科学计算与数学建模

小行星轨道方程计算问题

——线性方程组求解的直接法

中南大学数学与统计学院

第五章 小行星轨道方程计算问题

——线性方程组求解的直接法

5.1 小行星轨道方程问题

5.1.1 问题的引入

- 一天文学家要确定一颗小行星绕太阳运行的轨道，他在轨道平面内建立以太阳为原点的直角坐标系，其单位为天文测量单位，在5个不同的时间对小行星作了5次观察，测得轨道上的5个点的坐标数据如下表：

  - 表 5.1.1 轨道上的5个点的坐标数据

	1	2	3	4	5
x	5.764	6.286	6.759	7.168	7.408
y	0.648	1.202	1.823	2.526	3.360

  - 试确立小行星的轨道方程，并画出小行星的运动轨线图形。

5.1.2 模型的分析

- 由开普勒第一定律知，小行星轨道为一椭圆，设椭圆的一般方程为：$a_1x^2+2a_2xy+a_3y^2+2a_4x+2a_5y+1=0$，需要确定系数 a_i， $i=1,2,3,4,5;$

  利用已知的数据，不妨设$(x_i \quad y_i)$ $\quad i=1,2,3,4,5;$ 欲确定系数 a_i 等价于求解一个线性方程组：

$$\begin{cases} a_1x_1^2+2a_2x_1y_1+a_3y_1^2+2a_4x_1+2a_5y_1+1=0 \\ a_1x_2^2+2a_2x_2y_2+a_3y_2^2+2a_4x_2+2a_5y_2+1=0 \\ a_1x_3^2+2a_2x_3y_3+a_3y_3^2+2a_4x_3+2a_5y_3+1=0 \\ a_1x_4^2+2a_2x_4y_4+a_3y_4^2+2a_4x_4+2a_5y_4+1=0 \\ a_1x_5^2+2a_2x_5y_5+a_3y_5^2+2a_4x_5+2a_5y_5+1=0 \end{cases}$$

可写成矩阵的形式：

$$AX=b$$

❖ 其中，

$$A=\begin{bmatrix} x_1^2 & 2x_1y_1 & y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 \\ x_2^2 & 2x_2y_2 & y_2^2 & 2x_2 & 2y_2 \\ x_3^2 & 2x_3y_3 & y_3^2 & 2x_3 & 2y_3 \\ x_4^2 & 2x_4y_4 & y_4^2 & 2x_4 & 2y_4 \\ x_5^2 & 2x_5y_5 & y_5^2 & 2x_5 & 2y_5 \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5.1.3 模型的假设

- 假设：
  - (1)小行星轨道方程满足开普勒第一定律；
  - (2)以上所测得数据真实有效。

5.1.3 模型的建立

- 该问题的模型为：

$$\begin{bmatrix} 33.2237 & 7.4701 & 0.4199 & 11.5280 & 1.2960 \\ 39.5138 & 15.1115 & 1.4448 & 12.5720 & 2.4040 \\ 45.6841 & 24.6433 & 3.3233 & 13.5180 & 3.6460 \\ 51.3802 & 36.2127 & 6.3807 & 14.3360 & 5.0520 \\ 54.8785 & 49.7818 & 11.2896 & 14.8160 & 6.7200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

可见，解答上述问题就是对线性方程进行求解。

5.2 线性方程组直接解法概述

- 直接法：利用一系列递推公式计算有限步，能直接得到方程组的精确解。当然，实际计算结果仍有误差，譬如舍入误差。舍入误差的积累有时甚至会严重影响解的精度
- 求解线性方程组最基本的一种直接法是消去法。这是一个众所周知的古老方法，但用在现代电子计算机上仍然十分有效。
- 消去法的基本思想是，通过将一个方程乘或除以某个常数，以及将将一个方程乘或除以某个常数与另一个方程相加减这两种手续，逐步减少方程中的变元的数目，最终使每个方程仅含一个变元，从而得出所求的解。
- 其中高斯消去法是广泛应用的方法，其求解过程分为消元过程和回代过程两个环节。消元过程将所给的方程组加工成上三角方程组。所归结的方程组再通过回代过程得出它的解。高斯消去法由于添加了回代的过程，算法结构稍复杂，但这种算法的改进明显减少了计算量。
- 直接法比较适用于中小型方程组。对高阶方程组，即使系数矩阵是稀疏的，但在运算中很难保持稀疏性，因而有存储量大、程序复杂等不足。

5.3 直接解法

5.3.1 高斯消去法

❖ $Gauss$ 消去法是一个古老的求解线性方程组的方法。由它改进的选主元法是目前计算机上常用的有效的求解低阶稠密矩阵线性方程组的方法。

例 5.3.1 用$Gauss$ 消去法解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 & (5.3.1) \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = \frac{1}{2} & (5.3.2) \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = \frac{5}{2} & (5.3.3) \end{cases}$$

❖解：第 1 步，$(5.3.1)\times(-\frac{3}{2})$ 加到 $(5.3.2)$，$(5.3.1)\times(-\frac{1}{2})$ 加到 $(5.3.3)$，得等价方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 & \\ -x_2 + x_3 = -1 & (5.3.4) \\ 2x_2 + 8x_3 = 2 & (5.3.5) \end{cases}$$

第 2 步，$(5.3.4)\times 2$ 加到 $(5.3.5)$ 得等价的方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 & \\ -x_2 + x_3 = -1 & \\ 10x_3 = 0 & (5.3.6) \end{cases}$$

第 3 步，回代法求解（5.3.6）即可求得该方程组的解为：

$$x_3 = 0,\quad x_2 = 1,\quad x_1 = -\tfrac{1}{2}.$$

用矩阵法描述的约化过程即为：

$$[A,b]=\begin{bmatrix}2&2&2&1\\3&2&4&1/2\\1&3&9&5/2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1\times(-\frac{3}{2})+r_2\Rightarrow r_2\\ r_1\times(-\frac{1}{2})+r_3\Rightarrow r_3}]{(1)}\begin{bmatrix}2&2&2&1\\0&-1&1&-1\\0&2&8&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times 2+r_3\Rightarrow r_3]{(2)}\begin{bmatrix}2&2&2&1\\0&-1&1&-1\\0&0&10&0\end{bmatrix}$$

❖ 这种求解过程称为具有回代的高斯消去法。

❖ 此例可见Gauss消去法的基本思想是：用矩阵A的初等行变换将系数矩阵化为具有简单形式的矩阵（如上三角阵，单位矩阵等），而三角形方程组是很容易回代求解的。

一般的，设有 n 个未知数的线性方程组为：

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots \ a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
\tag{5.3.7}
$$

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ ，$X=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$，$b=(b_1,b_2,\cdots b_n)^T$，则 $(5.3.7)$ 化为：

$AX=b$，为方便，$A=A^{(1)}=(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$，$b=b^{(1)}=(b_1^{(1)},b_2^{(1)},\cdots\ b_n^{(1)})^T$， $\det A\neq 0$

则消去法为：

第1步：$a_{11}^{(1)}\neq 0$，计算 $m_{i1}=\dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}(i=2,3,4\cdots\ n)$， 用 $(-m_{i1})$ 乘 $(5.3.7)$ 的第一方程加到第 i 个方程中去（$i=2,3,\cdots\ n$）。（即实行 行的初等变换）

$R_i-m_{i1}\bullet R_1\to R_i(i=2,3,\cdots n)$ ，消去第2到第n个方程中的未知数 x_1，得与 $(5.3.7)$ 等价方程组：

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{in}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & \cdots & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix} \qquad (5.3.8)$$

记为：$A^{(2)}X=b^{(2)}$ 其中（5.3.8）式中元素 $a_{ij}^{(2)}$为进一步需要计算的元素，公式为：

$$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-m_{i1}a_{1j}^{(1)},(i,j=2,3\cdots n)，\quad b_i^{(2)}=b_i^{(1)}-m_{i1}b_1^{(1)},i=2,3,\cdots n$$

❖第 k ，$k=1,2,\cdots n-1$ 步，继续上述过程消元。设第1步到第 $k-1$ 步计算已完成，得到与原方程组等价的方程组：

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{bmatrix} \qquad (5.3.9)$$

记为 $A^{(K)}X=b^{((k)}$ ，下面进行第 k 步消元法：

❖ 设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$，计算乘数 $m_{ik} = a_{ik}^{(k)} \big/ a_{kk}^{(k)} \quad (k = k+1, \cdots\ n)$,

❖ 用 $-m_{ik}$ 乘 (5.3.9) 中第 k 个方程加到第i $(i = k+1, \cdots, n)$, 个方程消去 (5.3.9)中第 i个方程 $(i = k+1, \cdots, n)$的未知数 x_k

得到与原方程组等价的方程组：

$$
\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & & & a_{1n}^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & \cdots & & & a_{2n}^{(2)} \\
 & & \ddots & & & \\
 & & & a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} \cdots & a_{kn}^{(k)} \\
 & & & & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} \\
 & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & a_{n,k+1}^{(k+1)} \quad \cdots & a_{n,n}^{(k+1)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ b_{k+1}^{(k+1)} \\ \vdots \\ b_n^{(k+1)} \end{bmatrix}
\tag{5.3.10}
$$

- 记为$A^{(k+1)}X=b^{(k+1)}$ 其中 $A^{(k+1)},b^{(k+1)}$中元素计算公式为：

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-m_{ik}a_{kj}^{(k)} \quad (i,j=k+1,\cdots,n) \\ b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-m_{ik}b_k^{(k)} \quad (i=k+1,\cdots,n) \\ A^{(k+1)}\text{与}A^{(k)}\text{前}k\text{行元素相同，}b^{(k+1)}\text{与}b^{(k)}\text{前}k\text{个元素相同} \end{cases} \tag{5.3.11}$$

最后，重复上述过程，即 $k=1,2,3,\cdots,n-1$; 且设 $a_{kk}^{(k)}\neq 0(k=1,2,\cdots,n-1)$, 共完成 $n-1$ 步消元计算，得到与(5.3.7)等价的三角形方程组。

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix} \tag{5.3.12}$$

再用回代法求解(5.3.12)的解，计算公式为：

$$\begin{cases} x_n = b^{(n)} \big/ a_{nn}^{(n)} \\ x_i = \left(b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j\right) \Big/ a_{ii}^{(i)}, (i = n-1, n-2, \cdots 1) \end{cases} \tag{5.3.13}$$

元素 $a_{kk}^{(k)}$ 称为约化的主元素。将(5.3.7)化为(5.3.12)的过程称为消元过程。

由消元过程和回代过程求解线性方程组的方法称为Gauss 消去法。(5.3.12)的求解过程(5.3.13)称为回代过程。

❖ 定理（Gauss消去法）设 $AX=b, A\in R^{n\times n}$。若约化的主元素 $a_{kk}^{(k)}\neq 0, k=1,2\cdots n$ 则可通过Gauss消去法（不进行两行的初等变换—两行交换位置）将方程组化为等价的三角形方程组(5.3.12)。消元和求解的计算公式为：

1、消元计算

$$\begin{cases} m_{ik}=a_{ik}^{(k)}\big/a_{kk}^{(k)} \quad (i=k+1,\cdots n) \\ a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-m_{ik}a_{kj}^{(k)} \quad (i,j=k+1,\cdots n) \\ b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-m_{ik}b_k^{(k)} \quad (i=k+1,\cdots n) \end{cases} ,k=1,2\cdots n-1$$

2、回代计算

$$\begin{cases} x_n=b^{(n)}\big/a_{nn}^{(n)} \\ x_i=\left(b_i^{(i)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}^{(i)}x_j\right)\Big/a_{ii}^{(i)} ,(i=n-1,n-2,\cdots 1) \end{cases}$$

5.3.2 矩阵的三角分解

- 下面用矩阵理论进一步来分析 Gauss消去法，设约化主元素 $a_{kk}^{(k)} \neq 0 (k = 1, 2 \cdots n-1)$，由于对 A 实行的初等变换相当于用初等矩阵左乘A 于是，*Gauss* 消去法第1步：$A^{(1)}X = b^{(1)} \to A^{(2)}X = b^{(2)}$，则有：
- $$L_1 A^{(1)} = A^{(2)} \quad L_1 b^{(1)} = b^{(2)}$$
- 其中：
- $$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$（L_1 为初等三角矩阵）

❖ **Gauss消去法第k步消元过程：**

$$A^{(k)}X=b^{(k)}\rightarrow A^{(k+1)}X=b^{(k+1)},$$

❖ 则有

$$L_kA^{(k)}=A^{(k+1)},\quad L_kb^{(k)}=b^{(k+1)},\quad k=1,2,\cdots n-1 \qquad (5.3.14)$$

❖ 其中：

$$L_k=\begin{array}{c}\text{第}k\text{列}\\ \begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & -m_{k+1,k} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -m_{n,k} & & & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$L_k^{-1}=\begin{array}{c} \qquad\qquad\text{第}\,k\,\text{列} \\ \begin{bmatrix}1&&&&&&\\&1&&&&&\\&&\ddots&&&&\\&&&1&&&\\&&&m_{k+1,k}&1&&\\&&&\vdots&&\ddots&\\&&&m_{n,k}&&&1\end{bmatrix}\end{array}$$

利用递推公式则有：

$$L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_2L_1A^{(1)}=A^{(n)}\equiv U,\quad L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_2L_1b^{(1)}=b^{(n)} \qquad (5.3.15)$$

由(5.3.15)得：

$$A=(L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1})U=LU \qquad (5.3.16)$$

❖ 其中

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}, U=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

❖ L为由乘数构成的下三角阵,U为上三角矩阵，(5.3.16) 表明，用矩阵理论来分析Gauss消去法，得到一个重要结果，即在 $a_{kk}^{(k)} \neq 0, (k=1,2\cdots n)$ 条件下Gauss消去法实质上是A将分解成两个三角矩阵的 $A=LU$.

❖ 显然，可由Gauss消去法及行列式性质可知，如果

$$a_{ii}^{(i)} \neq 0(i=1,2\cdots k),$$

❖ 则有 $\det(A_1)=a_{11}^{(1)}\neq 0, \det(A_i)=a_{11}^{(1)}a_{22}^{(2)}\cdots a_{ii}^{(i)}\neq 0(i=2,3\cdots k)$

其中

$$A_1=(a_{11}), A_i=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix}$$

为顺序主子式

❖ 反之，可用归纳法证明：如果A的顺序主子式 A_i 满足：

$$\det(A_i)\neq 0(i=1,2,3\cdots k),$$

❖ 则

$$a_{ii}^{(i)} \neq 0。$$

❖ 定理 5.3.2 （矩阵的三角分解）设$A \in R^{n\times n}$，如果A 的顺序主子式有$\det(A_i) \neq 0 (i=1,\cdots n-1)$，则$A$ 可分解为一个单位下三角矩阵与一个上三角矩阵的乘积，即$A = LU$，且分解是唯一的。

❖ 证明 现仅就 $\det(A_i)\neq 0 (i=1,\cdots n-1)$ 来证明唯一性，存在性上面已证。假若 $A = L_1U_1 = LU$ （5.3.17）

❖ 且对 A 非奇异时考虑，L_1, L 为单位下三角阵，U_1, U 为上三角阵，由假设知U_1^{-1}存在（因为 $\det A \neq 0, L_1$ 可逆，$A=L_1U_1$，故U_1 可逆），从而由(5.3.17）有 $L^{-1}L_1 = UU_1^{-1}$，上式右端为上三角阵，左边为单位下三角阵，因此左右两端应为单位矩阵。故$L_1 = L, U_1 = U$，即分解是唯一的。

❖ 称矩阵的三角分解 $A = LU$为$Doolittle$ （杜利特尔）分解。

其中

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \qquad U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

- 在以上定理条件下，同样可有下面的三角分解：$A = LU$ ，其中L为下三角矩阵，U为单位上三角矩阵，称之为Crout（克劳特）分解。
- 如前例中系数矩阵A的分解为：

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ 3/2 & 1 & \\ 1/2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ & -1 & 1 \\ & & 10 \end{bmatrix}=LU$$

现设 $AX = b$ ，若如分解 $\mathrm{A = LU}$ ，则

$$AX=b \leftrightarrow LUX=b \leftrightarrow (1) LY=b \qquad (2) UX=Y \Rightarrow X$$

而求解这两个三角形方程组是很容易的。

5.3.3 Gauss消去法的计算量

- 定理 5.3.3
- 设A为n阶非奇异矩阵，则用Gauss消去法解 $AX=b$ 所需要的乘除法次数及加减法的次数分别为：

$$(1)\quad MD=n^3/3+n^2-n/3\approx n^3/3$$

$$(2)\quad AS=n(n-1)(2n+5)/6\approx n^3/3$$

- 但如果用 $Gramer$ （克莱姆）法 解 $AX=b$ ，就需要计算 $n+1$ 个n阶行列式，若行列式用子式展开，总共需要 $(n+1)!$ 次乘法，如 $n=10$ 时 $Gauss$ 消去法需要430乘除法，而 克莱姆法 却需要39916800次乘法，由此可见，$Gramer$ 法解方程组的工作量太大，不便于使用。如果计算是在每秒作 10^5 次乘除法计算机上进的，那么用 $Gauss$ 消去法解20阶方程组约需0.03秒即可完成，而用 $Gramer$ 法 大约需 1.3×10^{11} 小时才能完成（大约相当于 10^7 年）可见，$Gramer$ 法 完全不适于在计算机上求解高维方程组。

Thank You !

中南大学数学与统计学院