流体力学

第二章 流体静力学

第二章　流体静力学

引言

流体静力学研究平衡流体的力学规律及其应用。

$$
\text{平衡}\left\{\begin{array}{l}\text{a.流体对地球无相对运动；}\\ \text{b.流体对运动容器无相对运动。}\end{array}\right\}
$$

平衡流体内部没有相对运动，流体不呈现粘性，作用在流体上的表面力只有法向的静压强。

本章主要任务：研究流体静压强在空间的分布规律；平衡流体作用在固壁（平面或曲面）上的总压力等。并在此基础上解决一些工程实际问题。

§2-1流体静压强及其特性

一、流体静压力 $\bar{p} = \dfrac{\Delta P}{\Delta A}$

当面积ΔA无限缩小到一点时，静压强

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

在流体力学中称上述压强为流体的静压力，简称压力，单位Pa。

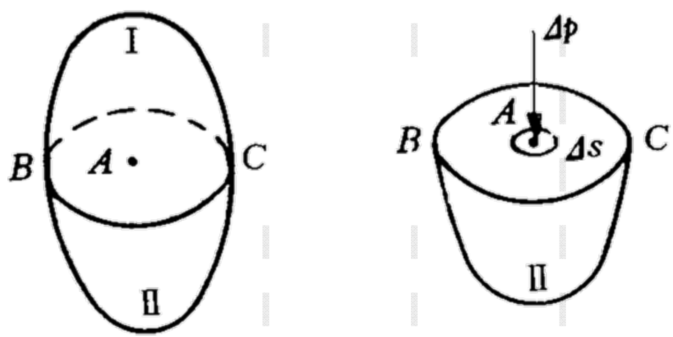
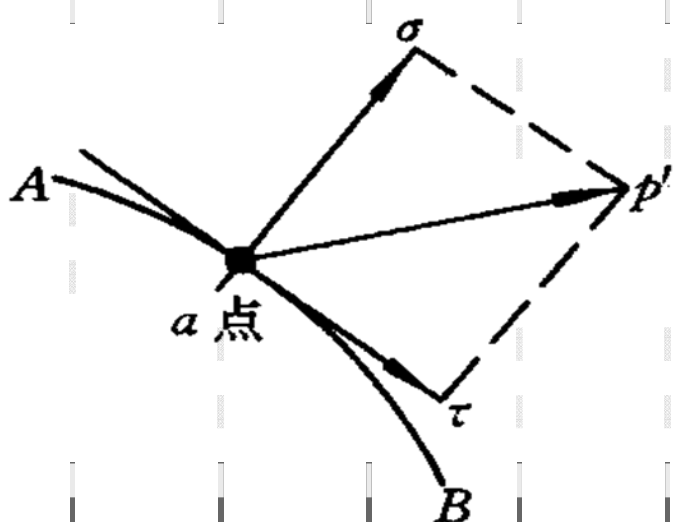


图2-1　分离体

二、流体静压力的特征

第一特征 静止液体的静压力垂直指向作用面。

第二特征：静止液体中任意一点的压力值大小均相等，与作用面的方位无关。



平衡流体中的压强称为流体静压强，记作p

$$p=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta A}=\frac{dP}{dA} \qquad (2—1)$$

式中

ΔA——微元面积；

ΔP——作用在ΔA表面上的总压力大小。

微元表面上的流体静压力矢量表达式为

$$d\vec{P}=-pd\vec{A} \qquad (2—2)$$

负号说明流体静压力的方向是沿受压面的内法线方向。

特点：

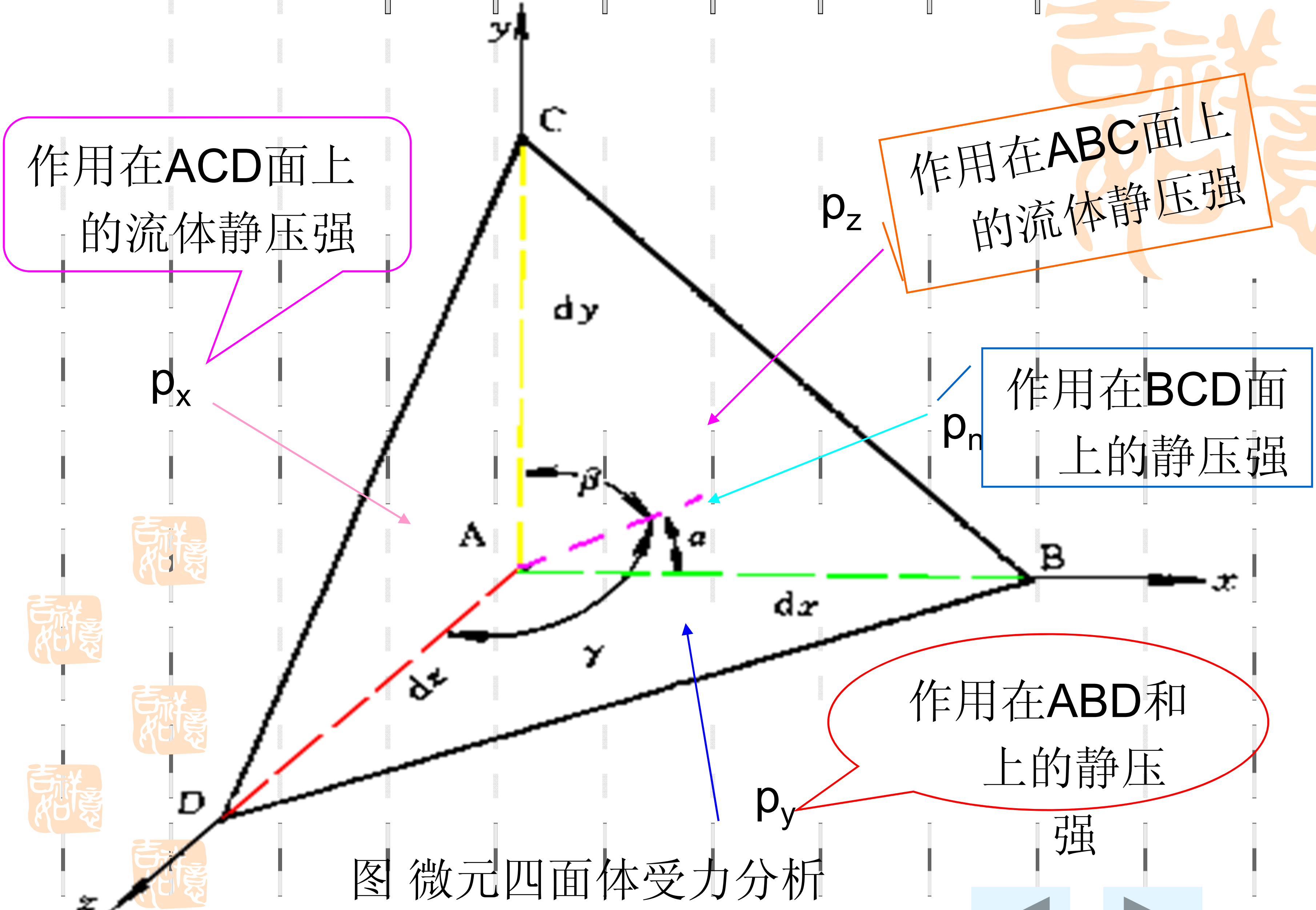
大小与方向均与受压面有关。

流体静压强的特性:

一、静压强方向永远沿着作用面内法线方向。

a. 静止流体即不承受切应力，也不承受拉力。

b 静止流体中任何一点上各个方向的静压强大小相等，与作 用面方位无关。



作用在ACD面上
的流体静压强
p_x
p_z
作用在ABC面上
的流体静压强
作用在BCD面
上的静压强
p_n
作用在ABD和
上的静压
强
p_y
y
C
dy
β
A
α
B
x
dx
γ
dz
D
z

图 微元四面体受力分析

- ①表面力：（只有各面上的垂直压力即周围液体的静水压力）

$$\begin{cases} dP_X = p_X dA_X = p_X \bullet \frac{1}{2} dydz \\ dP_Y = p_Y dA_Y = p_Y \bullet \frac{1}{2} dxdz \\ dP_Z = p_Z dA_Z = p_Z \bullet \frac{1}{2} dxdy \\ dP_n = p_n dA_n \end{cases}$$

- ②质量力：（只有重力、静止）

$$\frac{1}{6}X\rho dxdydz,\frac{1}{6}Y\rho dxdydz,\frac{1}{6}Z\rho dxdydz$$

$$\sum F_X=0,\sum F_Y=0,\sum F_Z=0$$

•以X方向为例：

$$\sum F_X=p_X dA_X-p_n dA_n\cos(n,X)+\frac{1}{6}X\rho dxdydz=0$$

$$dA_n \cos(n, X) = dA_x = \frac{1}{2} dydz$$

$$p_x - p_n + \frac{\rho}{3} X dx = 0$$

$$p_x = p_n$$

$$p_x = p_y = p_z = p_n$$

- 在静止液体中，任一点静水压强的大小与作用面的方位无关，只与观测点的位置有关。静水压强是空间坐标的标量函数，即：

$$p = p(x, y, z)$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

§2-2流体静压强的分布规律

一、流体静压强的基本公式

$$p_2 = p_1 + \gamma\Delta h \quad \text{或} \quad p = p_0 + \rho g h$$

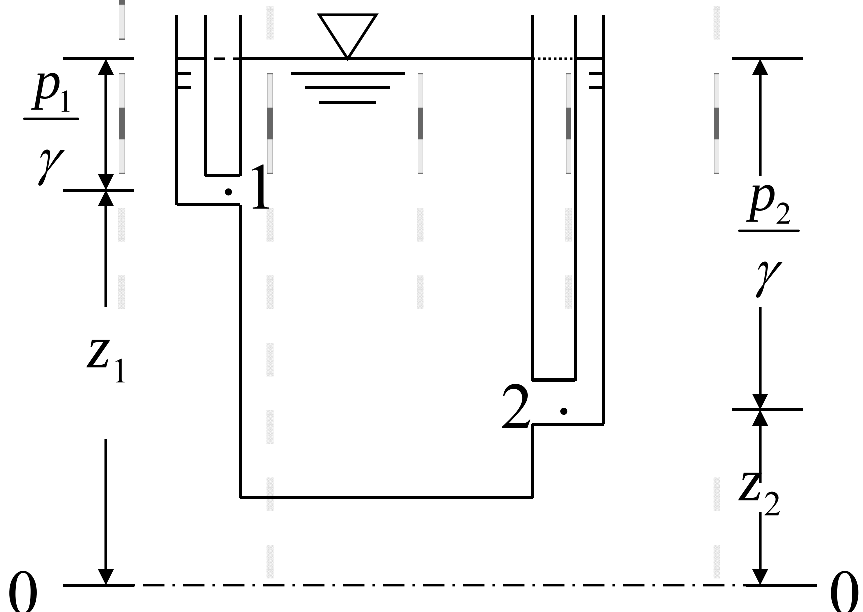
$$p\begin{cases}\text{液面上的气体压强}\boldsymbol{p_0}\\ \text{高度为}\boldsymbol{h}\text{的水柱产生的压强}\gamma\Delta\boldsymbol{h}\end{cases}$$

静水压强的基本方程也可写成如下形式:

$$z+\frac{p}{\rho g}=c$$

静水压强基本方程的适用范围是: 重力场中连续、均质、不可压缩流体。

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$



静压强基本方程的几何意义和物理意义

流体静压强基本方程的物理意义和几何意义

1. 物理意义

z 表示为单位重量流体对某一基准面的位置势能。

$\dfrac{p}{\rho g}$ 表示单位重量流体的压强势能。

位置势能和压强势能之和称为单位重量流体的总势能。静水压强基本方程表示在重力作用下静止流体中各点的单位重量流体的总势能是相等的。这就是静止液体中的能量守恒定律。

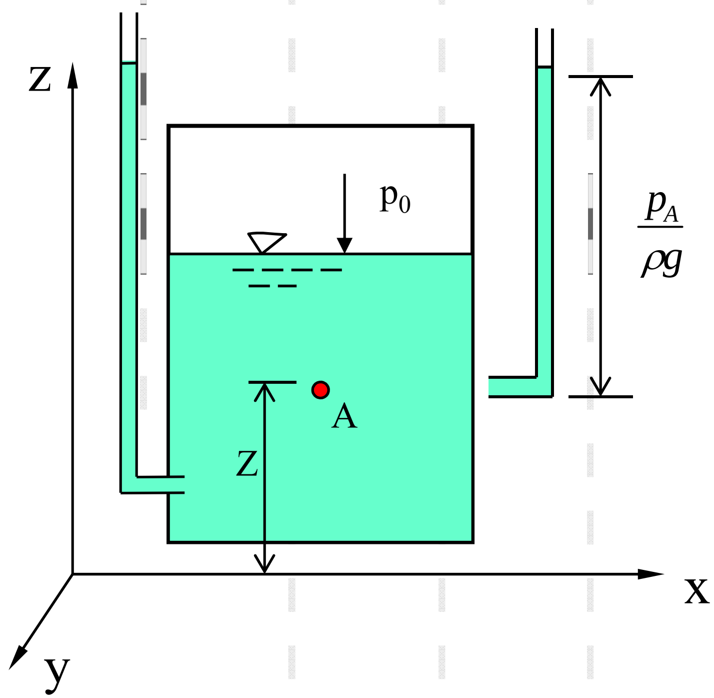
2. 几何意义

单位重量流体所具有的能量也可以用液柱高度来表示，并称为水头。

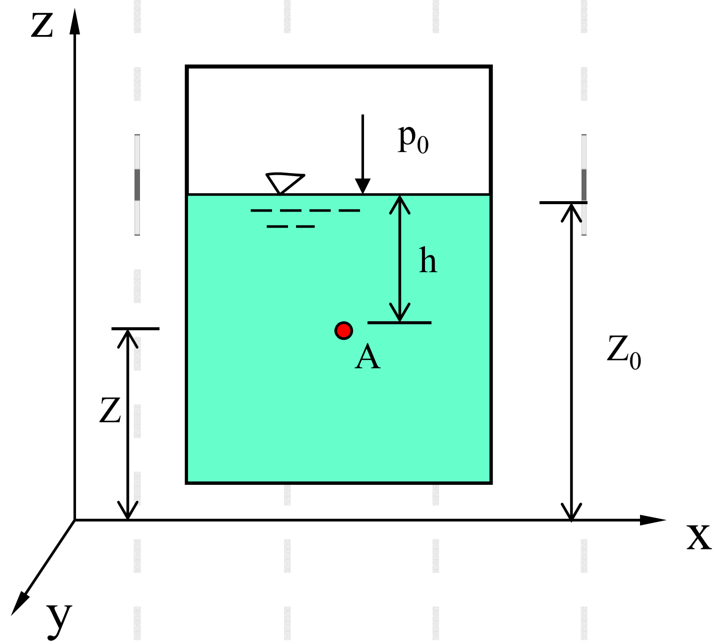
Z 表示为单位重量流体的位置高度或位置水头。

$\frac{p}{\gamma}$ 表示为单位重量流体的压强水头。位置水头和压强水头之和称为测压管水头。

在重力作用下静止流体中各点的测压管水头都相等。在实际工程中，常需计算有自由液面的静止液体中任意一点的静压强。



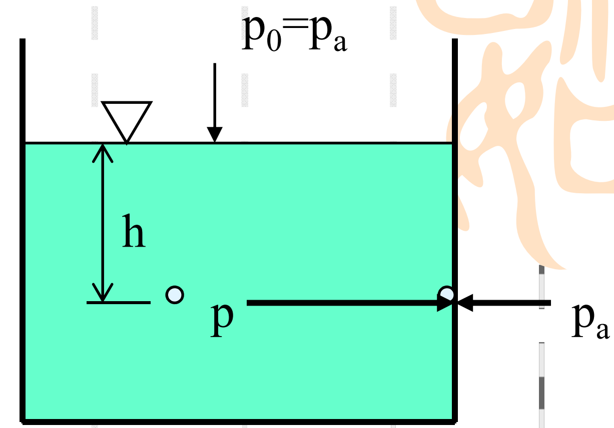
z
p_0
$\frac{p_A}{\rho g}$
A
Z
x
y


z
p0
h
A
Z
Z0
x
y

[例题] 已知：$p_0=98kN/m^2$，

$h=1m$，

求：该点的静水压强



解：

$$p = p_0 + \rho g h$$

$$= 98kN/m^2 + 1000kg/m^3 \times 9.8m/s^2 \times 1m \div 1000$$

$$= 107.8kN/m^2$$

在容器壁面上同水深处的一点所受到的压强有多大?

该点所受到的有效作用力有多大?

等压面

在流体中，压强相等的各点所组成的面称为等压面。

1. 等压面方程

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

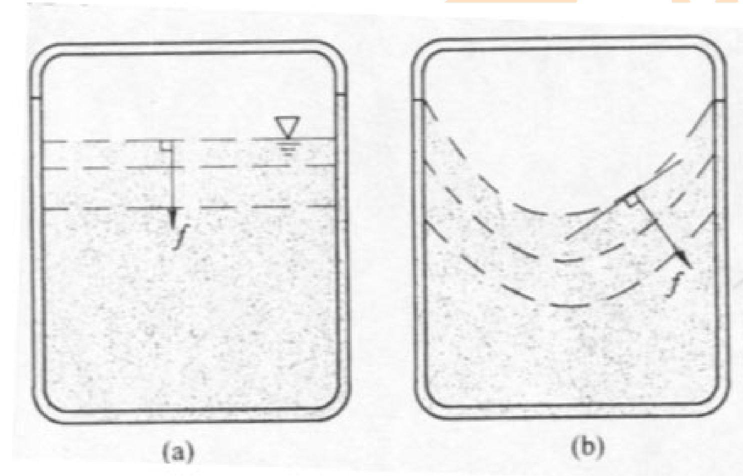
2. 等压面特性

- ① 等压面就是等势面。
- ② 作用在静止流体中任一点的质量力必然垂直于通过该点的等压面。
- ③ 等压面不能相交
- ④ 绝对静止流体的等压面是水平面
- ⑤ 两种互不相混的静止流体的分界面必为等压面

结论：同一种静止相连通的流体的等压面必是水平面（只有重力作用下）自由表面、不同流体的交界面都是等压面。

- 静止流体中等压面为水平面

旋转流体中等压面为旋转抛物面。



§2-3 压强的计量基准和量度单位

一、压强的计量基准

$$\text{压强} \xrightarrow{\text{计算基准}} \begin{cases} \text{绝对压强} \\ \text{相对压强} \end{cases}$$

定义：

- 以完全真空为基准计算的压强称为绝对压强，记作 p' 。
- 以当地大气压强为基准计量的压强称为相对压强，记作 p 。

其中 $p = p' - p_a$

表压强；真空度 p_V

$$p_V = -p = p_a - p'$$

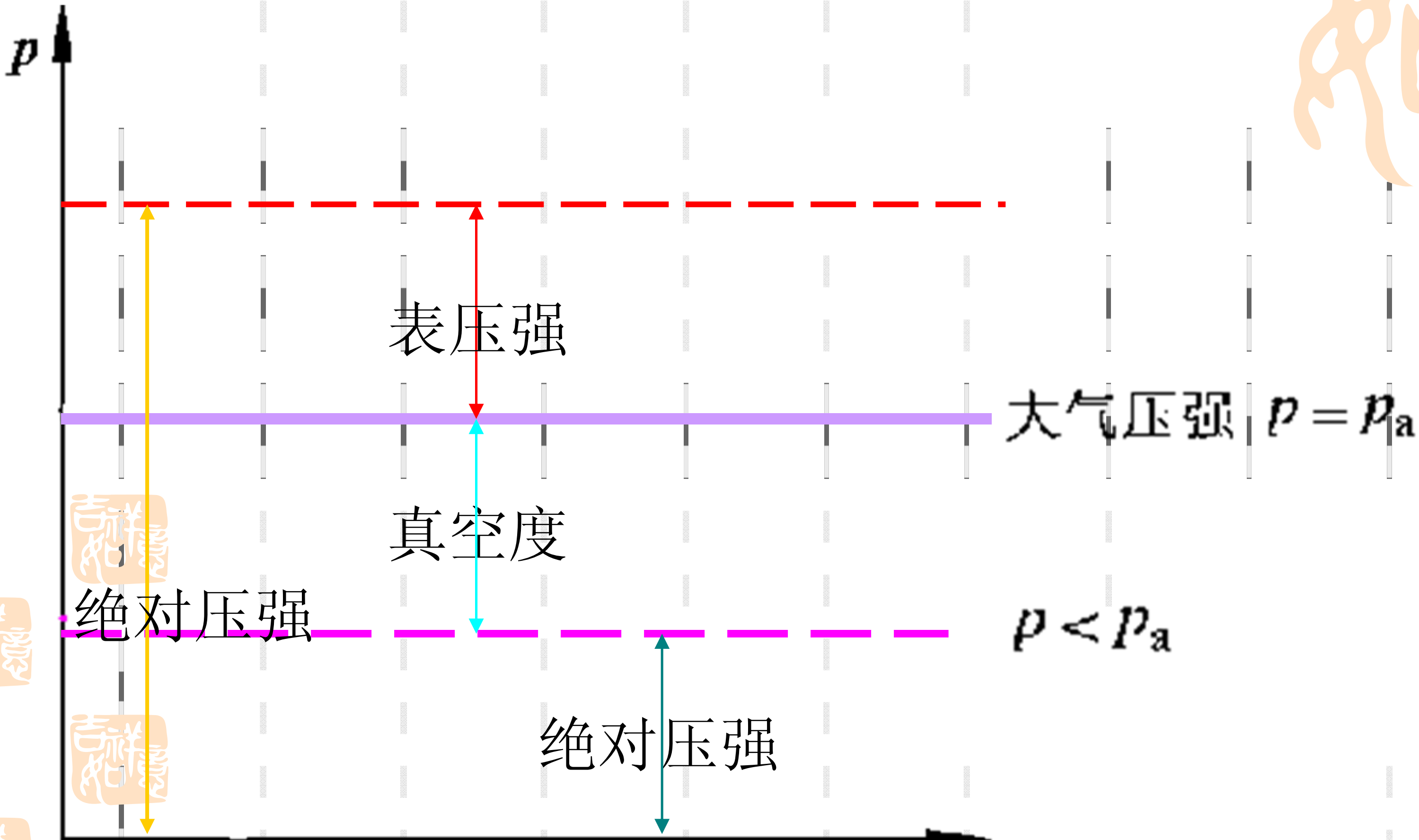


图 绝对压强、表压强和真空度之间的关系

二、压强的量度单位

- 应力单位：Pa
- 大气压的倍数:1atm=101.325kPa、1at=1kgf/cm^2=98kPa=10m水柱
- 液柱高度

[例题]封闭盛水容器中的玻璃管两端开口，如图所示，已知玻璃管伸入水面以下h=1.5m时，既无空气通过玻璃管进入容器，又无水进入玻璃管。试求此时容器内水面上的绝对压强 p_0'和相对压强 p_0 。

[解] 根据静水压强基本方程，有

$$p_0' + \gamma h = p_a$$

当地大气压强p_a在没有特别说明情况下，一般以1个工程大气压强计。故

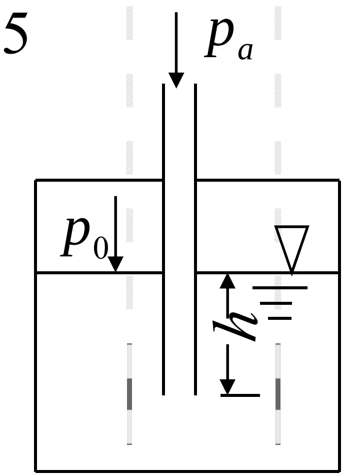
$$p_0 = p_a - \gamma h = 98100 - 9810 \times 1.5$$

$$= 83385\text{N/m}^2$$

$$p_0 = p_0' - p_a = -\gamma h$$

$$= -9810 \times 1.5$$

$$= -14715\text{N/m}^2$$



例题图

§2-4 液柱测压计

1、测压管

如图可测水中大于大气压的相对压强 $P = \rho g h$；

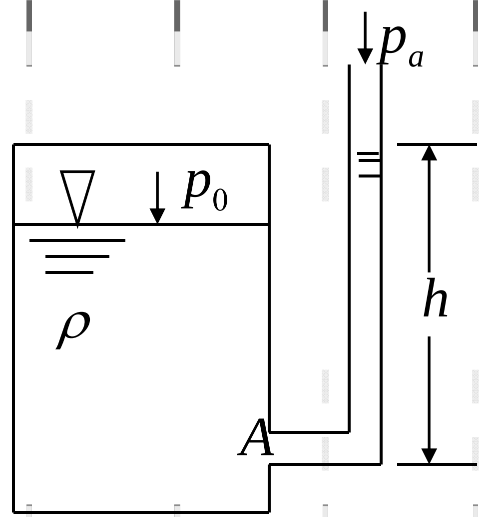


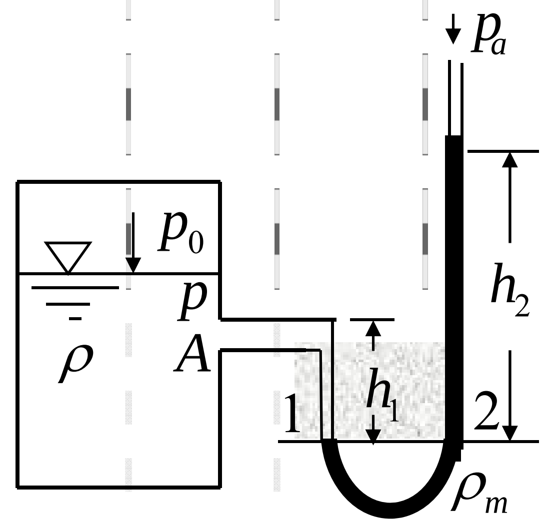
图 测压管

图2—9U形管测压计

2、 U 形管测压计

当被测流体压强较大时，常采用U形管测压计在连续静止的汞中读出h_1、h_2。

由于U形管1、2两点在同一等压面上，$p_1=p_2$，由此可得A点的相对压强



$$p=p'-p_a=\rho_m gh_2-\rho gh_1$$

当被测流体为气体时，由于气体的密度比较小，上式最后一项 ρgh_1 可以忽略不计。

3、差压计

定义：

测量两点压强差的仪器叫做压差计。如图所示。

水管下部为U形管式汞差压计，它的计算公式为：

$$p_1 - p_2 = (\rho' - \rho)gh$$

管道上部为倒U形管式水柱差计，忽略空气密度，则计算公式为：

$$p_1 - p_2 = \rho g H$$

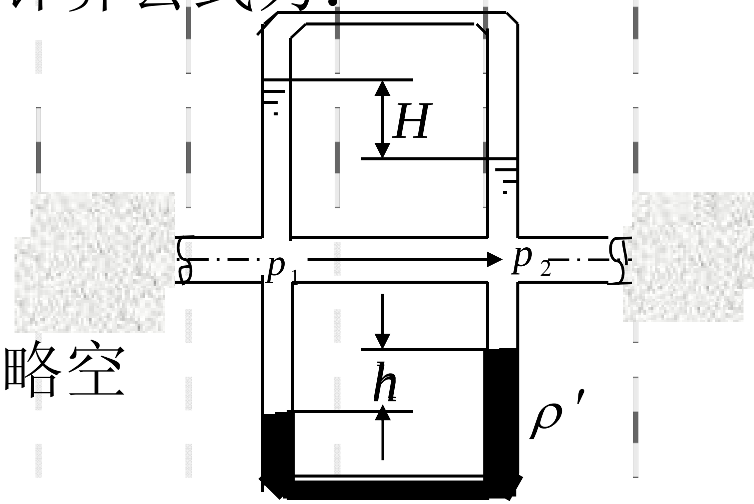


图　差压计

比较两式，在仪器管一定的前提下，汞差压计量程大，而水柱差压计的准确度高。

4、 微压计

定义：

测量较小压强或压强差的仪器叫做微压计。如图所示就是其中一种。

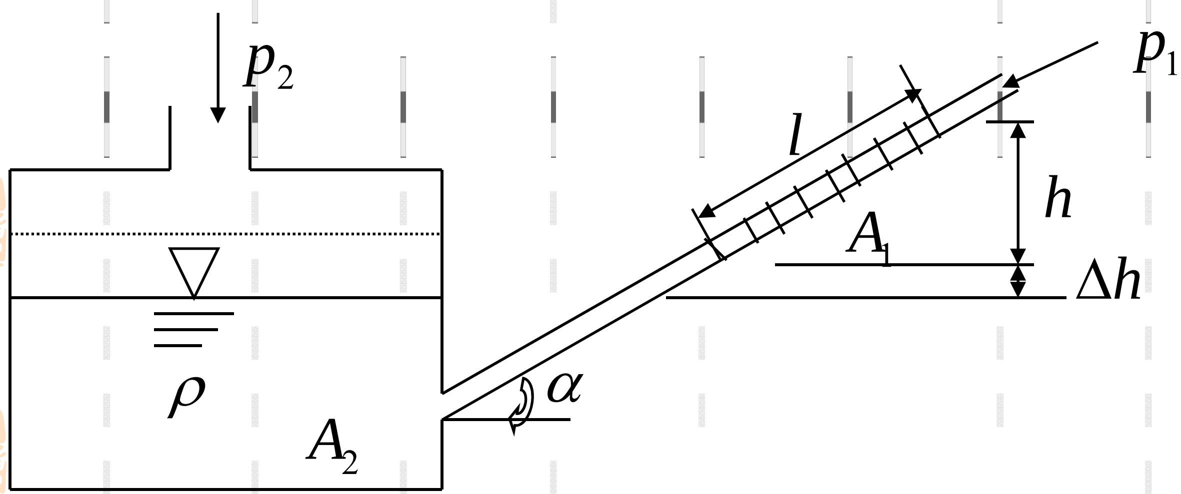


图 倾斜式微压计

倾斜式微压计是由一根倾角α 可调的玻璃管（横截面面积为A_1）和一个盛液体的小容器（横截面面积为A_2）组成。

$$p_2 = p_1 + \rho g(h + \Delta h)$$

$$\Delta h = \frac{A_1}{A_2} l$$

又

$$h = l \sin\alpha$$

$$p_2 - p_1 = \rho g(\sin\alpha + \frac{A_1}{A_2}) l$$

【例】 如图所示测量装置，活塞直径d=35㎜，油的相对密度$d_{油}$=0.92 ，水银的相对密度d_{Hg}=13.6，活塞与缸壁无泄漏和摩擦。当活塞重为15 N 时，h=700㎜，试计算U形管测压计的液面高差Δh值。

【解】 重力使活塞单位面积上承受的压强为

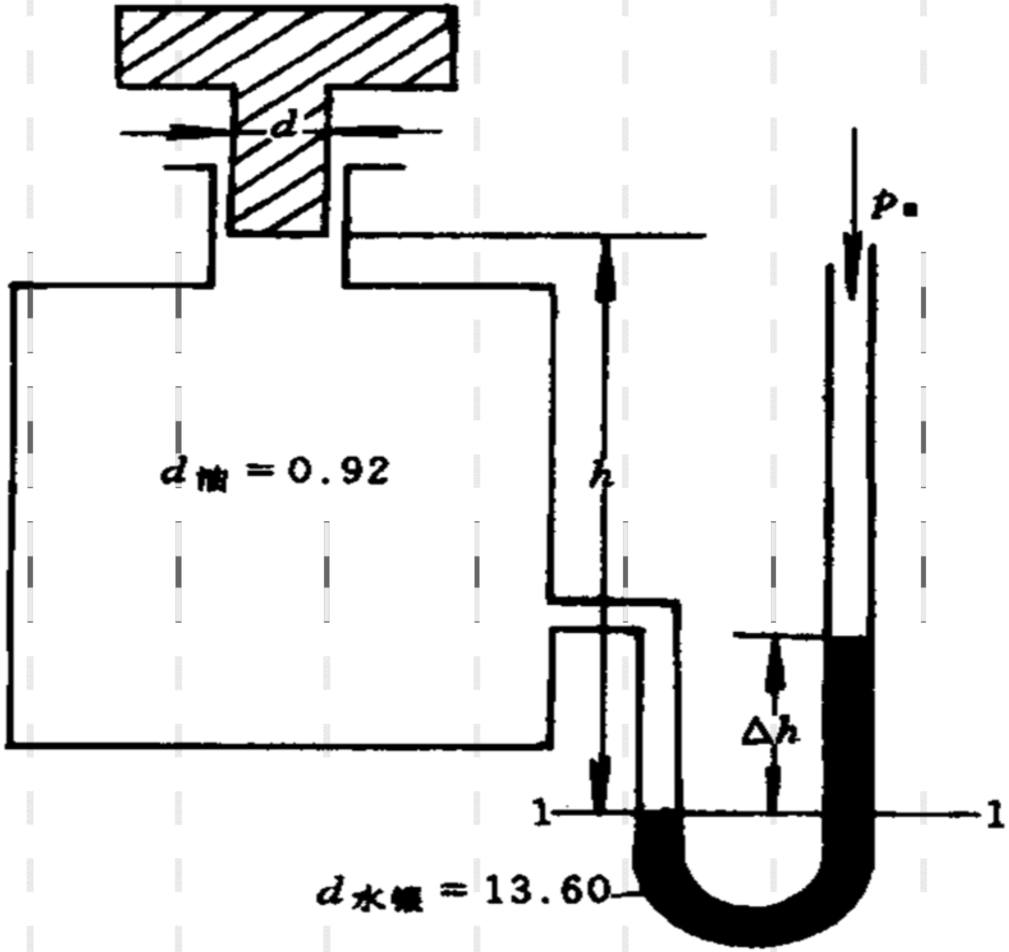
$$p=\frac{15}{\frac{\pi}{4}d^2}=\frac{15}{\frac{\pi}{4}\times 0.035^2}=15590\,(\mathrm{Pa})$$

列等压面 1 — 1 的平衡方程

$$p+\rho_{油}gh=\rho_{Hg}g\Delta h$$

解得Δh为：

$$\Delta h=\frac{p}{\rho_{Hg}g}+\frac{\rho_{油}}{\rho_{Hg}}h=\frac{15590}{13600\times 9.806}+\frac{0.92}{13.6}\times 0.70=16.4\,(\mathrm{cm})$$



图

【例题】 如图所示为双杯双液微压计，杯内和U形管内分别装有密度ρ_1=lOOOkg/m3和密度ρ_2 =13600kg/m^{3}的两种不同液体，大截面杯的直径D＝100mm， U形管的直径d=10mm，测得h=30mm，计算两杯内的压强差为多少?

【解】 列1—2截面上的等压面方程

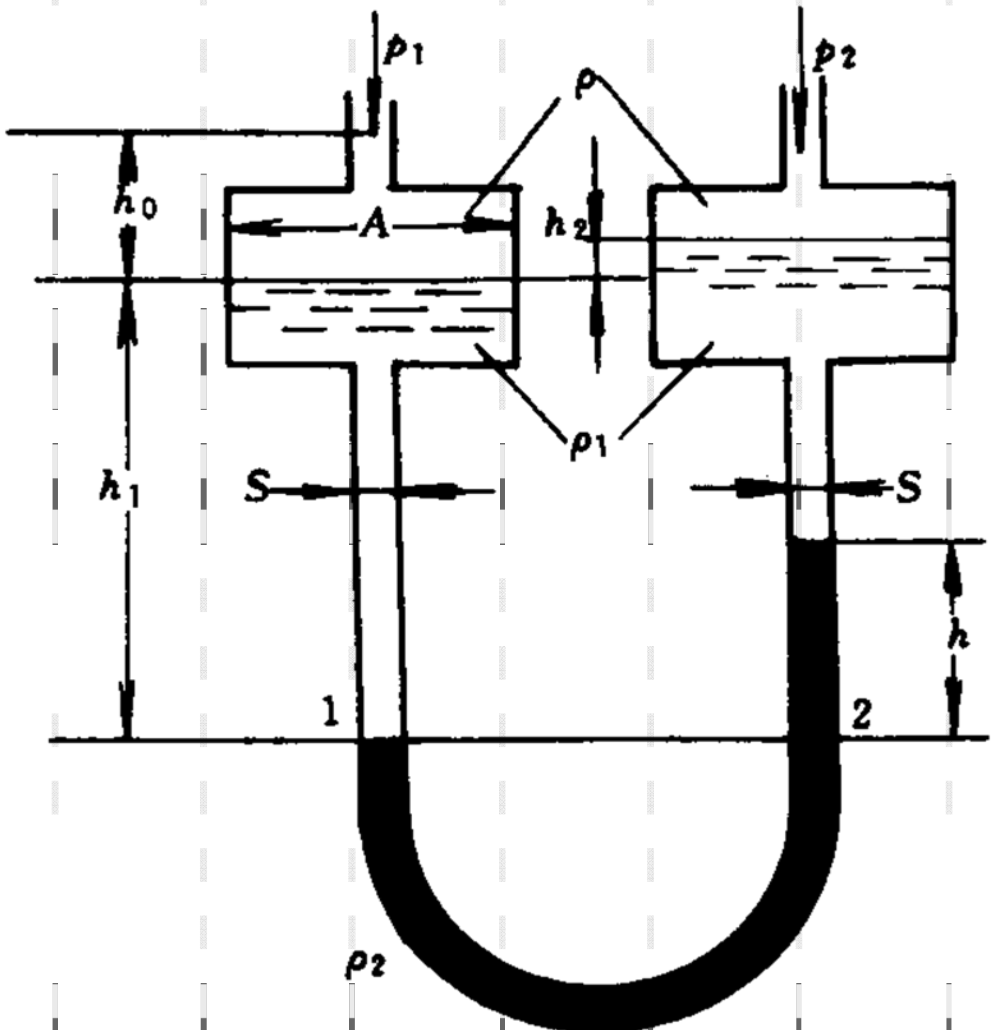
$$p_1+\rho_1 gh_1=p_2+\rho_1 g(h_2+h_1-h)+\rho_2 gh$$

由于两边密度为ρ_1的液体容量相等，所以$D^2h_2=d^2h$，代入上式得

$$p_1-p_2=\left[\rho_2 g-\left(1-\frac{d^2}{D^2}\right)\rho_1 g\right]h$$

$$=\left[13600\times9.806-\left(1-\frac{0.01^2}{0.1^2}\right)\times1000\times9.806\right]\times0.03$$

= 3709.6(p_a)



图

【例题】 用双U形管测压计测量两点的压强差，如图所示，已知h_1=600mm，h_2=250mm，h_3=200 mm，h_4=300mm，h_5=500mm，ρ_1=1000kg/m^3，ρ_2=800kg/m^3，ρ_3=13598kg/m^3，试确定A和B两点的压强差。

【解】 根据等压面条件，图中1—1，2—2，3—3均为等压面。可应用流体静力学基本方程式逐步推算。

$P_1=p_2+\rho_1 g h_1$　　$p_2=p_1-\rho_3 g h_2$

$$p_3=p_2+\rho_2 g h_3$$

$$p_4=p_3-\rho_3 g h_4$$

$$p_B=p_4-\rho_1 g(h_5-h_4)$$

逐个将式子代入下一个式子，则

$$p_B=p_A+\rho_1gh_1-\rho_3gh_2+\rho_2gh_3-\rho_3gh_4-\rho_1g(h_5-h_4)$$

所以 $p_A-p_B=\rho_1g(h_5-h_4)+\rho_3gh_4+\rho_3gh_2-\rho_2gh_3$

$-\rho_1g\ h_1=9.806\times1000\times(0.5-0.3)$

$+133400\times0.3-7850\times0.2$

$+133400\times0.25-9.806\times1000\times0.6$

$=67876$（Pa）

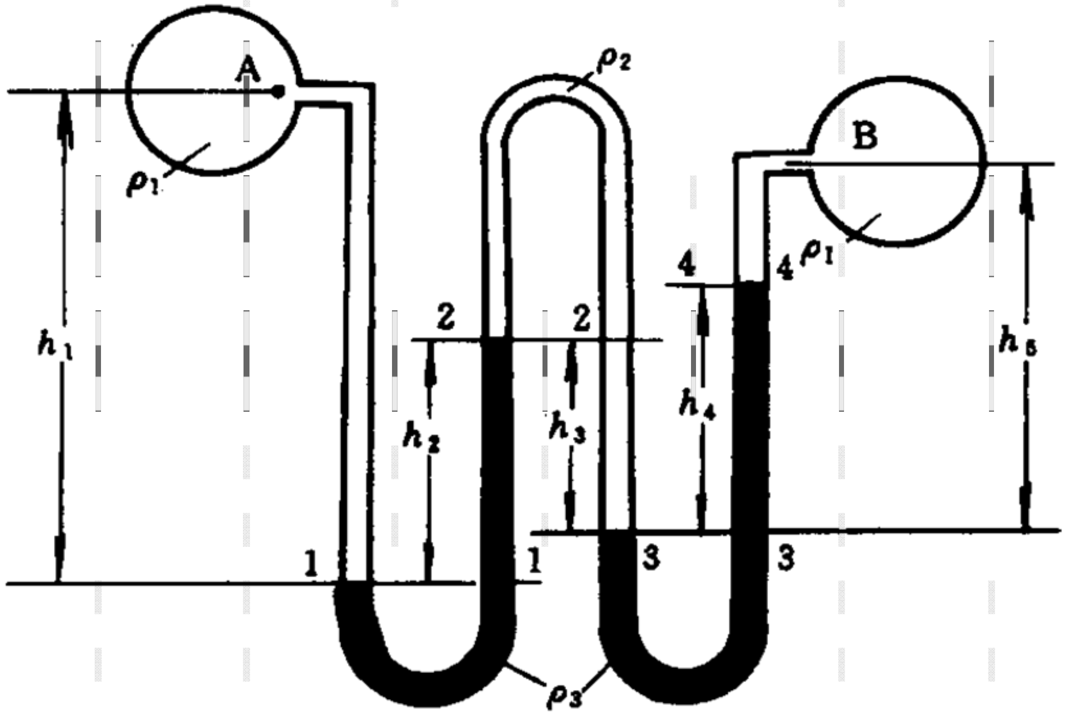


图2-18

【例题】 已知密闭水箱中的液面高度h_4=60mm，测压管中的液面高度h_1=100cm，U形管中右端工作介质高度，如图所示。试求U形管中左端工作介质高度h_3为多少？

【解】 列1—1截面等压面方程，则

$$p_0 = p_a + \rho_{H_2 0} g(h_1 - h_4)$$

$$= p_a + \rho_{H_2 0} g(1.0 - 0.6) = p_a + 0.4\rho_{H_2 0} g \quad (a)$$

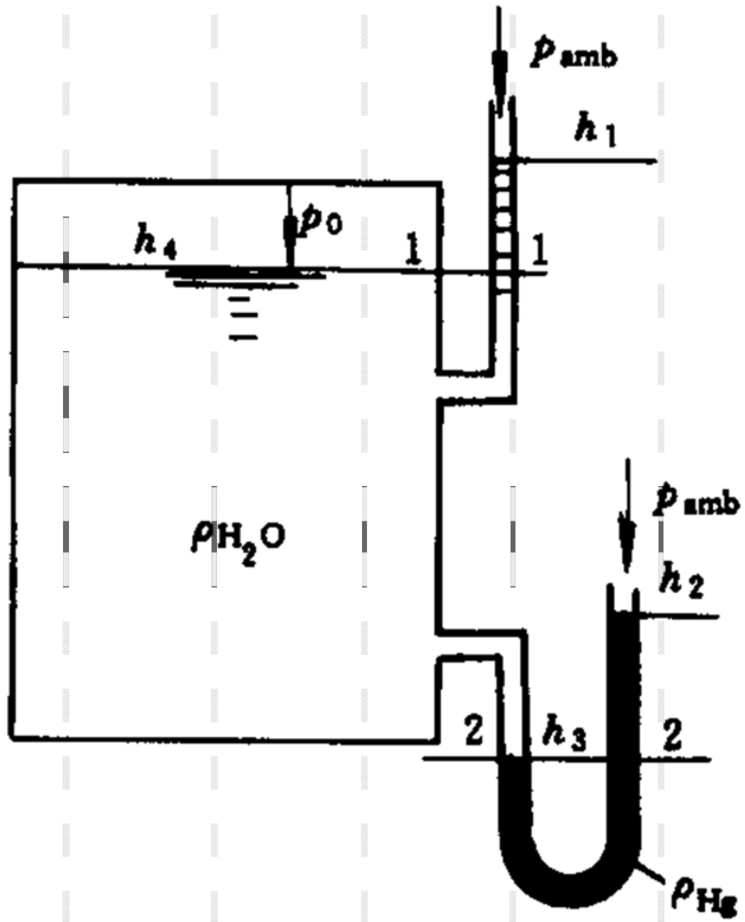
列2—2截面等压面方程，则

$$p_0 + \rho_{H_2 0} g(h_4 - h_3) = p_a + \rho_{Hg} g(h_2 - h_3) \quad \text{（b）}$$

把式（a）代入式（b）中

$$p_a + 0.4\rho_{H_2 0} g + \rho_{H_2 0} g(0.6 - h_3) = p_a + \rho_{Hg} g(0.2 - h_3)$$

$$h_3 = \frac{0.2\rho_{Hg} - \rho_{H_2 0}}{\rho_{Hg} - \rho_{H_2 0}} = \frac{0.2 \times 13600 - 1000}{13600 - 1000} = 0.1365(\text{m}) = 136.5(\text{mm})$$



图

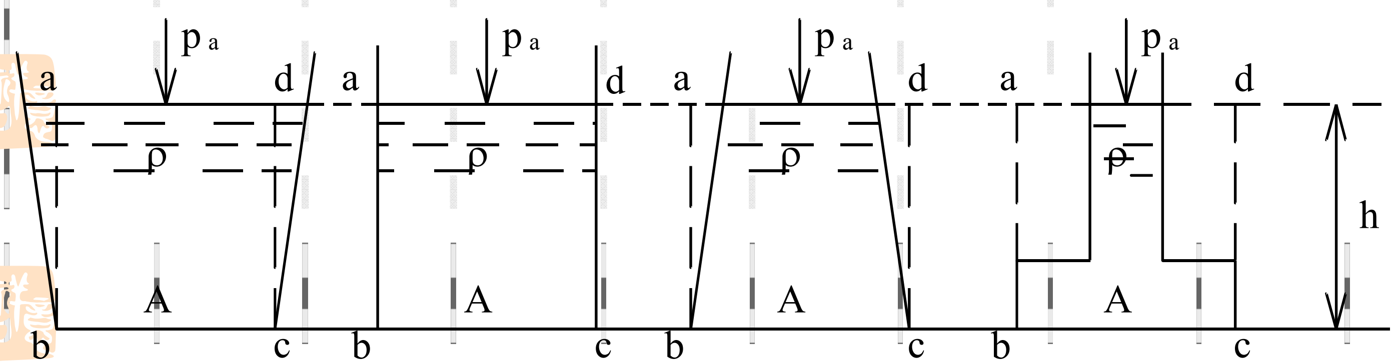
§2.5 作用在平面上的液体压力

一、水平平面上的液体总压力

各点压强大小：处处相等

各点压强方向：方向一致

$$F = p_e A = \rho g h A$$



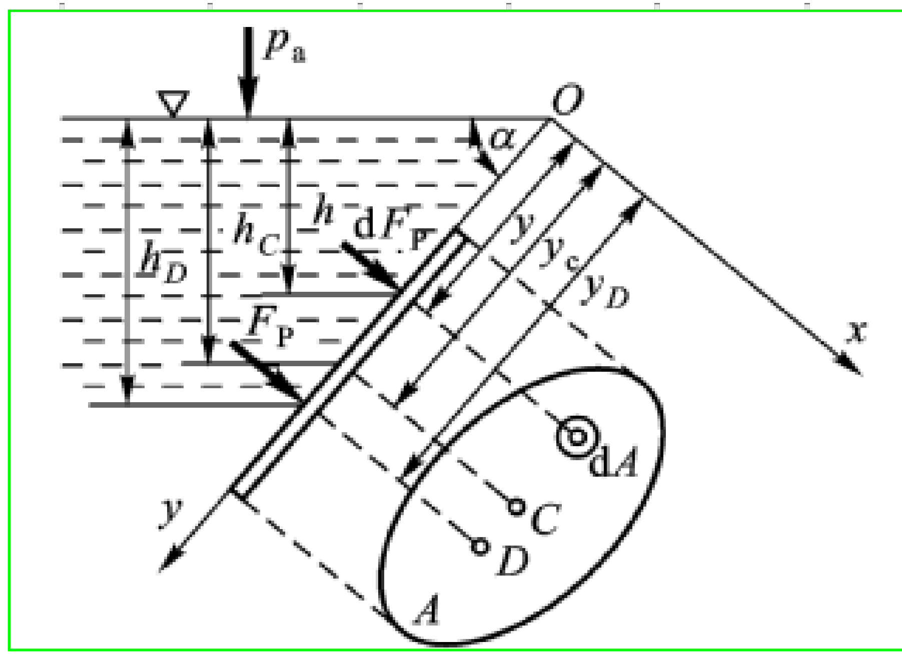
§2.5 作用在平面上的液体压力

二、倾斜平面上的液体总压力

在静止液体中，有一和液面呈夹角 α 的任意形状的平面

Z轴和平面垂直

由流体静压强的特性知,各点的静压强均垂直于平面,构成了一个平行力系,因此,液体作用在平面上的总压力就是这一个平行力系的合力



§2.5 作用在平面上的液体压力

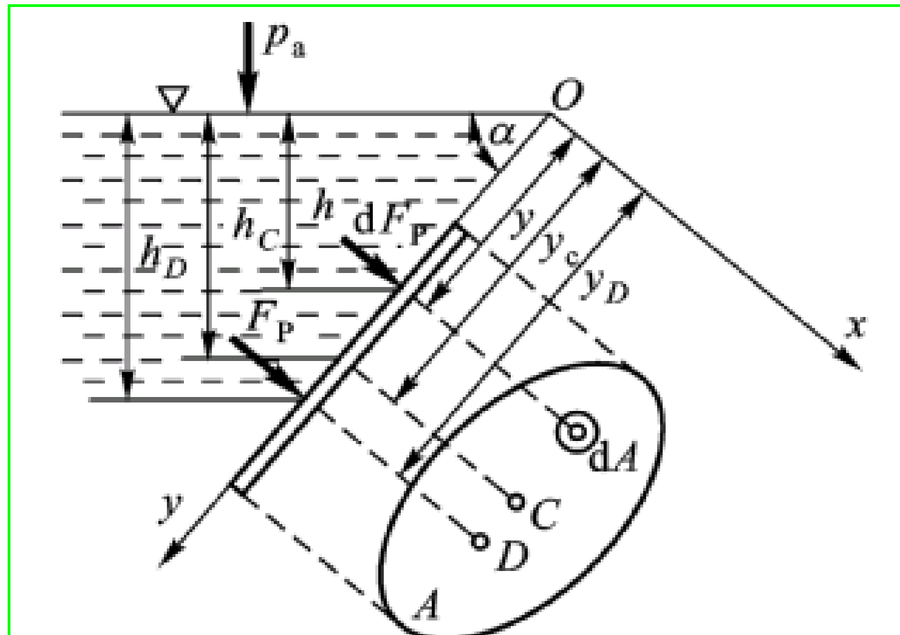
二、倾斜平面上的液体总压力(续)

各点压强大小： 处处不相等

各点压强方向： 方向一致

1. 总压力的方向

总压力的方向垂直于受压的平面



2. 总压力的大小

作用在微分面积dA上的压力：

$$dF_p = pdA = \rho ghdA = \rho g(y\sin\alpha)dA$$

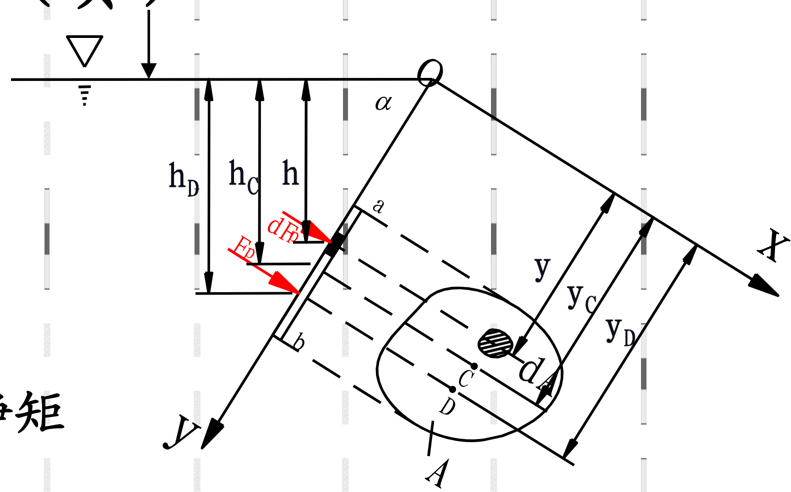
作用在平面ab上的总压力：

$$F_p = \int_A dF_p = \rho g\sin\alpha\int_A ydA$$

§2.5 作用在平面上的液体压力

二、倾斜平面上的液体总压力(续)

作用在平面ab上的总压力:



$$F_p = \int_A dF_p = \rho g \sin\alpha \int_A y dA$$

由工程力学知:

$$\int_A y dA = y_C A$$ 受压面面积A对OX轴的静矩

故 $$F_p = \rho g(y_C \sin\alpha)A = \rho g h_c A = (p_c - p_a)A$$

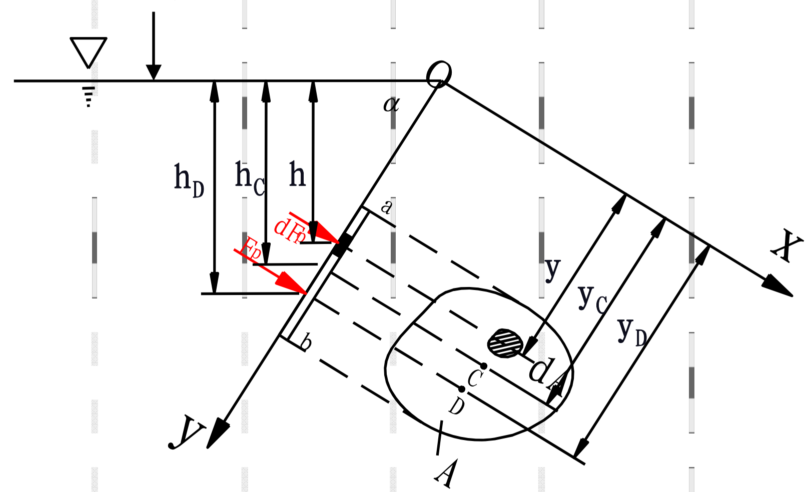
$$h_c = y_c \sin\alpha \qquad p_c - p_a = \rho g h_c$$

即静止液体作用在平面上的总压力等于受压面面积与其形心处的相对压强的乘积。

§2.5 作用在平面上的液体压力

二、倾斜平面上的液体总压力（续）

3. 总压力的作用点



合力矩定理：合力对某轴的矩等于各分力对同一轴的矩的代数和。

$$F_p y_D = \iint dF_p y$$

$$\Downarrow$$

$$\rho g \sin\alpha y_c A y_D = \rho g \sin\alpha \iint_A y^2 dA$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y_D = \frac{\iint y^2 dA}{y_c A} = \frac{I_x}{y_c A} = y_c + \frac{I_{cx}}{y_c A}}$$

压力中心D必位于受压面形心c之下。

$\int_A y^2 dA = I_x$　受压面A对ox轴的惯性矩。

I_{cx}　受压面A对过形心点C且平行于ox轴的轴线的惯性矩。

总压力的作用点（总压力的作用线和平面的交点　称压力中心）

由合理矩定理

总压力 F_P 对ox 轴的力矩等于各微元总压力对 ox 轴的力矩的代数和

$$F_p y_D = \iint_A dF_p y$$

$$\boxed{\rho g \sin\alpha y_c A y_D = \rho g \sin\alpha \iint_A y^2 dA}$$

$$\iint_A y^2 dA = I_x$$ （惯性矩　二次矩）

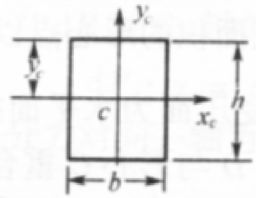
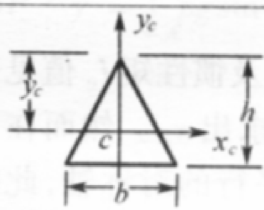
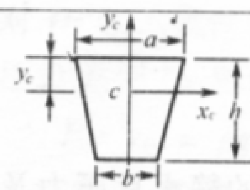
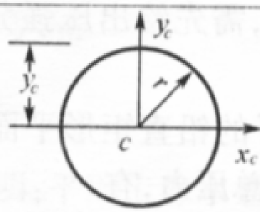
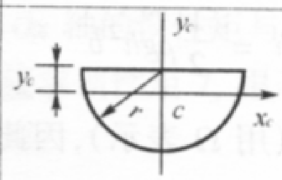
$$y_D = \frac{\gamma \sin\alpha J_x}{P} = \frac{\gamma \sin\alpha J_x}{\gamma \sin\alpha y_c A} = \frac{J_x}{y_c A} = \frac{J_{x\cdot c} + y_c^{\,2} A}{y_c A}$$

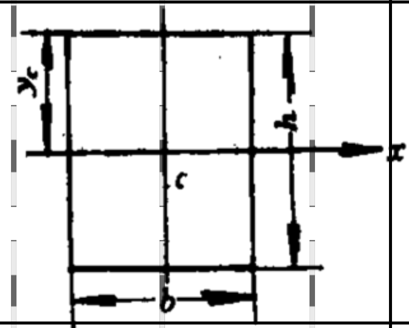
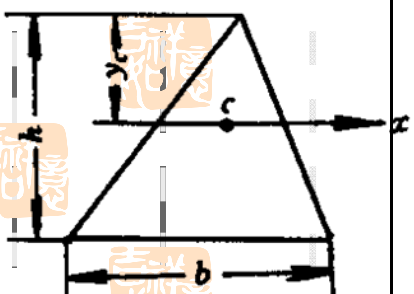
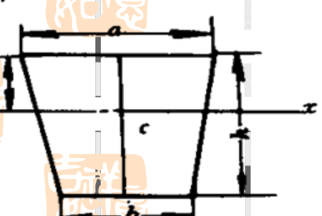
压力中心的y坐标

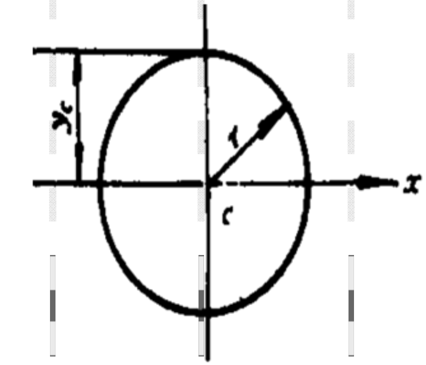
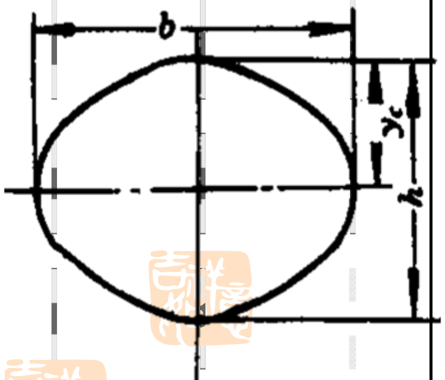
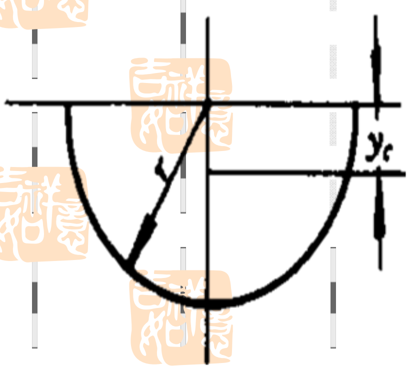
$$y_D = y_c + \frac{I_{cx}}{y_c A}$$

- 惯性矩的平行移轴定理

表 2.1　　　　常见图形的 A, y_c 及 I_c 值

几　何　图　形		面积 A	形心纵坐标 y_c	对形心横轴的惯性矩 I_c
矩　形		bh	$\frac{1}{2}h$	$\frac{1}{12}bh^3$
三角形		$\frac{1}{2}bh$	$\frac{2}{3}h$	$\frac{1}{36}bh^3$
梯　形		$\frac{1}{2}h(a+b)$	$\frac{h}{3}\left(\frac{a+2b}{a+b}\right)$	$\frac{1}{36}h^3\left(\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}\right)$
圆　形		πr^2	r	$\frac{1}{4}\pi r^4$
半圆形		$\frac{1}{2}\pi r^2$	$\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$	$\frac{9\pi^2-64}{72\pi}r^4$

截面几何图形	面积A	型心y_c	惯性距I_{cx}
	bh	$1/2h$	$1/12bh^3$
	$1/2bh$	$2/3h$	$1/36bh^3$
	$1/2h(a+b)$	$\frac{1}{3}h\frac{a+2b}{a+b}$	[illegible]

	πr^2	r	$\dfrac{\pi}{4} r^4$
	$\dfrac{\pi}{4} bh$	$\dfrac{h}{2}$	$\dfrac{\pi}{64} bh^3$
	$\dfrac{\pi}{3} r^2$	$\dfrac{4}{3} \dfrac{r}{\pi}$	$\dfrac{9\pi^2 - 64}{72\pi} r^4$

根据平行移轴定理 $$\boxed{I_x = I_{cx} + y_c^2 A}$$

代入上式得 $$y_D = y_c + \frac{I_{cx}}{y_c A} \quad y_D > y_c$$

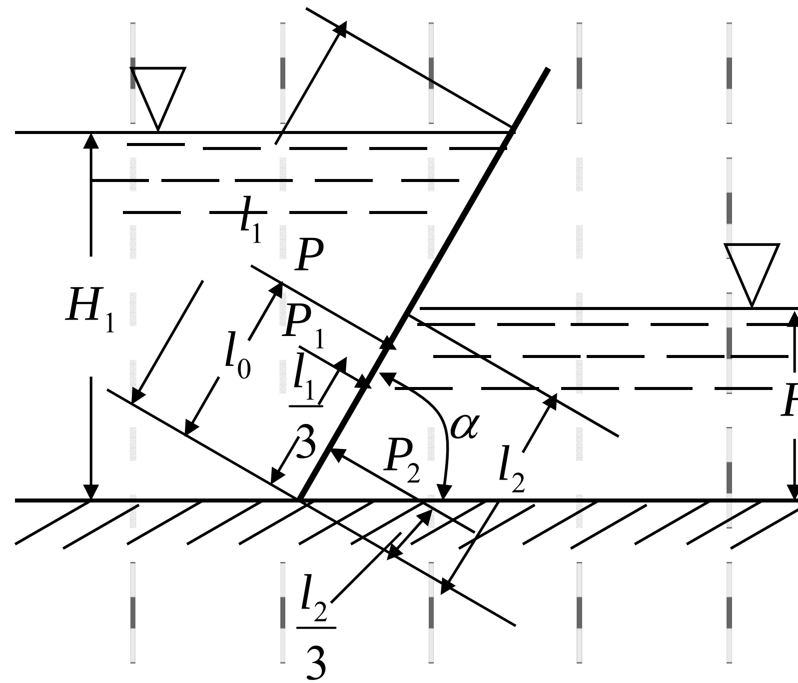
压力中心的X坐标 $$x_D = \frac{I_{xy}}{y_c A} = x_c + \frac{I_{cxy}}{y_c A}$$

工程实际中的平面往往是对称图形,一般不必计算压力中心的X坐标

[例题]如图所示，一矩形闸门两面受到水的压力，左边水深 $H_1 = 4.5m$，右边水深 $H_2 = 2.5m$，闸门与水面成 $\alpha = 45^0$ 倾斜角。假设闸门的宽度 $b = 1m$，试求作用在闸门上的总压力及其作用点。

[解]作用在闸门上的总压力系左右两边液体总压力之差，即

$$F = F_1 - F_2$$



因此

$$H_{c1} = \frac{H_1}{2}, A_1 = b\ l_1 = b\frac{H_1}{\sin\alpha};$$

$$H_{c2} = \frac{H_2}{2}, A_2 = b\ l_2 = b\frac{H_2}{\sin\alpha}。$$

所以

$$F=\rho g h_{c1}A_1-\rho g h_{c2}A_2=\frac{\rho g b H_1^2}{2\sin\alpha}-\frac{\rho g b H_2^2}{2\sin\alpha}$$

$$=\frac{9800\times1\times4.5^2}{2\times0.707}-\frac{9800\times1\times2.5^2}{2\times0.707}$$

$$=140346-43316=97030\ \mathrm{N}$$

由于矩形平面压力中心坐标

$$y_D=y_c+\frac{J_c}{y_cA}=\frac{L}{2}+\frac{b\,L^3/12}{(L/2)\,bL}=\frac{2}{3}L$$

根据合力矩定理，对通过O点垂直于图面的轴取矩，得

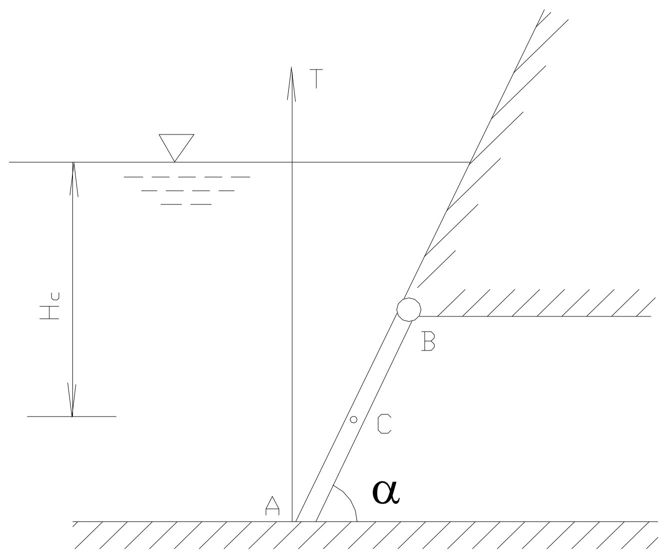
$$Fl_0=F_1\frac{l_1}{3}-P_2\frac{l_2}{3}=F_1\frac{H_1}{3\sin\alpha}-F_2\frac{H_2}{3\sin\alpha}$$

所以

$$l_0=\frac{F_1H_1-F_2H_2}{3P\sin\alpha}=\frac{140346\times4.5-43316\times2.5}{3\times97030\times0.707}=2.54\,\mathrm{m}$$

这就是作用在闸门上的总压力的作用点距闸门下端的距离。

例题：如图，涵洞进口装有一圆形平板闸门，闸门平面与水平面成60°，铰接于B点并可绕B点转动，门的直径d=1m，门的中心位于上游水面下4m，门重G=980N。当门后无水时，求从A处将门吊起所需的力T。



解：闸门所受水的总压力

$$P=\gamma h_c A_x=9.8\times4\times\pi\times0.5\times0.5\times\sin60°=26.66\text{kN}$$

压力中心D到B的距离

$$L = Y_c + \frac{J_c}{Y_c A} - Y_c + \frac{d}{2}$$

$$= \left(\frac{\pi \dfrac{0.5^4}{4}}{\dfrac{H_c}{\sin 60°}\left(\pi \times 0.5^2\right)} \right) + 0.5$$

$$= 0.51m$$

B到T的垂直距离

$$x = d \times \cos 60° = 0.5m$$

B到G的垂直距离

$$y = \frac{d}{2} \times \cos 60° = 0.25m$$

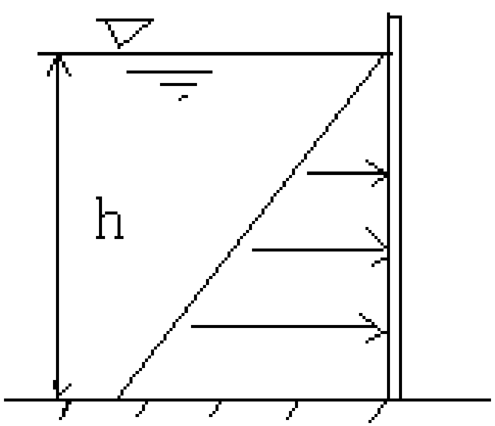
根据理论力学平衡理论

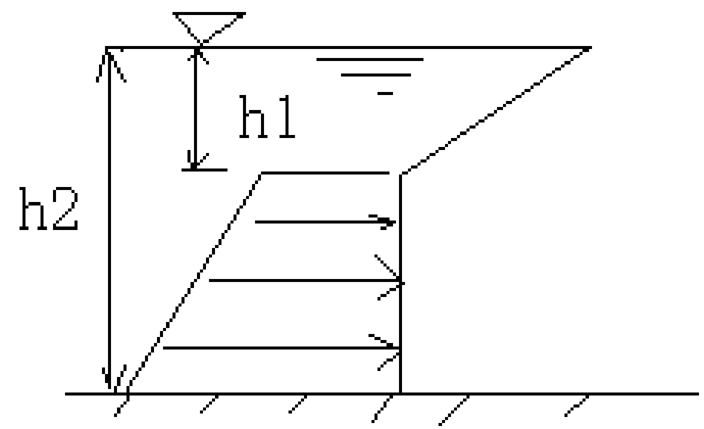
$$\sum M_A = PL + Gy - Tx = 0$$

$$T = \frac{PL + Gy}{x} = 27.9kN$$

- 总压力计算的图解法
- 适用于上、下边与水面平行的矩形平面上的静水总压力及其作用点位置。

1. 静止液体总压力的大小



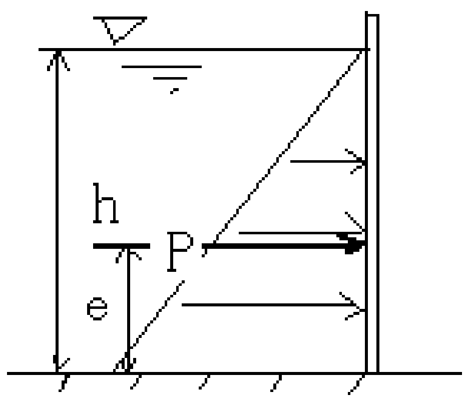


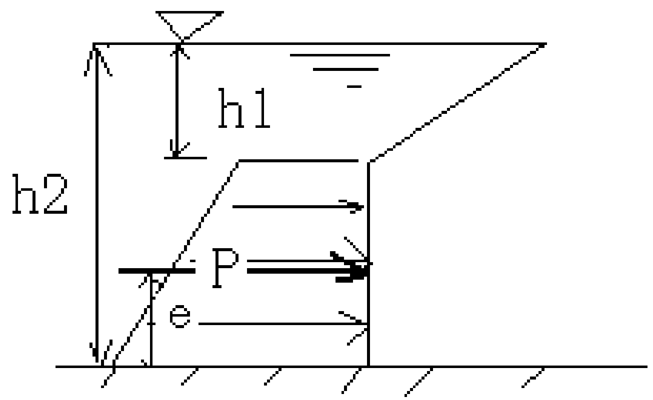
$$P = \Omega b$$

2. 静止液体总压力的作用点

$$e = \frac{1}{3}h$$

$$e = \frac{a}{3}\frac{2b_1 + b_2}{b_1 + b_2}$$





静水压强分布图

§2-6 作用于曲面的液体压力

静止液体作用在曲面上的总压力的计算程序

(1)将总压力分解为水平分力F_x和垂直分力F_z。

(2)水平分力的计算。

(3)确定压力体的体积。

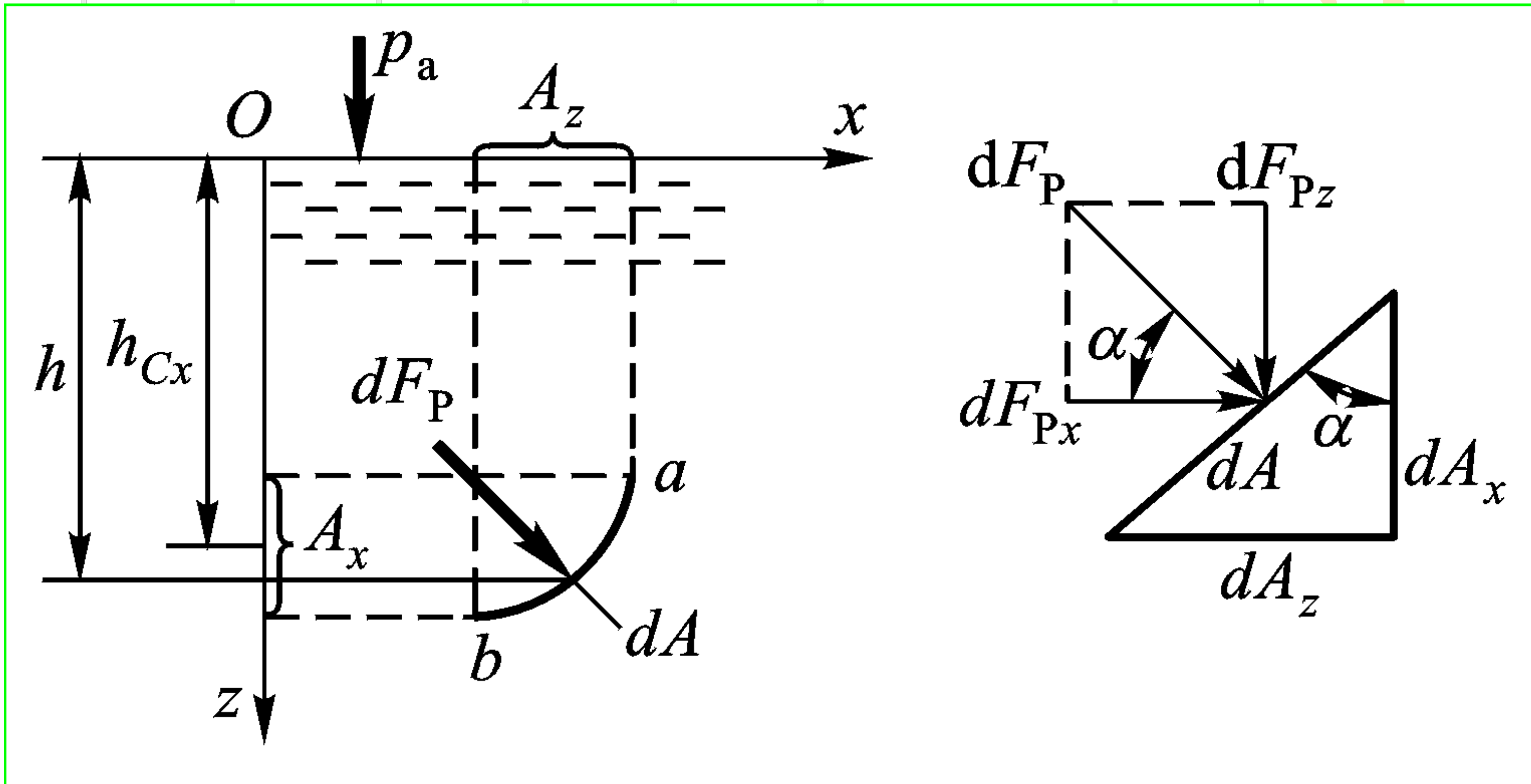
(4)垂直分力的计算，方向由虚、实压力体确定。

(5)总压力的计算。

(6)总压力方向的确定。

(7)作用点的确定，即总压力的作用线与曲面的交点即是。

§2-6 作用于曲面的液体压力



有一承受液体压强的二维曲面，坐标系的Z轴垂直向下

总压力

$$\boxed{dF_P = \rho g h dA}$$

$$dF_{px} = dF_p \cos\alpha = \rho g h dA \cos\alpha = \rho g h dA_x$$

$$dF_{pz} = dF_p \sin\alpha = \rho g h dA \sin\alpha = \rho g h dA_z$$

(1) 水平分力

$$F_{px} = \iint_A dF_{px} = \iint_A \rho g h dA_x = \rho g \iint_A h dA_x$$

$$\iint_A h dA_x = h_{cx} A_x$$

曲面A在垂直于x轴的坐标平面内的投影面积 A_x 对y的面积矩

$$F_{px} = \rho g h_{cx} A_x$$

h_{cx} 为投影面积 A_x 的形心的淹深

（2）垂直分力 $$F_{pz}=\iint_A dF_{pz}=\iint_A \rho g h dA_z=\rho g\iint_A hdA_z$$

$\iint_A hdA_z=V_p$ 为曲面a－b和自由液面或者其延长面所包容的体积，称为**压力体**

$$F_{pz}=\rho g V_p$$

（3）总压力的大小和作用点

将上述总压力的两个分力合成，即得到液体作用在曲面上的总压力

$$F_p=\sqrt{F_{px}^2+F_{pz}^2}$$

$$\theta=arctg\frac{F_{px}}{F_{pz}}$$

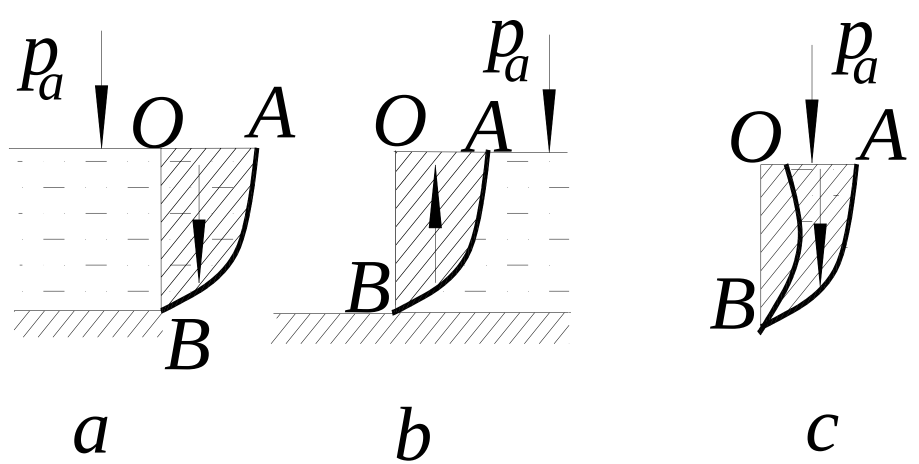
压力体　曲面和自由液面或者自由液面的延长面包容的体积

实压力体

压力体充满液体

虚压力体

压力体中没有液体



这三个压力体的大小均为V_{OAB}.所以，对于同一曲面，当液体深度不变，只是液体的相对位置不同时，压力体与曲面的相对位置不同,但压力体的大小并不改变，曲面所承受的垂直分力的大小也不变化，只是方向改变而已。

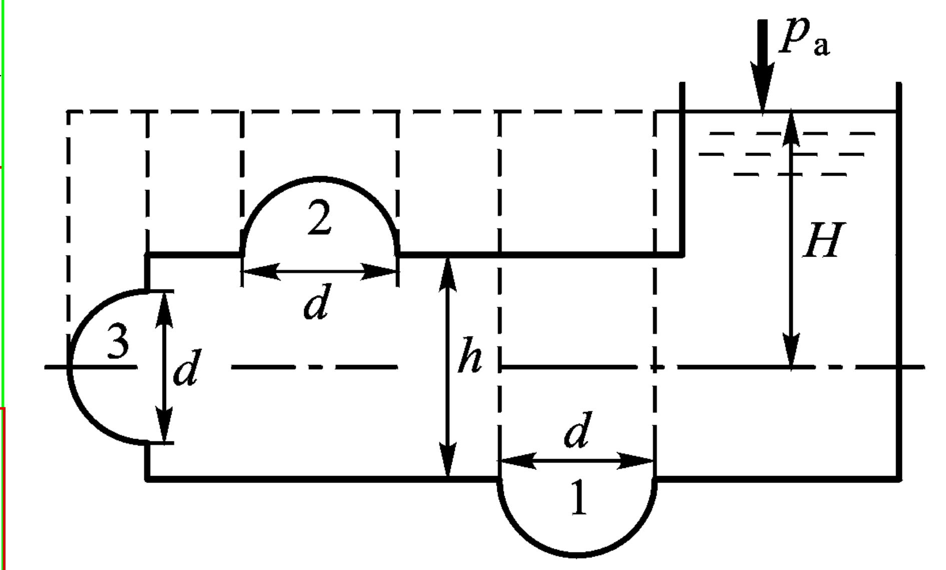
例题：

对于底盖，由于在水平方向上压强分布对称，所以流体静压强作用在底盖上的总压力的水平分力为零。底盖上总压力的垂直分力

解

$$F_{pz1}=\rho g V_{p1}=\rho g\left[\frac{\pi d^2}{4}\left(H+\frac{h}{2}\right)+\frac{\pi d^3}{12}\right]$$

$$=9806\left[\frac{\pi\times0.5^2}{4}\times(2.5+0.75)+\frac{\pi\times0.5^3}{12}\right]=6579N$$



顶盖上的总压力的水平分力也为零，垂直分力为

$$F_{pz2}=\rho g V_{p2}=\rho g\left[\frac{\pi d^2}{4}\left(H-\frac{h}{2}\right)-\frac{\pi d^3}{12}\right]$$

$$=9806\left[\frac{\pi\times0.5^2}{4}\times(2.5-0.75)-\frac{\pi\times0.5^3}{12}\right]=3049N$$

侧盖上总压力的水平分力

$$\boxed{F_{px3}=\rho g h_{cx}A_x=\rho g H\frac{\pi d^2}{4}=9806\times 2.5\times\frac{\pi\times 0.5^2}{4}=4814N}$$

侧盖上的压力体，应为半球的上半部分和下半部分的压力体的合成，合成后的压力体即为侧盖包容的半球体，所以侧盖上总压力的垂直分力

$$\boxed{F_{pz3}=\rho g\frac{\pi d^3}{12}=9806\times\frac{\pi\times 0.5^3}{12}=321N}$$

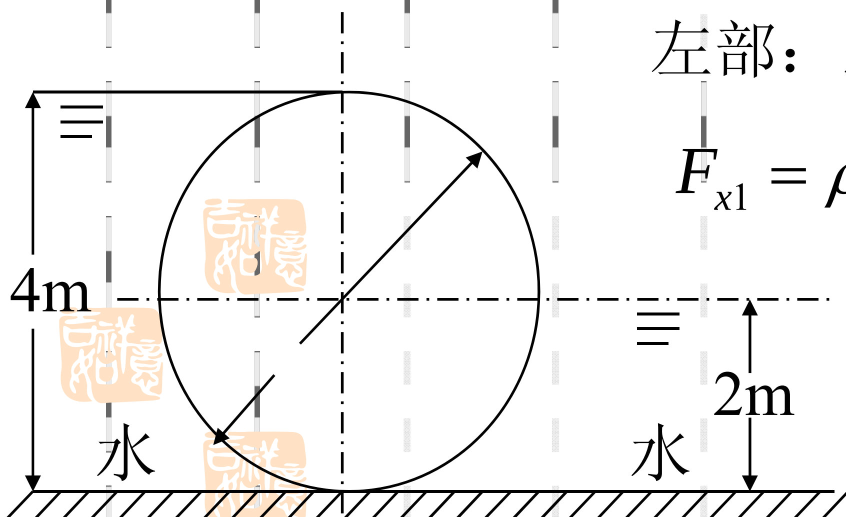
根据上述水平分力和垂直分力可求得总压力的大小和作用线的方向角

$$F_{p3}=\sqrt{F_{px3}^2+F_{pz3}^2}=\sqrt{4814^2+321^2}=4825N$$

$$\theta=arctg\frac{F_{px3}}{F_{pz3}}=arctg\frac{4814}{321}=86.2^{\circ}$$

由于总压力的作用线与球面垂直，所以作用线一定通过球心

[例题]如图所示：有一圆形滚门，长1m（垂直园面方向），直径D为4m，两侧有水，上游水深4m，下游水深2m，求作用在门上的总压力的大小及作用线的位置。



[解]分左右两部分计算

左部：水平分力

$$F_{x1}=\rho g h_{c1}A_{x1}=9800\times2\times(4\times1)=78400N$$

垂直分力

$$F_{z1}=\rho g V_1$$

$$=9800\times1\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}\times4^2\right)$$

$$=61500N$$

合力

$$F_1 = \sqrt{F_{x1}^2 + F_{z1}^2} = \sqrt{(78400)^2 + (61500)^2} = 99640\,N$$

作用线通过中心与铅垂线成角度θ_1。

$$\theta_1 = arctg\frac{F_{x1}}{F_{z1}} = arctg\frac{78400}{61500} = 50^0 47'$$

右部：

水平分力

$$F_{x2} = \rho g h_{c2} A_{x2} = 9800 \times 1 \times (2 \times 1) = 19600 N$$

垂直分力

$$F_{z2} = \rho g V_2 = \frac{1}{2} F_{z1} = 30750 N$$

合力

$$F_2 = \sqrt{F_{x2}^2 + F_{z2}^2} = \sqrt{(19600)^2 + (30750)^2} = 36470\,N$$

作用线通过中心与垂线成角度θ_2。

$$\theta_2 = arctg\frac{F_{x2}}{F_{z2}} = arctg\frac{30750}{36470} = 40^0 7'$$

总水平分力：

$$F_x = 78400 - 19600 = 58800N(\rightarrow)$$

总垂直分力：

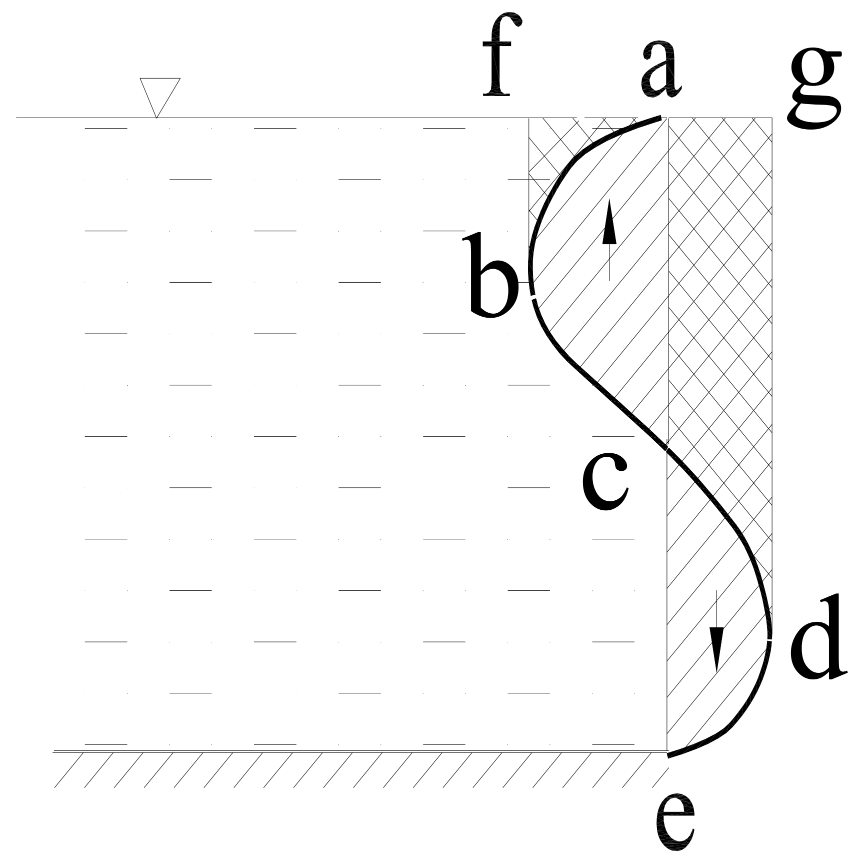
$$F_z = 61500 + 30750 = 92250N(\uparrow)$$

合力

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{(58800)^2 + (92250)^2} = 109400\,\mathrm{N}$$

$$\theta = arctg\frac{F_x}{F_z} = arctg\frac{58800}{92250} = 32^0 30'$$

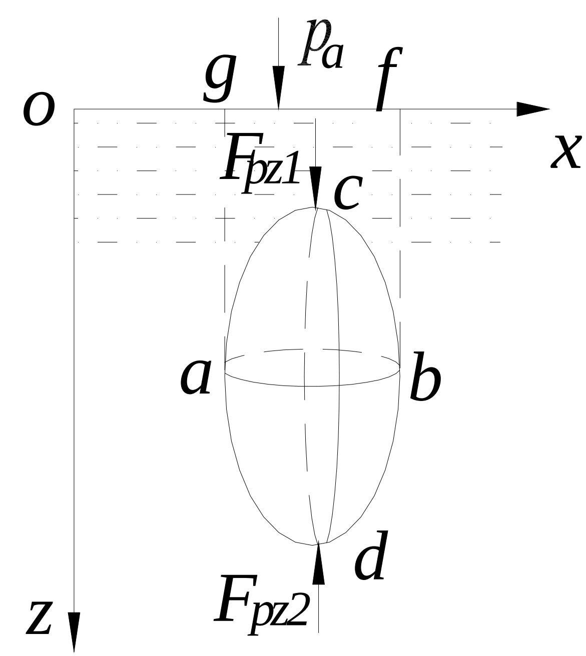
复杂曲面的压力体，可以采用分段叠加的方法画出



作用在浮体和潜体上的总压力

流体力学中将部分沉浸在液体中的物体称为**浮体**，全部沉浸在液体中的物体称为**潜体**，沉入液体底部固体表面上的物体称为**沉体**

$$V_p = V_{adbfg} - V_{acbfg}$$



总压力的垂直分力为

$$F_{pz} = \rho g V_p = -\rho g V_{adbc}$$

※负值说明其方向向上

即液体作用在潜体上的总的作用力

§2-7 流体的平衡微分方程

一、欧拉平衡方程式

欧拉于1755年提出。

如图所示，在平衡流体中任取边长为dx、dy、dz 的一个微元六面体$ABCDE$，设A点的密度为ρ，压强为p。

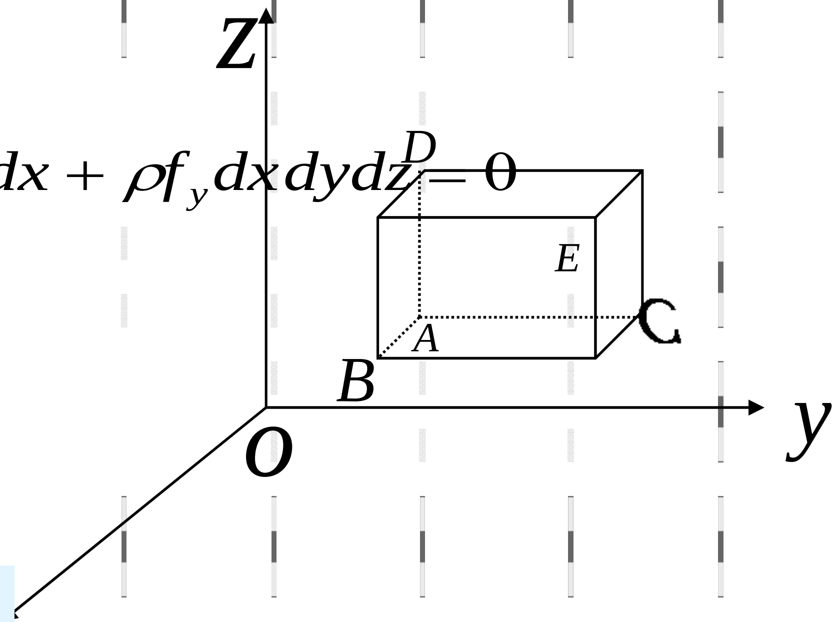
y方向的静力平衡

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dzdx-\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dzdx+\rho f_y dxdydz=0$$

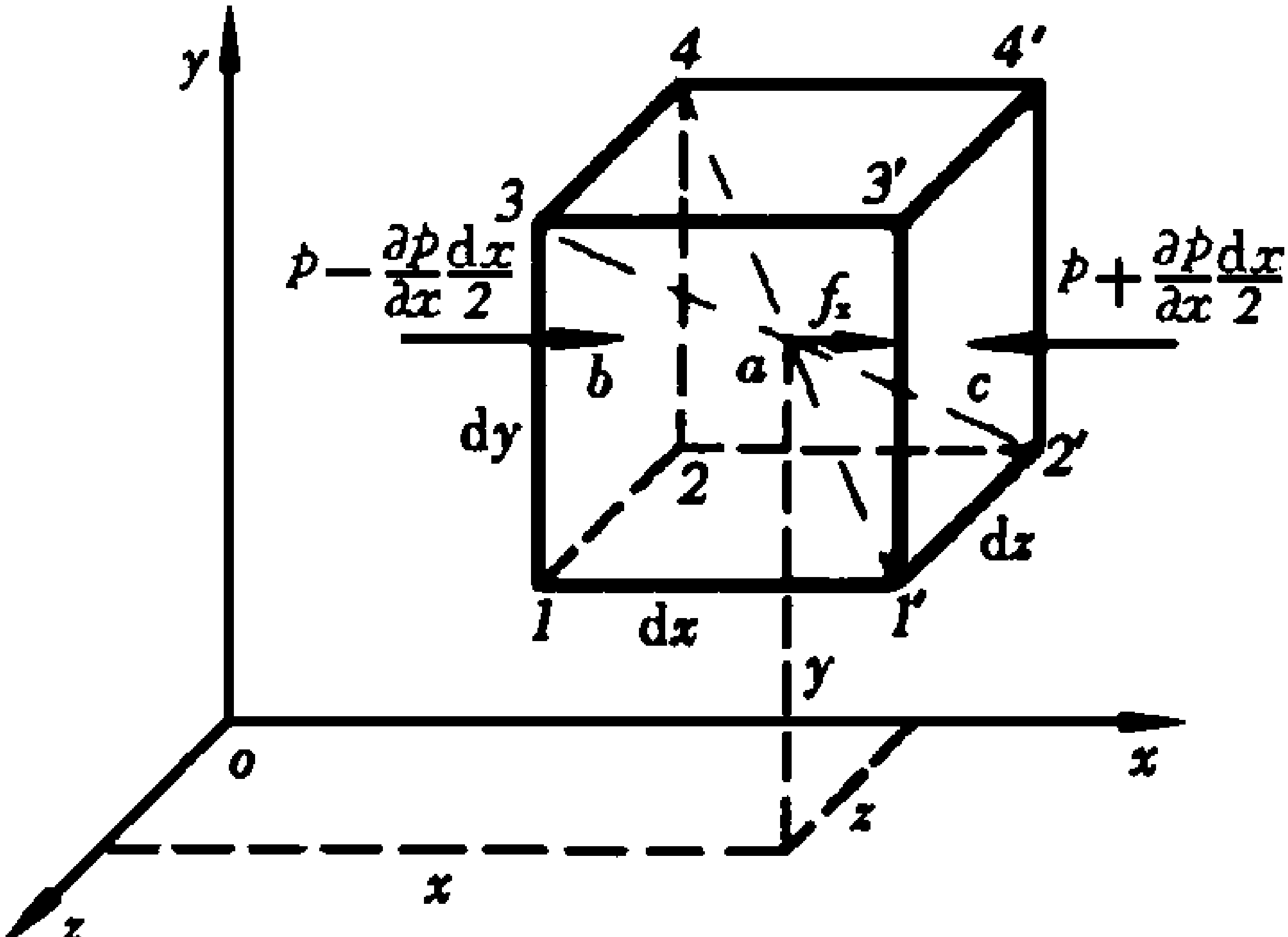
$$f_y=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy$$

同理

$$f_x=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\quad f_z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$



微元六面体



$$(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2})dydz-(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2})dydz+f_x\rho dxdydz=0$$

或 $$f_x\rho dxdydz-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz=0$$

上式为流体平衡微分方程式（欧拉平衡方程式）。

$$\left.\begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

物理意义：

当流体平衡时，作用在单位质量流体上的质量力与压力的合力相平衡。

- 在推导欧拉平衡微分方程的过程中，对质量力的性质及方向并未作具体规定，因而本方程既适用于静止流体，也适用于相对静止的流体。同时，在推导中对整个空间的流体密度是否变化或如何变化也未加限制，所以它不但适用于不可压缩流体，而且也适用于可压缩流体。另外，流体是处在平衡或相对平衡状态，各流层间没有相对运动，所以它既适用于理想流体，也适用于粘性流体。
- 为了便于积分和工程应用，流体平衡微分方程式可以改写为另一种形式，即全微分形式。

第三节 流体平衡微分方程和等压面

现将式(2-6)中各分式分别乘以dx、dy、dz，然后相加得

$$(f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=0$$

因为压力p是坐标的连续函数，故p的全微分为

$$\mathrm{d}p=\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z$$

于是，流体平衡微分方程式(2-6)又可表示为

$$\boxed{\mathrm{d}p=\rho(f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z)} \qquad (2\text{-}8)$$

这就是直角坐标系下流体平衡微分方程的全微分形式。

二、质量力的势函数

将欧拉方程分别乘以dx、dy、dz 后相加，则有

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = 0$$

因为：$p = p(x,y,z)$，所以$\mathrm{d}p = \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z$

所以：$dp = \rho\left(f_x dx + f_y dy + f_z dz\right)$

------为欧拉平衡方程式的综合式（压差公式）。

对于不可压缩流体 ρ =常数，根据数学分析理论可知，上式右端也必是某一坐标函数$W = W(x,y,z)$ 的全微分。

令

$$\left.\begin{aligned} f_x &= -\frac{\partial W}{\partial x} \\ f_y &= -\frac{\partial W}{\partial y} \\ f_z &= -\frac{\partial W}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

$$\rho\left(f_x dx + f_y dy + f_z dz\right) = -\rho dW$$

即

$$dp = -\rho dW$$

$W(x, y, z)$ 为质量力的 势函数，而质量力称为有势的质量力。

结论：

只有在有势的质量力作用下流体才能平衡。

二、有势质量力及力的势函数

根据场论的知识，有势质量力及力的势函数有如下定义：

设有一质量力场 $\vec{f}(x, y, z)$ 若存在一单值函数W(x，y，z)，满足 $\vec{f} = \mathrm{grad}\, U$ 则称该质量力场为有势力场，力 $\vec{f}$ 称为有势质量力，函数W(x，y，z)称为该力场的势函数。

由流体平衡微分方程式　可以看出，如果流体为不可压缩流体，其密度ρ=常数，则存在一单值函数W(x，y，z)，满足

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{W} = \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p = \vec{f}$$

所以，根据有势质量力的定义，可以得出这样的**结论**：**“凡满足不可压缩流体平衡微分方程的质量力必然是有势力。”**

• 势函数的概念

由理论力学知：若某一坐标函数对个坐标的偏导数分别等于力场的力在对应坐标轴上的投影，则称该坐标函数为力的势函数，而对应的力称为有势力。

因为： $f_x = \dfrac{\partial \pi}{\partial x},\ f_y = \dfrac{\partial \pi}{\partial y},\ f_z = \dfrac{\partial \pi}{\partial z}$

则称：质量力 ***f*** 有势

如：重力、电磁力、惯性力

$\pi = \pi(x, y, z)$为质量力的势函数

三、等压面

定义：

流体中压强相等各点所组成的平面叫做等压面。

在等压面上

$$p = C$$

等压面的微分方程式是

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0$$

性质:

1、等压面也是等势面;

$$dp = 0 \text{ 时} dW = 0$$

$$W = C$$

质量力势函数等于常数的面叫作等势面，所以等压面也是等势面。

2、等压面与单位质量力矢量垂直。

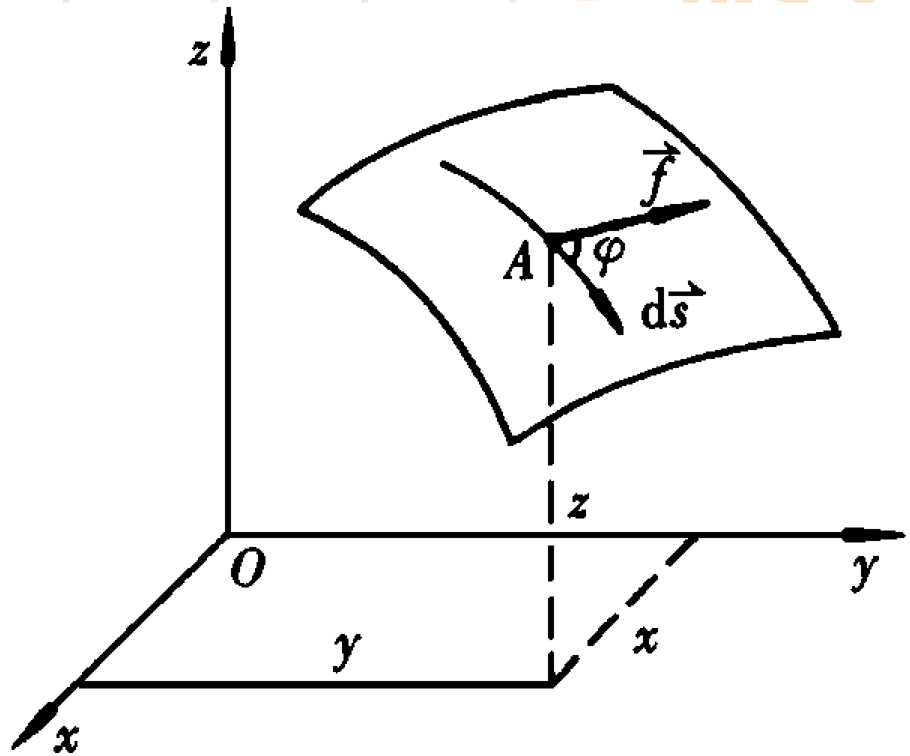
$$\vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

式中$d\vec{s}$是等压面上任意线段。

因而等压面与单位质量力矢量垂直。

由等压面的形状去确定质量力的方向。例如，

对于只有重力作用的静止流体，因重力的方向总是垂直向下的，所以其等压面必定是水平面。



3、两种互不相混的流体处于平衡状态时，其分界面必定为等压面。如处于平衡状态下的油水分界面、气水分界面等都是等压面。

§2.8 液体的相对平衡

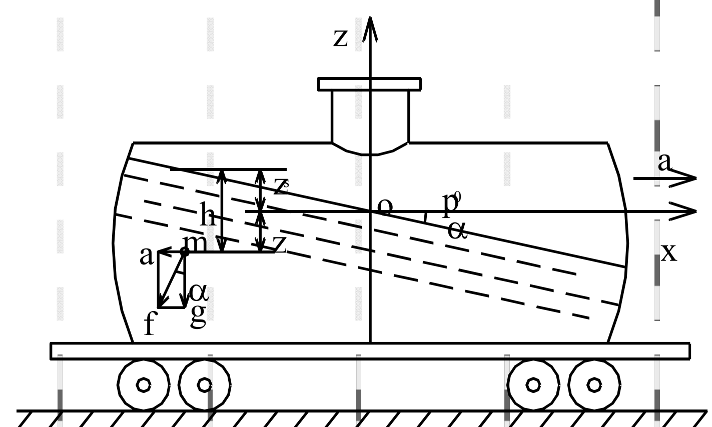
流体相对于地球有相对运动，而流体微团及流体与容器壁之间没有相对运动。

一、等加速水平运动容器中液体的相对平衡

容器以等加速度a向右作水平直线运动

质量力

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = -a \\ f_z = -g \end{cases}$$



§2.8 液体的相对平衡

一、等加速水平运动容器中液体的相对平衡（续）

质量力　$f_x = 0 \quad f_y = -a \quad f_z = -g$

1. 等压面方程

$$dp = \rho(f_y dy + f_z dz) = \rho(-adx - gdz) = 0$$

$$\Downarrow \text{积分}$$

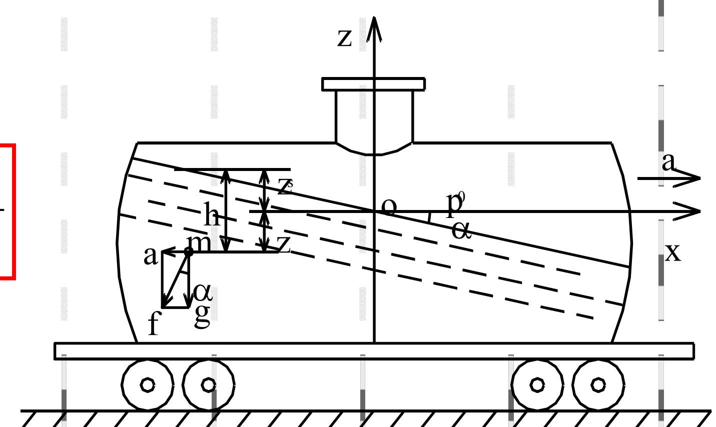
$$\boxed{ax + gz = C}$$

等压面是一簇平行的斜面。　$\boxed{\alpha = -arctg\frac{a}{g}}$

自由液面:　$x = 0 \quad z = 0 \qquad C = 0$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{ax + gz_s = 0}$$



§2.8 液体的相对平衡

一、等加速水平运动容器中液体的相对平衡（续）

2. 静压强分布规律

$$dp = \rho(f_y dy + f_z dz) = \rho(-adx - gdz)$$

$$\Downarrow \text{积分}$$

$$p = -\rho(ax + gz) + C$$

利用边界条件:

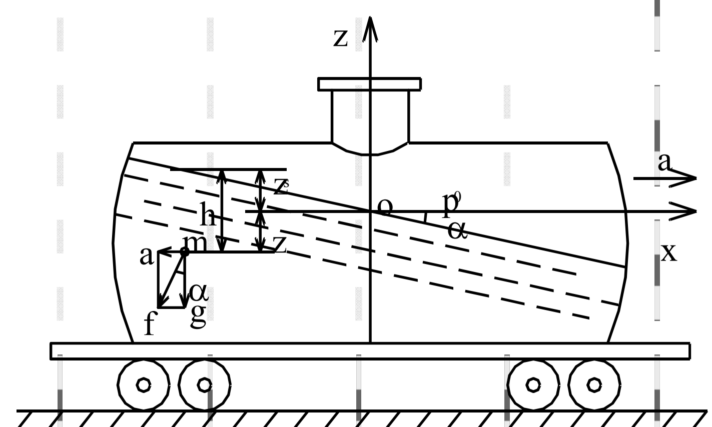
$$x = 0 \quad z = 0 \qquad\qquad p = p_0$$

得: $C = p_0$

$$\boxed{p = p_0 - \rho(ax + gz)}$$

$$\Downarrow \quad ax + gz_s = 0$$

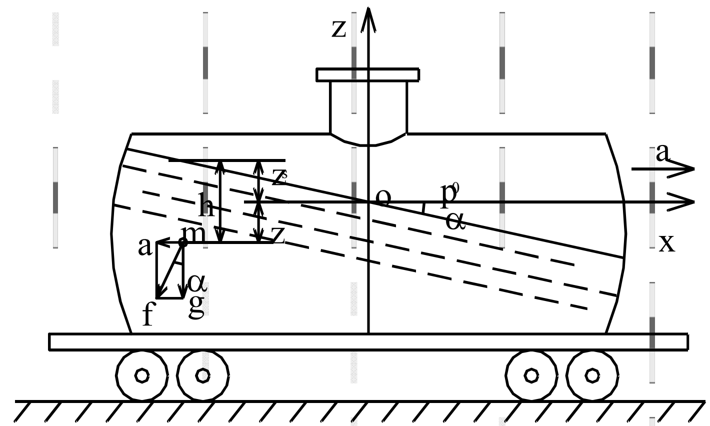
$$\boxed{p = p_0 + \rho g(z_s + z) = p_0 + \rho gh}$$



§2.8 液体的相对平衡

一、等加速水平运动容器中液体的相对平衡（续）

3. 与绝对静止情况比较



（1）等压面

绝对静止: $z = c$ 水平面

相对静止: $z = -\dfrac{a}{g}x + c$ 斜面

（2）压强分布

绝对静止: $p = p_0 + \rho g h$

相对静止: $p = p_0 + \rho g(z_s - z) = p_0 + \rho g h$

$\boldsymbol{h}$－任一点距离自由液面的淹深

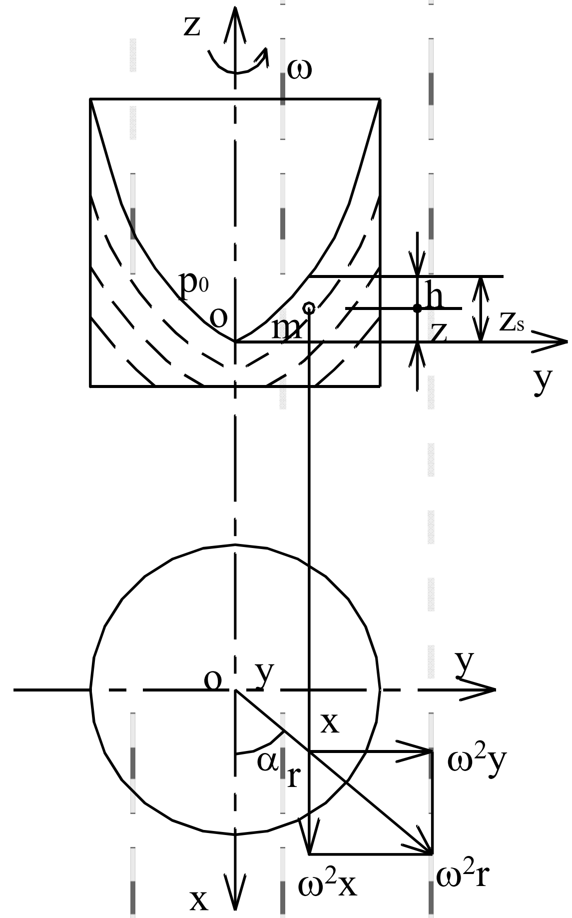
§2.8 液体的相对平衡

二、等角速旋转容器中液体的相对平衡

容器以等角速度ω旋转

质量力

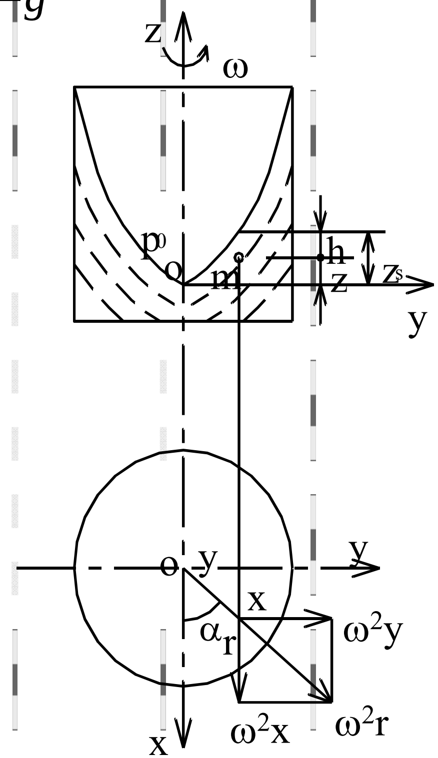
$$\begin{cases} f_x = \omega^2 r\cos\alpha = \omega^2 x \\ f_y = \omega^2 r\sin\alpha = \omega^2 y \\ f_z = -g \end{cases}$$



§2.8 液体的相对平衡

二、等角速旋转容器中液体的相对平衡（续）

质量力　$f_x=\omega^2 r\cos\alpha=\omega^2 x$　　$f_y=\omega^2 r\sin\alpha=\omega^2 y$　　$f_z=-g$



1. 等压面方程

$$dp=\omega^2 xdx+\omega^2 ydy-gdz=0$$

$\Downarrow$ 积分

$$\frac{\omega^2x^2}{2}+\frac{\omega^2y^2}{2}-gz=C \qquad \boxed{\frac{\omega^2r^2}{2}-gz=C}$$

等压面是一簇绕z轴的旋转抛物面。

自由液面：　$x=0\quad z=0$　　$C=0$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{\omega^2r^2}{2}-gz_s=C}$$

§ 2.8 液体的相对平衡

二、等角速旋转容器中液体的相对平衡（续）

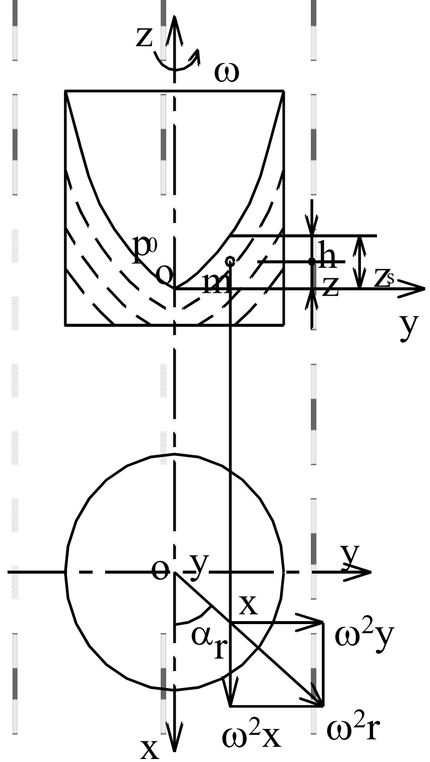
2. 静压强分布规律

$$dp = \rho(\omega^2 xdx + \omega^2 ydy - gdz)$$

$\Downarrow$ 积分

$$p = \rho(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz) + C$$

$$p = \rho g(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z) + C$$



利用边界条件:

$x = 0 \quad z = 0 \qquad p = p_0$

得: $C = p_0$

$$p = p_0 + \rho g(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z)$$

$\Downarrow$ $\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz_s = C$

$$\boxed{p = p_0 + \rho g(z_s - z) = p_0 + \rho gh}$$

§2.8 液体的相对平衡

二、等角速旋转容器中液体的相对平衡（续）

3. 与绝对静止情况比较

（1）等压面

绝对静止： $z = c$ 水平面

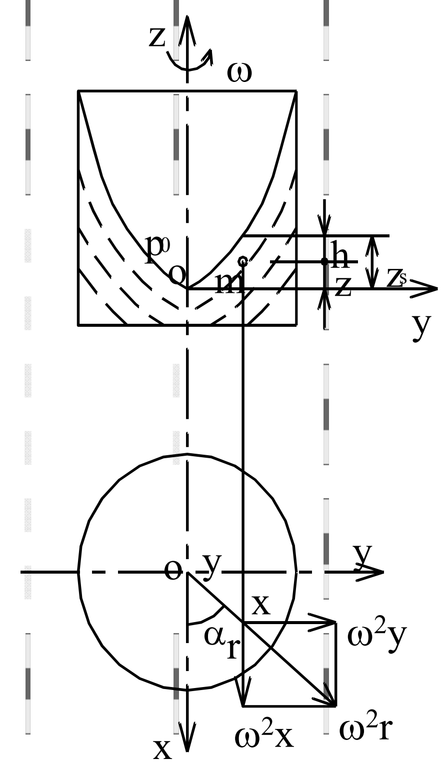
相对静止： $\dfrac{\omega^2 r^2}{2} - gz = C$ 旋转抛物面

（2）压强分布

绝对静止： $p = p_0 + \rho g h$

相对静止： $p = p_0 + \rho g(z_s - z) = p_0 + \rho g h$

h－任一点距离自由液面的淹深



§2-8 液体的相对平衡

定义：

若盛液体的容器或机件对地面上的固定坐标系有相对运动，但液体质点彼此之间却没有相对运动，这种运动状态称为相对平衡。

除了重力场的流体平衡问题外，工程上常见的有如下两种：

一、等加速直线运动中液体的平衡

§2-8　等加速运动液体的相对静止

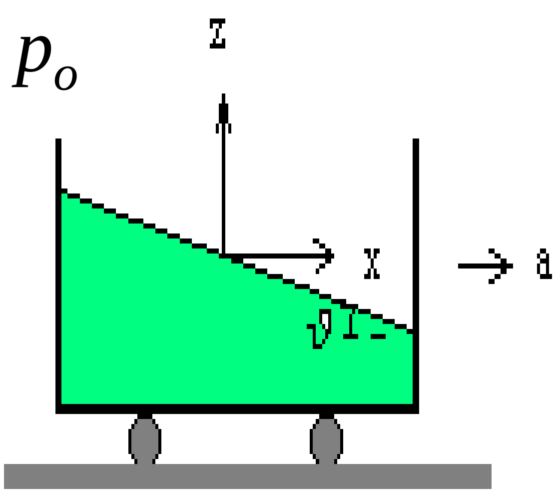
- 1．液体随容器作等加速直线运动

$f_x=-a \quad f_z=-g \qquad dp=\rho(-a\,dx-g\,dz)$

等压面方程: $dp=0$,　即：$a\,dx+g\,dz=0$

积分得:　$z=-ax/g+c$

在坐标原点，压强为p_o, 所以$C=p_o$



自由面是等压面:　$z_0=-ax/g$

压强分布: $p=\rho(-ax-gz)+p_0$

$=p_o+\rho g(z_o-z)$

问题：

1. θ＝？

   $tag\,\theta = a/g$

2. 等压面？

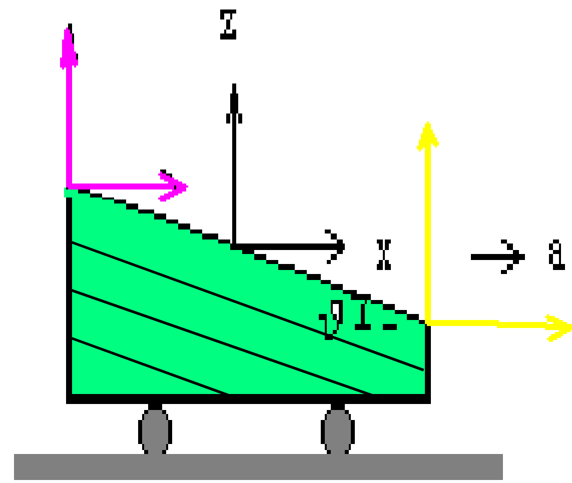
3. 液体对底板压力＝？

   $F = \rho g V$

4. 液体前后侧板压力＝？

   $F = \int \rho g\,(z_o - z)\,dA$

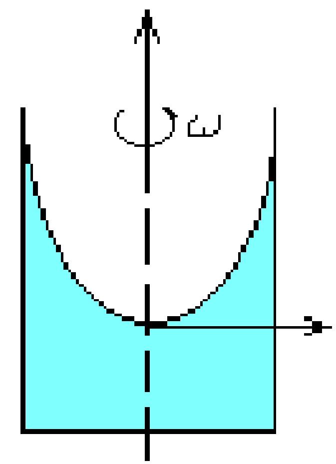
   $= \int \rho g B z dz \quad (x=0)$



压强分布: $p = \rho(-ax - gz) + p_0$

$= p_o + \rho g(z_o - z)$

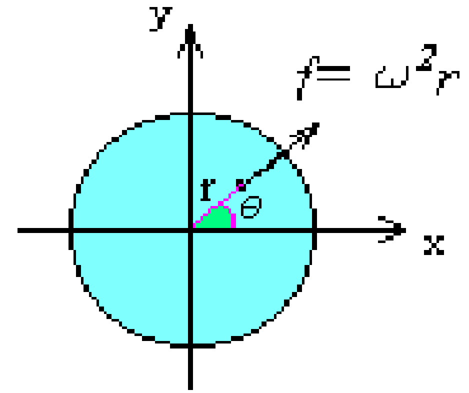
2. 液体随容器作等角速度旋转运动



$f_y = \omega^2 r\sin\theta = \omega^2 y$

$f_x = \omega^2 r\cos\theta = \omega^2 x$

$f_z = -g$



$dp = \rho\,(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g\,d\,z)$

等压面方程： $\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g\,d\,z = 0$

积分得： $\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) - gz = c$

或 $\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz = c$ 为 旋转抛物面

- 自由面方程： $z_0 = \frac{1}{2g}\omega^2 r^2$

- 压强分布：

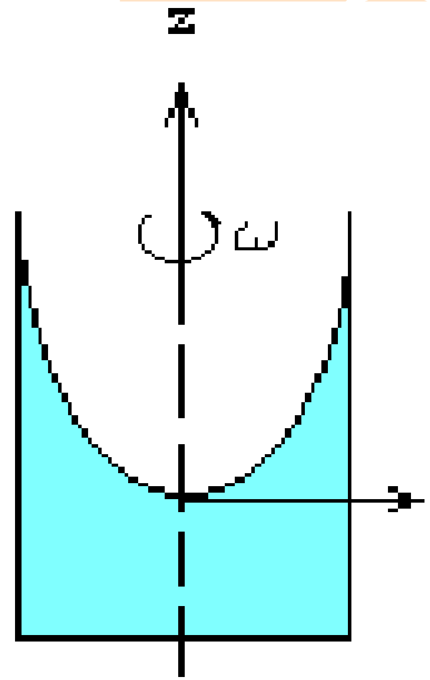
$$p = \rho(\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz) + p_0$$

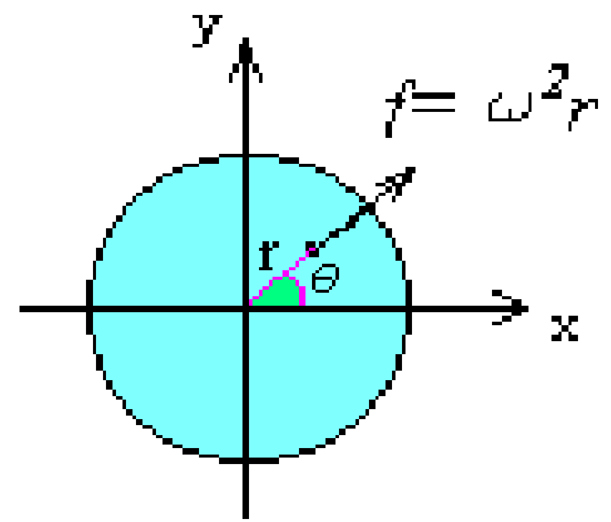
$$= \rho g(\frac{1}{2g}\omega^2 r^2 - z) + p_0$$

$$= p_0 + \rho g(z_0 - z)$$

$$p - p_o = \rho g(z_o - z) = \rho gh$$

- 淹深h从自由面算起





相对平衡流体质点上的质量力有

- 与加速度方向相反的虚构惯性力；
- 重力。

由图示可得单位质量分力为

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 0 \\ f_y &= a\cos\alpha \\ f_z &= a\sin\alpha - g \end{aligned}\right\}$$

1、等压面方程

将（2—35）式代入（2—20）式可得

$$a\cos\alpha dy+(a\sin\alpha-g)dz=0 \qquad (2—36)$$

即

$$\frac{dz}{dy}=\frac{a\cos\alpha}{g-a\sin\alpha}=\tan\beta$$

积分上式得

$$a\cos\alpha y+(a\sin\alpha-g)z=c \qquad (2—37)$$

因$\alpha, g.a$都是常数，故β是一定值。

说明：

等压面（包括自由表面）是与水平基面成倾角β 的一族平行平面，这族平面应与单位质量力$\overrightarrow{f_m}$相垂直。

2、静压强分布规律

将（2—35）式代入（2—15）式中即得

$$dp = \rho\left[a\cos\alpha dy + (a\sin\alpha - g)dz\right]$$

作不定积分得

$$p = \rho\left[ay\cos\alpha + z(a\sin\alpha - g)\right] + C$$

根据边界条件 $y = 0, z = 0, p = p_0$

$$p = p_0 + \rho\left[ay\cos\alpha + z(a\sin\alpha - g)\right] \qquad （2—38）$$

当$\alpha = 0$或 $\dfrac{\pi}{2}$ 时，即可得出容器水平或垂直匀加速直线运动。如图（2—13）所示。

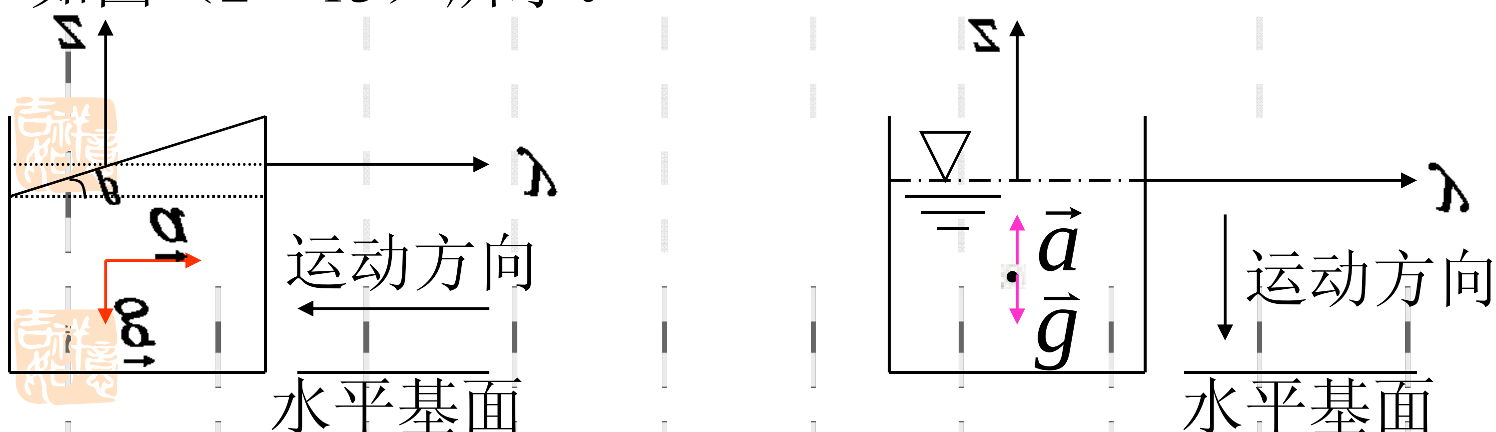


图 2—13 容器匀加速直线运动的两种特例

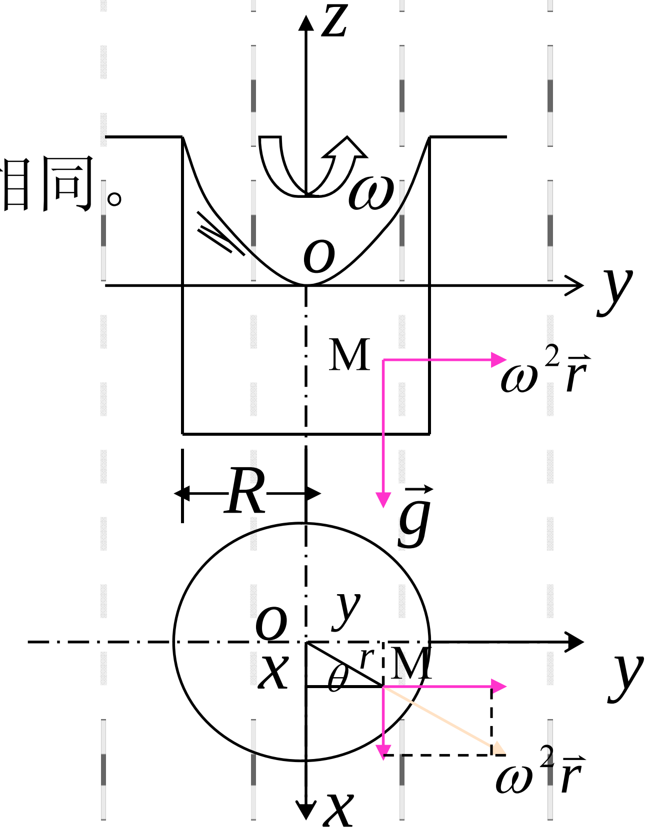
二、 容器作等角速回转运动

如图所示，盛有液体的容器绕铅直轴z作回转运动，待运动稳定后，液体形成如图所示的自由表面，质点之间不再有相对运动。

与容器作匀加速直线运动分析相同。

单位质量分力为：

$$\left.\begin{aligned} f_x &= \omega^2 r\cos\theta = \omega^2 x \\ f_y &= \omega^2 r\sin\theta = \omega^2 y \\ f_z &= -g \end{aligned}\right\}$$



图容器作等角速回转运动

1、等压面方程

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0$$

作不定积分得

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz = c$$

即

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = c$$

说明:

等压面是一族绕 z 轴的旋转抛物面。

2、静压强分布规律

$$dp = \rho\left(\omega^2 xdx + \omega^2 ydy - gdz\right)$$

作不定积分，则

$$p = \rho\left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - zg\right) + c$$

$$= \rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - zg\right) + c$$

式中积分常数可以根据如下三种情况来确定。

（1）密封容器，液面上的压强为 p_0。（如图a）

边界条件$r = 0, z = 0, p = p_0$

$$p = p_0 + \rho g\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z\right)$$

（2）容器盛满液体，顶盖中心接触大气。（如图b）

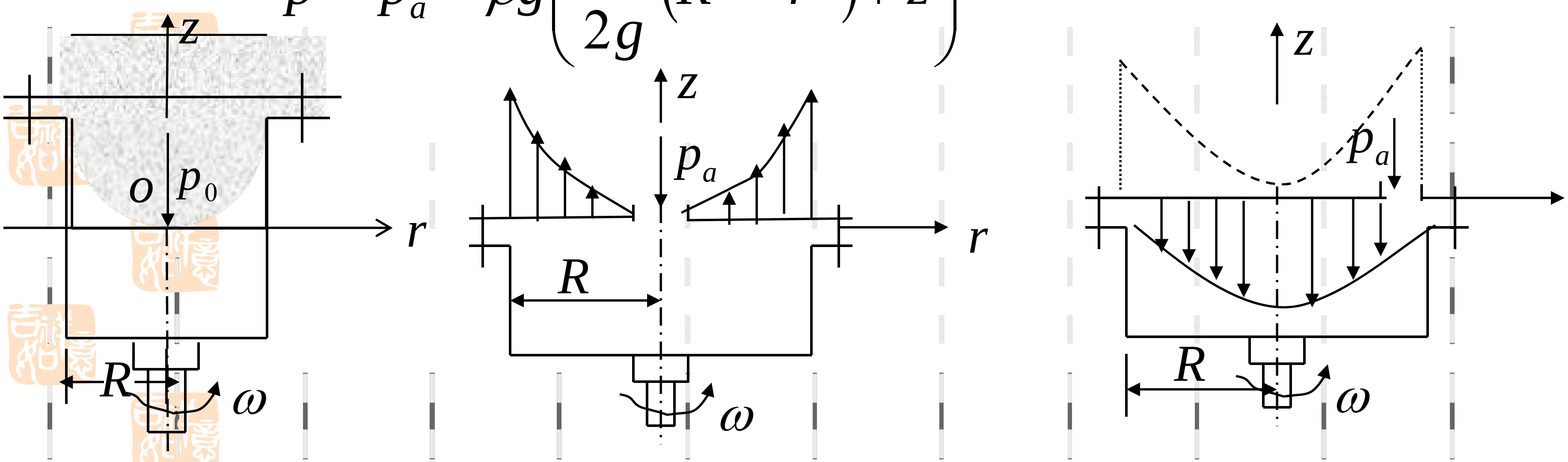
边界条件$r=0, z=0, p=p_a$

$$p = p_a + \rho g\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z\right)$$

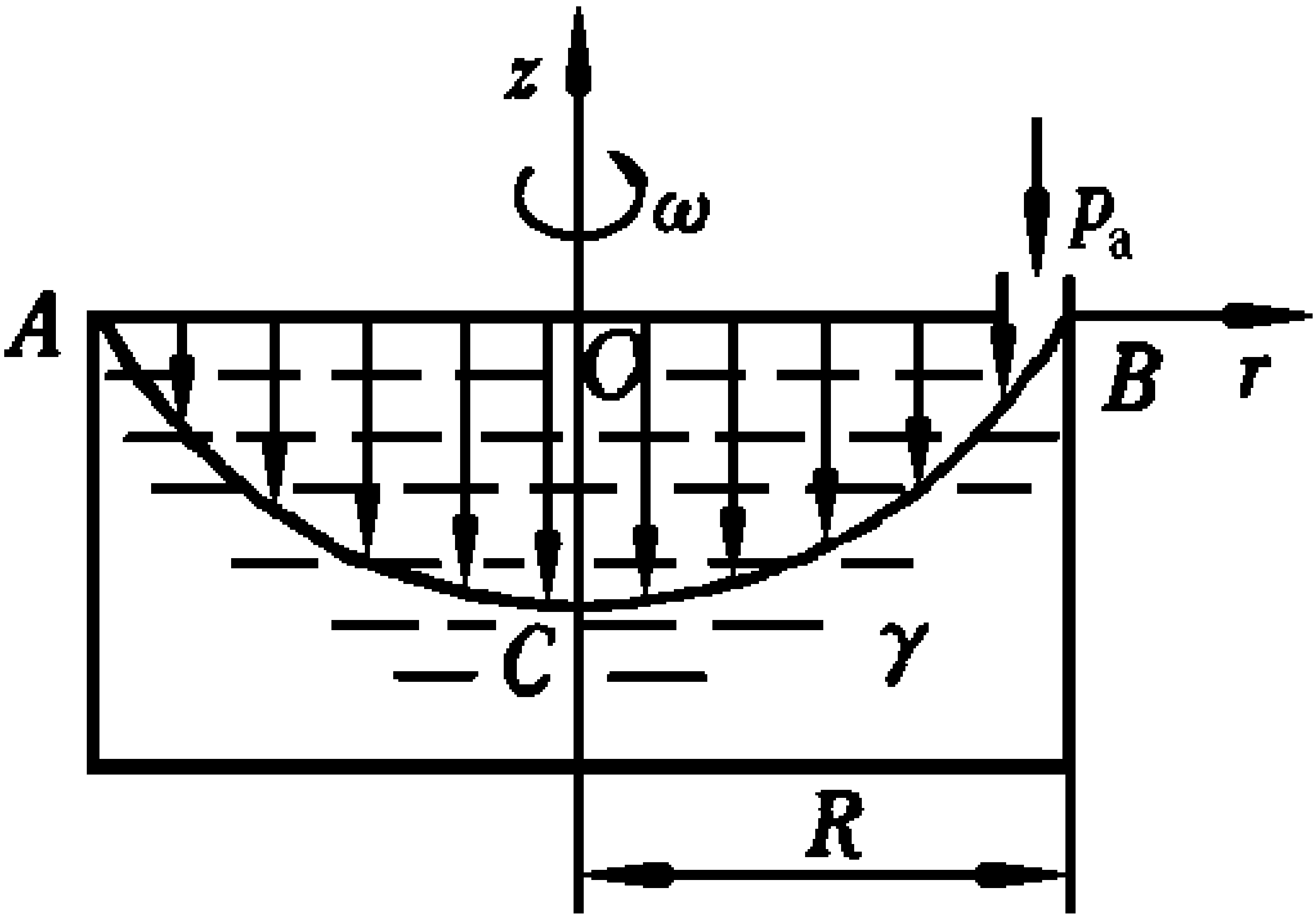
（3）容器盛满液体，顶盖边缘接触大气。（如图c）

边界条件 $r=R, z=0, p=p_a$

$$p = p_a - \rho g\left(\frac{\omega^2}{2g}\left(R^2 - r^2\right) + z\right)$$



图a密封容器　　图b顶盖中心开口容器　　图c顶盖边缘开口容器

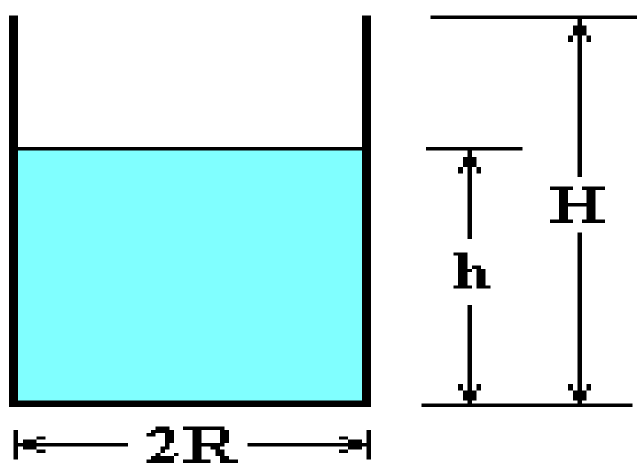

z
ω
p_a
A
O
B
r
C
γ
R

- 例题

- 一个圆桶，底面半径R=0.1m，高H=0.3m,内盛深h=0.2m 的液体，若使桶和液体以角速度 ω旋转.

求:1.液体开始被抛出所需的 ω;

2. 当液面最低点降至圆筒底面时所需的 ω.



解

1. 旋转抛物面所围的体积等于同高圆柱体体积的一半.

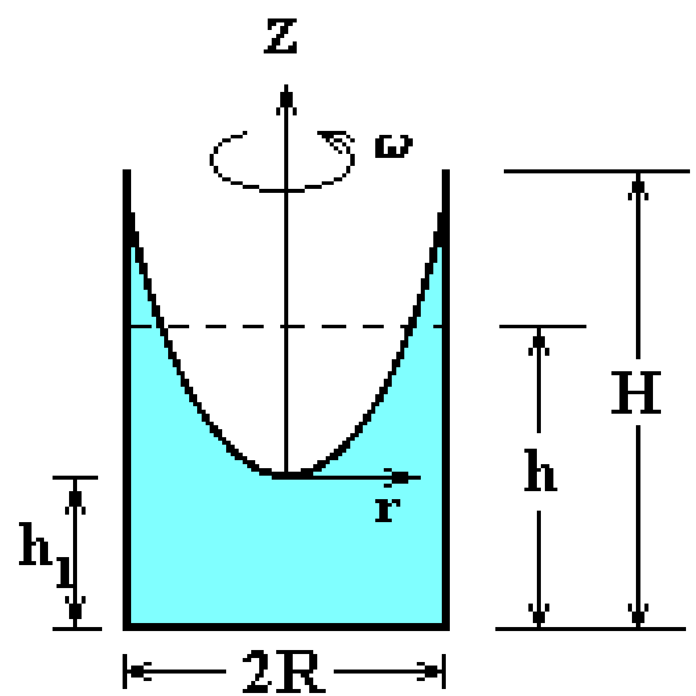
$$0.5(H-h_1)A=(H-h)A$$

式中, A为桶的底面积. 得 h_1=0.1m

$$z=\frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

当$z=H-h_1$=0.2m时,$r=R$=0.1m

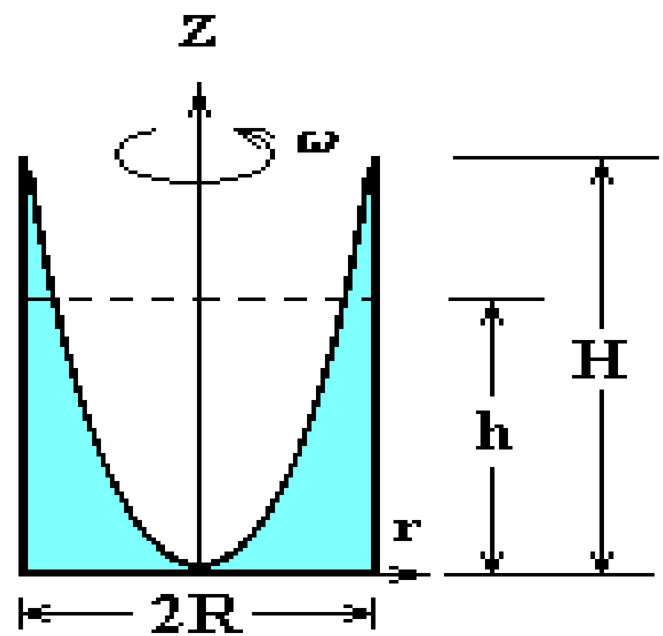
$$\omega=\frac{\sqrt{2gz}}{R}=19.805 rad/s$$



解

2.当液面最低点降至圆筒底面时,
$z=H=0.3\text{m}, r=R=0.1\text{m}$

$$\omega=\frac{\sqrt{2gH}}{R}=24.256rad/s$$



第二章　习　题

2—1　封闭容器中盛有比重为0.8的油，$h_1 = 300\text{mm}$，下面为水，$h_2 = 500\text{mm}$，测压管中汞液面读数 $h = 400\text{mm}$，求容器中液面压强 p。

解：此题的关键要把油水产生的压强分别计算后相加。

解题应先从已知条件开始计算，而且大气压力自相平衡，

故通常采用相对压强计算。

$$p_a = 0$$

$$p_b = p_a + \gamma_{汞} h$$

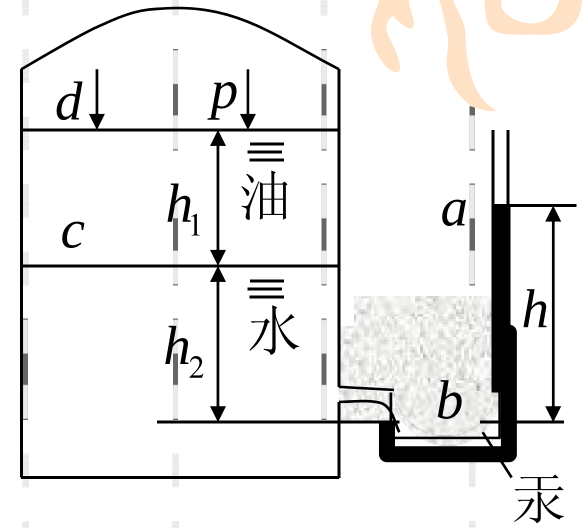
$$p_c = p_b - \gamma_{水} h_2$$

$$p_d = p_c - \gamma_{油} h_1$$

$$\therefore p = p_{d_1} = \gamma_{汞} h - \gamma_{水} h_2 - \gamma_{油} h_1$$

$$= 133.4 \times 0.4 - 9.81 \times 0.5 - 9.81 \times 0.8 \times 0.3$$

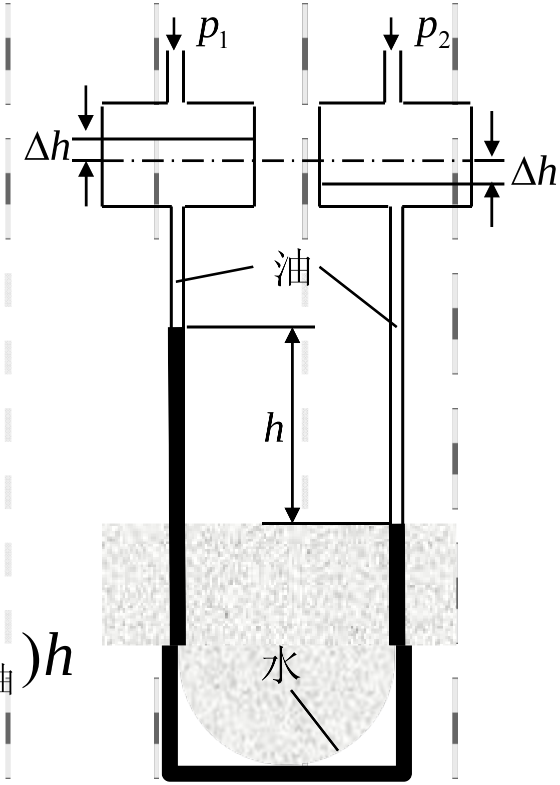
$$= 46.1 \text{ KN/m}^2$$



2—1题　附图

2—2 杯式微压计，上部盛油，$\gamma_{油}=9.0\ \mathrm{KN/m^3}$，下部为水，圆杯直径 $D=40\mathrm{mm}$，圆管直径 $d=4\mathrm{mm}$，若接入压力 $p_2-p_1=10\mathrm{mm}$ 水柱时，水位差 h 应为多少?

解：此题要点为左右两杯中液面变化值均为Δh，且增加和减少的液体体积等于管内水面差形成的体积。



题2—2 附图

即：
$$2\Delta h\frac{\pi}{4}D^2=h\frac{\pi}{4}d^2$$

$$\Delta h=\frac{hd^2}{2D^2}=0.005h$$

对等压面分别求压强并令其相等

$$p_1+2\Delta h\gamma_{油}+\gamma_{水}h=p_2+\gamma_{油}h$$

$$p_2-p_1=\gamma_{水}h-\gamma_{油}(h-2\Delta h)=(\gamma_{水}—0.99\gamma_{油})h$$

$$h=\frac{10\times9.81}{9.81-0.99\times9}=109\mathrm{mm}$$

利用微压计放大了原压差值近11倍，提高了测量精度。

2—3 矩形闸门AB,宽1.0 m , 左侧油深 $h_1=1\text{m}$， 水深$h_2=2\text{m}$, $\gamma_{油}=7.84\text{KN/m}^3$， 闸门倾角 $\alpha=60^o$， 求闸门上液体总压力及作用点位置。

解： 设闸门上油水分界点为E点，总压力的作用点为D点，为了便于求作用点位置，将液体总压力P分解为P_1 ，P_2 ，P_3 三部分。闸门与油和水接触的面积分别为F_{AE} 和 F_{EB} 。

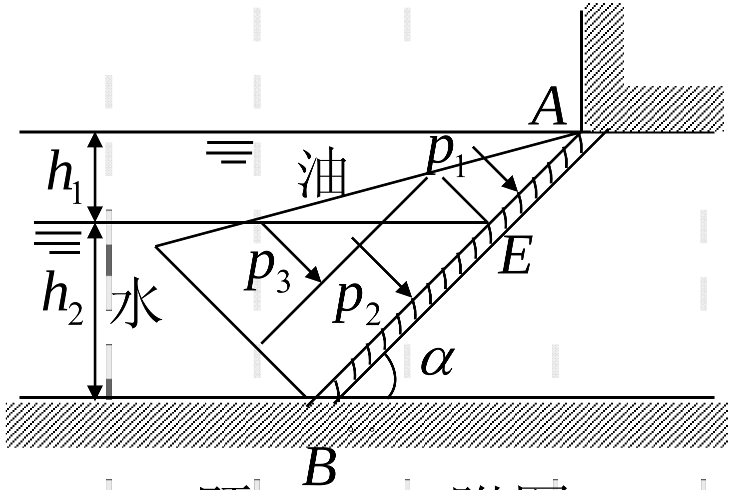
$$F_{AE}=\frac{h_1}{\sin\alpha}=\frac{1}{0.866}=1.155\ \text{m}^2$$

$$F_{EB}=\frac{h_2}{\sin\alpha}=\frac{2}{0.866}=2.310\ \text{m}^2$$

$$p_E=\gamma_{油}h_1=7.84\ \text{KN/m}^2\ ,\ p_B=p_E+\gamma_{水}h_2=27.46\ \text{KN/m}^2$$

$$P_1=\frac{1}{2}p_EF_{AE}=4.53\text{KN}\ ,\ P_2=p_EF_{EB}=18.11\ \text{KN}$$

$$P_3=\frac{P_B-P_E}{2}F_{EB}=22.66\ \text{KN}\ ,\ P=P_1+P_2+P_3=45.3\ \text{KN}$$



题2—3 附图

求作用点时，用力矩平衡方程，即三个分力对某点取矩等于总压力对同一点取矩。

$$Py_D = [P_1 \frac{2}{3}h_1 + P_2(h_1 + \frac{h_2}{2}) + P_3(h_1 + \frac{2}{3}h_2)]\frac{1}{\sin\alpha}$$

代入数据并解得 $y_D = 2.348\ \text{m}$

$$h_D = y_D \sin\alpha = 2.033\ \text{m}$$

2—4 曲面形状为3/4个圆柱，半径 r＝0.8 m， 宽度为 1m，位于水面下 h=2.4 m 深处。求曲面所受的液体总压力。

解：对曲面求总压力应分别求水平分力和垂直分力，然后再合成。

1、水平总压力，*bc* 和 *dc* 面上总水平压力方向相反，互相抵消，曲面 *ab* 上的总压力方向向右，其值为

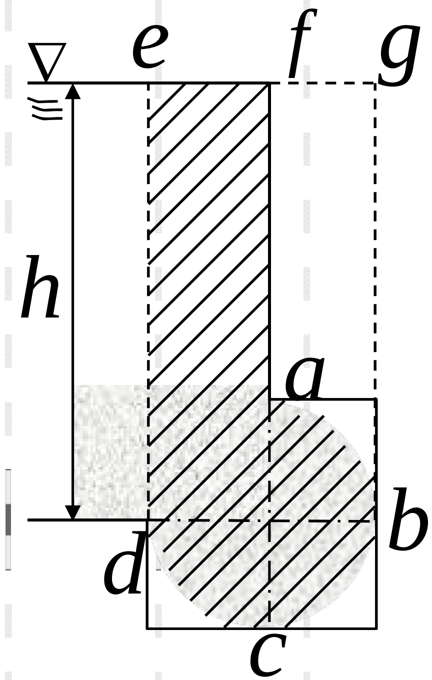
$$P_x = \gamma(h - \frac{r}{2})r = 9.81(2.4 - 0.4)0.8 = 15.7\ \text{KN}$$

2、垂直总压力 求垂直总压力时应把虚、实压力体的概念理解清楚，曲面 *ab* 上的压力体为 *abgf*，方向向上；

bc 上的压力体为 *cbgf*，方向向上；

cd 上的压力体为 *dcef*，方向向下；

代数相加后总压力体如图中阴影所示，作用方向向下，其值为 $P_z = \gamma(h_r + \frac{3}{4}\pi r^2) = 33.63\ \text{KN}$



题2—4　附图

3、总压力　$P=\sqrt{P_z^2+P_x^2}=\sqrt{33.63^2+15.7^2}=37.15\ \text{KN}$

4、总压力P与水平方向的夹角

$$\theta=\arctan\frac{P_z}{P_x}=\arctan\frac{33.63}{15.7}=65^o$$

2—5 一盛水容器（矩形敞口），沿 $\alpha = 30^o$斜面向上作加速运动，加速度 $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$，求液面与壁面夹角 θ 。

解： 由全微分方程

$$dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz)$$

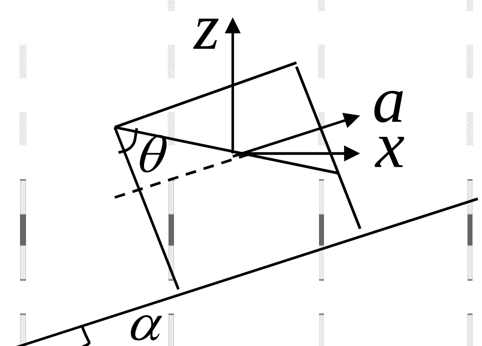
式中 $f_x = -a\cos\alpha$ ， $f_y = 0$ ， $f_z = -a\sin\alpha + g$

代入全微分方程并积分，得

$$p = -\rho(a\cos\alpha \cdot x + gz + a\sin\alpha\ z) + c\ ,$$

当 $x = 0$ ，$z = 0$ 时 ，$p = 0$ (相对压强），$c = 0$

液体表面方程 $p = 0$ ，$a\cos\alpha \cdot x = -(gz + a\sin\alpha\ z)$



题 2—5 附图

$$z=\frac{xa\cos\alpha}{-g-a\sin\alpha}$$，由几何关系 $x=-\dfrac{l}{2\cos\alpha}$，代入得

$$z=\frac{al}{2(g+a\sin\alpha)}$$，

$$\tan\theta=\frac{\frac{l}{2}}{z+\frac{l}{2}\tan\alpha}=\frac{1}{\frac{a}{g+a\sin\alpha}+\tan\alpha}=52.7^{o}$$

2—6 一旋转容器（圆柱形），装部分水，若已知 D=300 mm，H=500 mm，h=300 mm，求转速 n 为多少时，水面恰好达到容器的上缘？

解：这类求旋转相对平衡问题时，应知道形成的旋转抛物面所围成的体积是其外接圆柱形体积的一半这个知识点。

设形成抛物面后，顶点到容器顶高度为 z

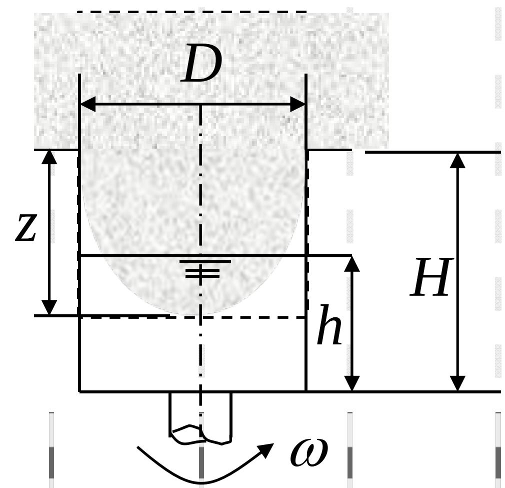
$$\frac{1}{2}\frac{\pi D^2}{4}z=\frac{\pi D^2}{4}(H-h)\ ,\ z=2(H-h)=400\ \text{mm}$$

抛物面的自由表面方程 $z=\dfrac{V^2}{2g}$

$$V=\sqrt{2gz}=2.8\ \text{m/s}$$

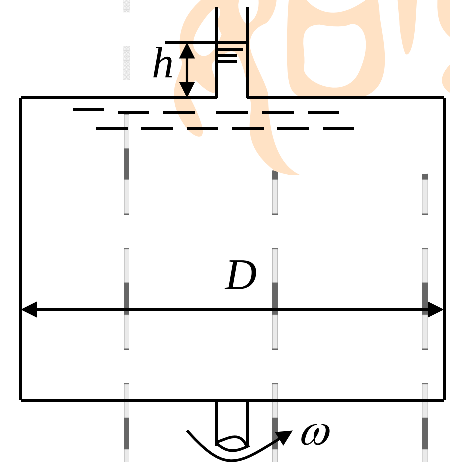
$$\omega=\frac{V}{r}=18.68\ 1/\text{s}$$

$$n=\frac{60\omega}{2\pi}=178.4\ \text{r/min}$$



题 2—6 附图

2—7 一圆柱容器装满水，顶盖中心装敞口测压管，当以ω旋转时，顶盖受到多大的向上液体总压力？



题 2—7 附图

解：液体对顶盖上的压强可由全微分方程

$$dp=\rho(f_x dx+f_y dy+f_z dz)$$ 确定。

式中 $f_x=\omega^2 x$，$f_y=\omega^2 y$，$f_z=-g$

代入并积分得

$$p=\rho(\frac{\omega^2 r^2}{2}-gz)+c$$，当 $z=0$，$r=0$ 时，$p=\gamma h=c$

因顶盖上各点 z 均为零，故顶盖上压强分布规律为

$$p=\gamma(\frac{\omega^2 r^2}{2g}+h)$$

顶盖上压强随 r 变化，可积分求之

$$P=\int_0^{\frac{D}{2}} p\cdot 2\pi r dr$$

$$=\int_0^{\frac{D}{2}} \gamma\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g}+h\right)2\pi r dr$$

$$=\gamma\frac{\pi\omega^2 D^4}{64g}+\gamma\frac{\pi D^2}{4}h$$

本章结束