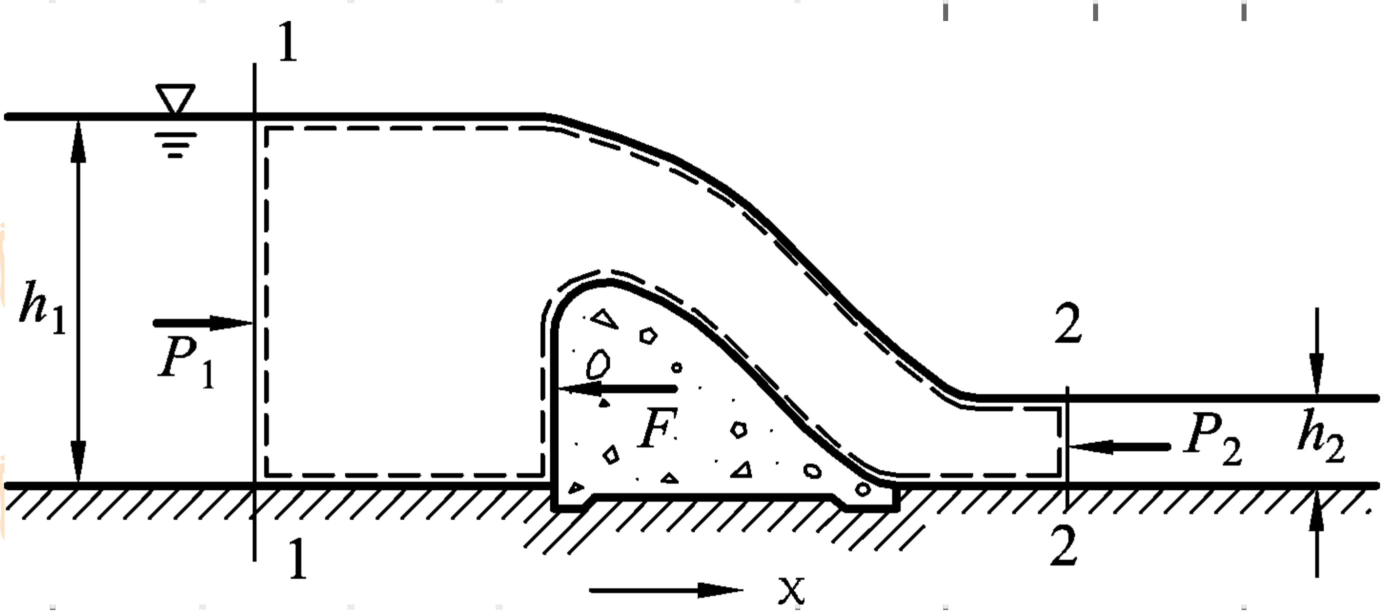
$$F_y=-0.026(kN)$$

方向向下

5、水流对建筑物的作用力

例题

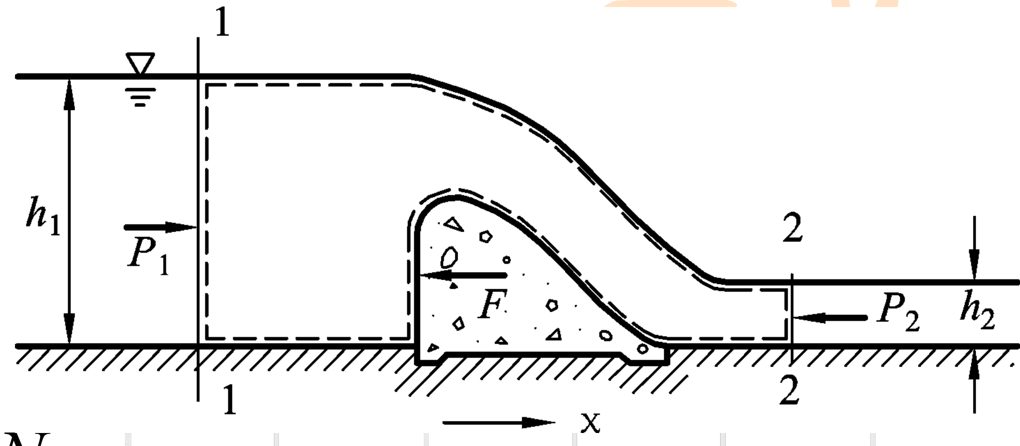
如图所示过水低堰位于一水平河床中，上游水深为h_1=1.8m，下游收缩河段的水深h_2=0.6m，在不计水头损失的情况下，求水流对单宽堰段的水平推力？



表面力：

①隔离体端面压力

因为符合渐变流条件，可以按照流体静力学方法计算：



$$P_1 = \rho g h_c A = \frac{\rho g}{2} h_1^2 \cdot 1 = 15.88kN$$

方向向右

$$P_2 = \rho g h_c A = \frac{\rho g}{2} h_2^2 \cdot 1 = 1.76kN$$

方向向左

②与固体壁面的作用力，
即待求的力F，方向向左

质量力：只有重力G，在x 方向无投影

根据连续性方程： $v_1 = v_2 \dfrac{h_2}{h_1}$

根据能量方程： $h_1 + \dfrac{v_1^2}{2g} = h_2 + \dfrac{v_2^2}{2g}$

列动量方程：

$$\rho Q（v_2 - v_1）= P_1 - P_2 - F$$

$$F = 3.53kN$$

§3.11　恒定气流能量方程

$$Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}=Z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{l1-2}$$

（3-8-3）

将方程各项乘以容重γ，并代入绝对压强，方程改写为：

$$p_1^{'}+\gamma Z_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_2^{'}+\gamma Z_2+\frac{\rho v_2^2}{2}+p_{l1-2}$$

（a）

设：$p_1{}'=p_{a1}+p_1$,　$p_2{}'=p_{a2}+p_2$,　又有 $p_{a2}=p_{a1}-\gamma_a(Z_2-Z_1)$

即：$p_2{}'=p_{a1}-\gamma_a(Z_2-Z_1)+p_2$ 将 $p_1{}'$，　$p_2{}'$代入方程：

$$p_{a1}+p_1+\gamma Z_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_{a1}-\gamma_a\left(Z_2-Z_1\right)+p_2+\gamma Z_2+\frac{\rho v_2^2}{2}+p_{l1-2}$$

整理得:

$$p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}+(\gamma_a-\gamma)(Z_2-Z_1)=p_2+\frac{\rho v_2^2}{2}+p_{l1-2}$$

（3-11-1）

$p_{1,}$ p_2 -断面1、2的相对压强，专业上习惯称为静压。

$\rho_1 v_1^2/2$，$\rho_2 v_2^2/2$-专业中习惯称为动压。

$(\gamma_a-\gamma)(Z_2-Z_1)$-专业中称为位压。

静压和位压之和，专业中习惯称为势压，以p_s表示。

静压和动压之和，专业中习惯称为全压，以p_q表示。

静压、位压和动压之和，专业中习惯称为总压，以$p_{在}$表示。

位压为0时，方程可简化为:

$$p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_2+\frac{\rho v_2^2}{2}+p_{l1-2}$$

（3-11-2）

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + (\rho_a - \rho)$$

——用相

p——静压

$\rho v^2/2$——动

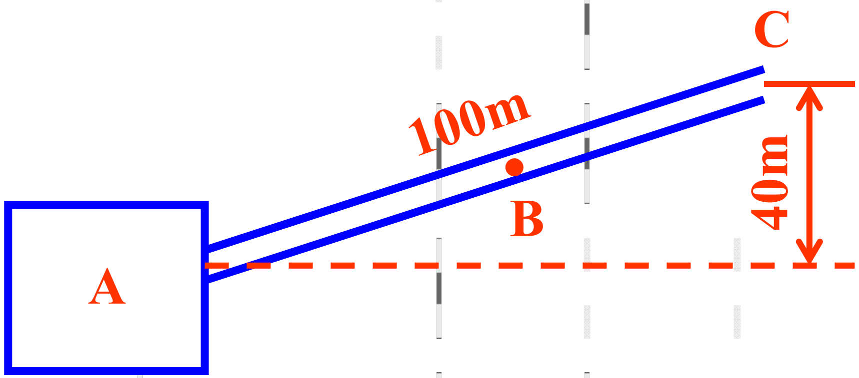
$(\rho_a\text{-}\rho)g(z_2\text{-}z_1)$——位压

注意：z_2-z_1——下游断面高度减上游断面高度（±）；

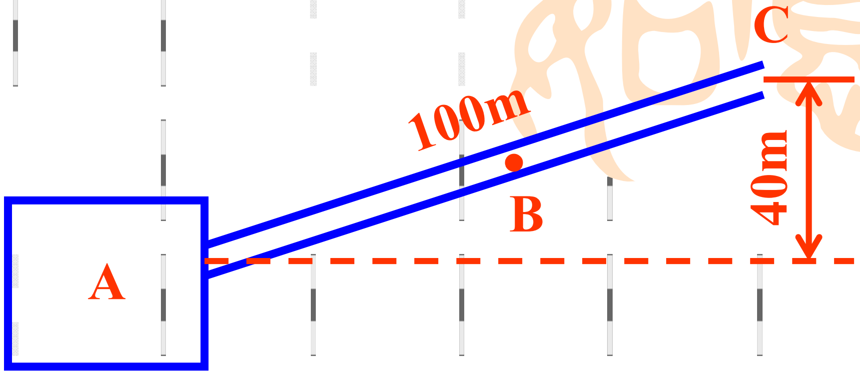
ρ_a-ρ——外界大气密度减管内气体密度（±）；

z_2=z_1或ρ_a=ρ——位压为零

例3-11： 气体由压强为12mmH_2O的静压箱A经过直径为10cm、长为100m的管子流出大气中，高差为40m，沿管子均匀作用的压强损失为$p_w=9\rho v^2/2$，大气密度$\rho_a=1.2\text{kg/m}^3$，（a）当管内气体为与大气温度相同的空气时；（b）当管内为$\rho=0.8\text{kg/m}^3$燃气时，分别求管中流量，作出压力线，标出管中点B的压强



解：（a）管内为空气时，取A、C断面列能量方程



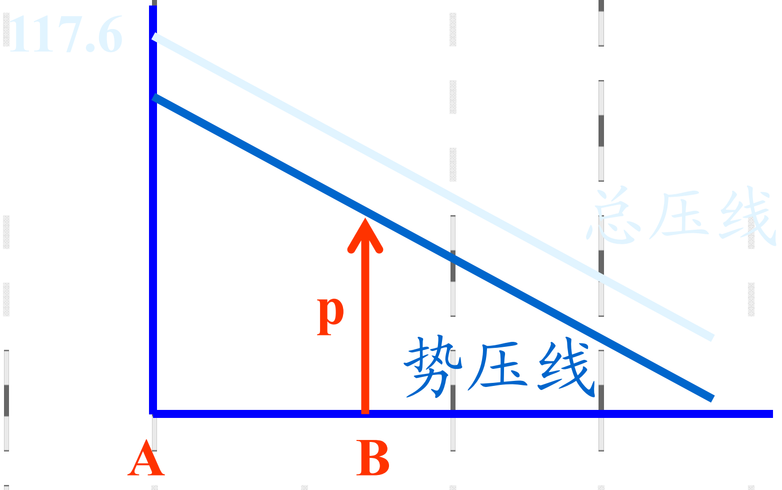
$$p_A=\rho\frac{v^2}{2}+9\rho\frac{v^2}{2}$$

$$12\times9.8=1.2\frac{v^2}{2}+9\times1.2\frac{v^2}{2}$$

$$v=4.43m/s$$

$$Q=vA=0.0348m^3/s$$

作压力线



$$p_A=12\times9.8=117.6Pa$$

$$\rho\frac{v^2}{2}=11.7Pa \qquad 9\rho\frac{v^2}{2}=106Pa$$

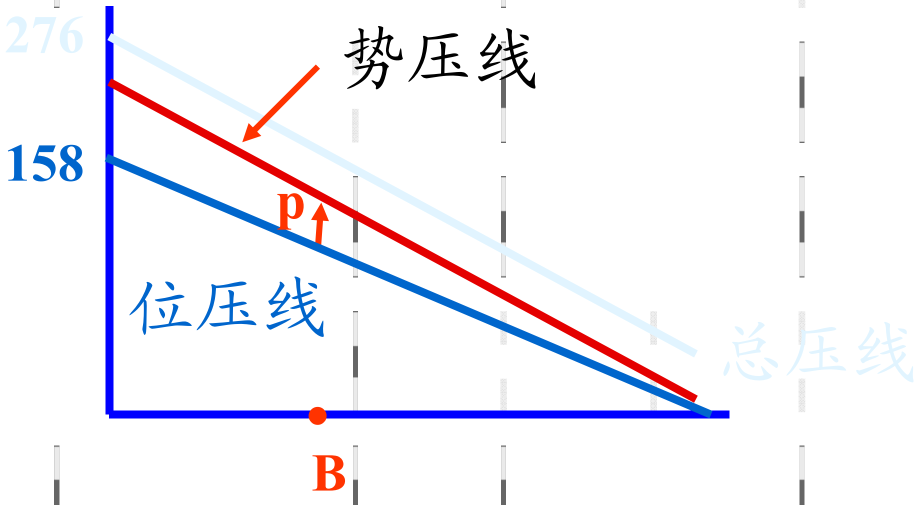
（b）管内为燃气时，取A、C断面列能量方程

$$p_A+(\rho_a-\rho)g(z_2-z_1)=\rho\frac{v^2}{2}+9\rho\frac{v^2}{2}$$

$$12\times9.8+(1.2-0.8)\times9.8\times(40-0)=0.8\frac{v^2}{2}+9\times0.8\frac{v^2}{2}$$

$$118+158=27.6+248.4$$ 即 $$276=27.6+248.4$$

作压力线



气流的伯努利方程

对液体，能量方程左右两边的压强既可用绝对压强也可用相对压强，对气体则只能用绝对压强，因为气体的密度与外界空气的密度相差不大，如想用相对压强，则需考虑外部大气压在不同高程的差值。

大气压强随高度的变化规律如下：

$$p_{a2} = p_{a1} - \rho_a g(z_2 - z_1)$$

因此：

$$p_1' = p_1 + p_a$$

$$p_2' = p_2 + p_a - \rho_a g(z_2 - z_1)$$

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + (\rho_a - \rho) g(z_2 - z_1) = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + p_l$$

上式就是以相对压强表示的气流的能量方程式

如气流的密度远远大于空气的密度或两断面高差不大时，上式可写成：

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + p_l$$

测试1：

水平管路中装有渐缩直角弯管。弯管进口直径D_1=60cm，出口直径D_2=45cm，水进弯管时的压强p_1=35KN/m^2，速度v=2.5m/s.

若不计摩镲损失，求水流经此弯管时对管的作用力。

测试2：教材 P86　3-14

测试1解：

$$Q_1 = A_1 V_1 = 0.7065 m^3 / s; \quad v_2 = \frac{Q_2}{A_2} = 4.4434 m / s$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = 28.2531 kN / m^2$$

$$R_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta - \rho Q\left(v_2 \cos\theta - v_1\right) = 11657 N$$

$$R_z = p_2 A_2 \sin\theta + \rho Q v_2 \sin\theta = 7631 N$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2} = 13.93 kN$$

$$\alpha = arctg \frac{R_z}{R_x} = 33.2°$$