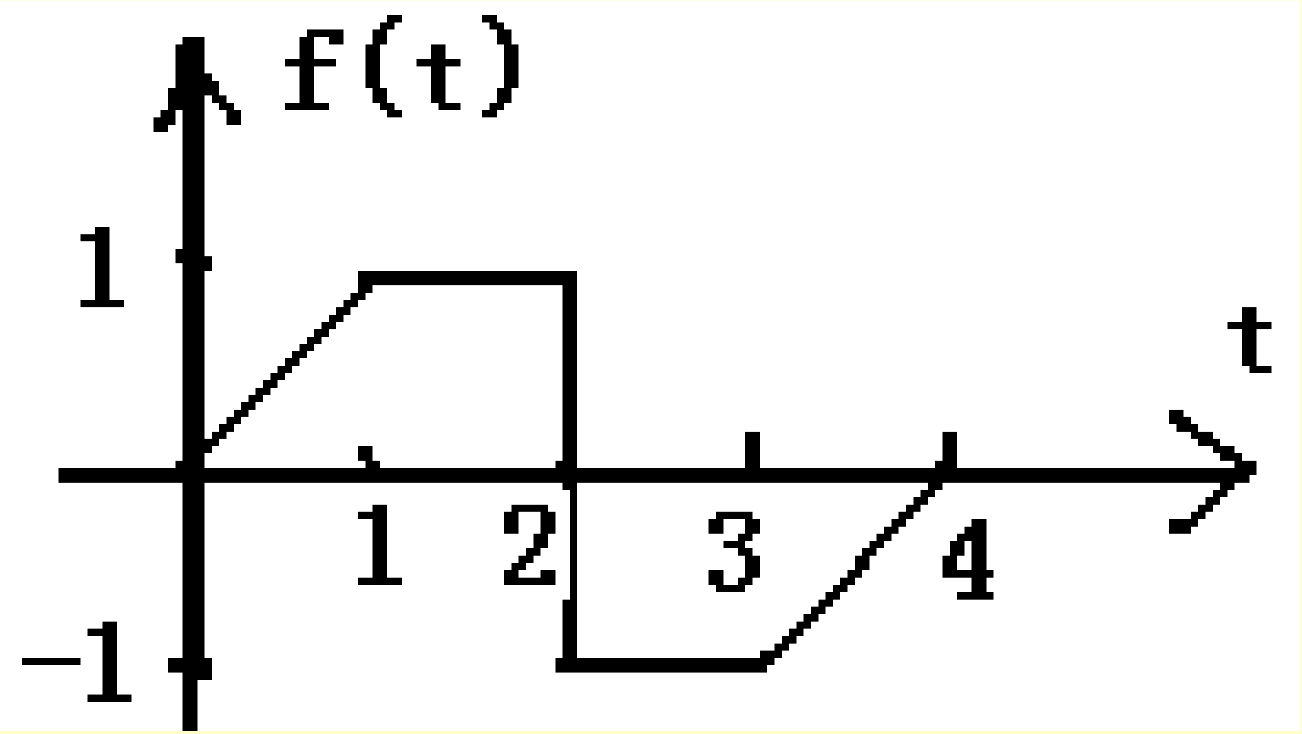
信号与系统

第三讲

§1.4　阶跃函数和冲激函数
§1.5　系统的描述
§1.6　系统的特性和分析方法

思考题

1、f(t)的图形如图所示，画出f(-2t-4)的图形



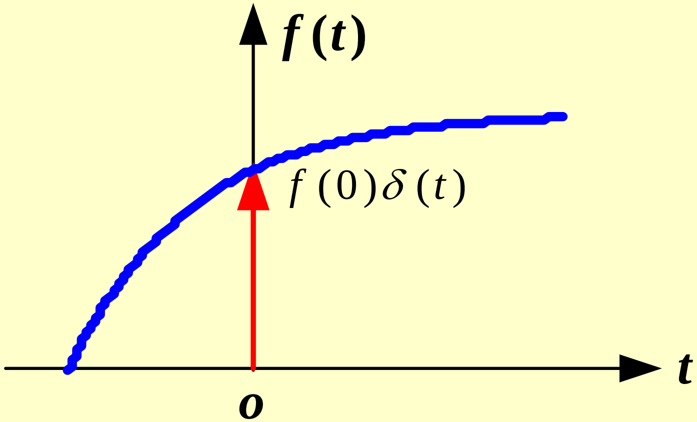
二. 冲激函数的性质

1. 与普通函数的乘积

如果$f(t)$在$t = 0$处连续，且处处有界，则有

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$



2. 平移

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$$

$$\sin(t+\frac{\pi}{4})\delta(t) = \sin(\frac{\pi}{4})\delta(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{-3}^{0}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t-1)\,\mathrm{d}t = ?$$

$$0$$

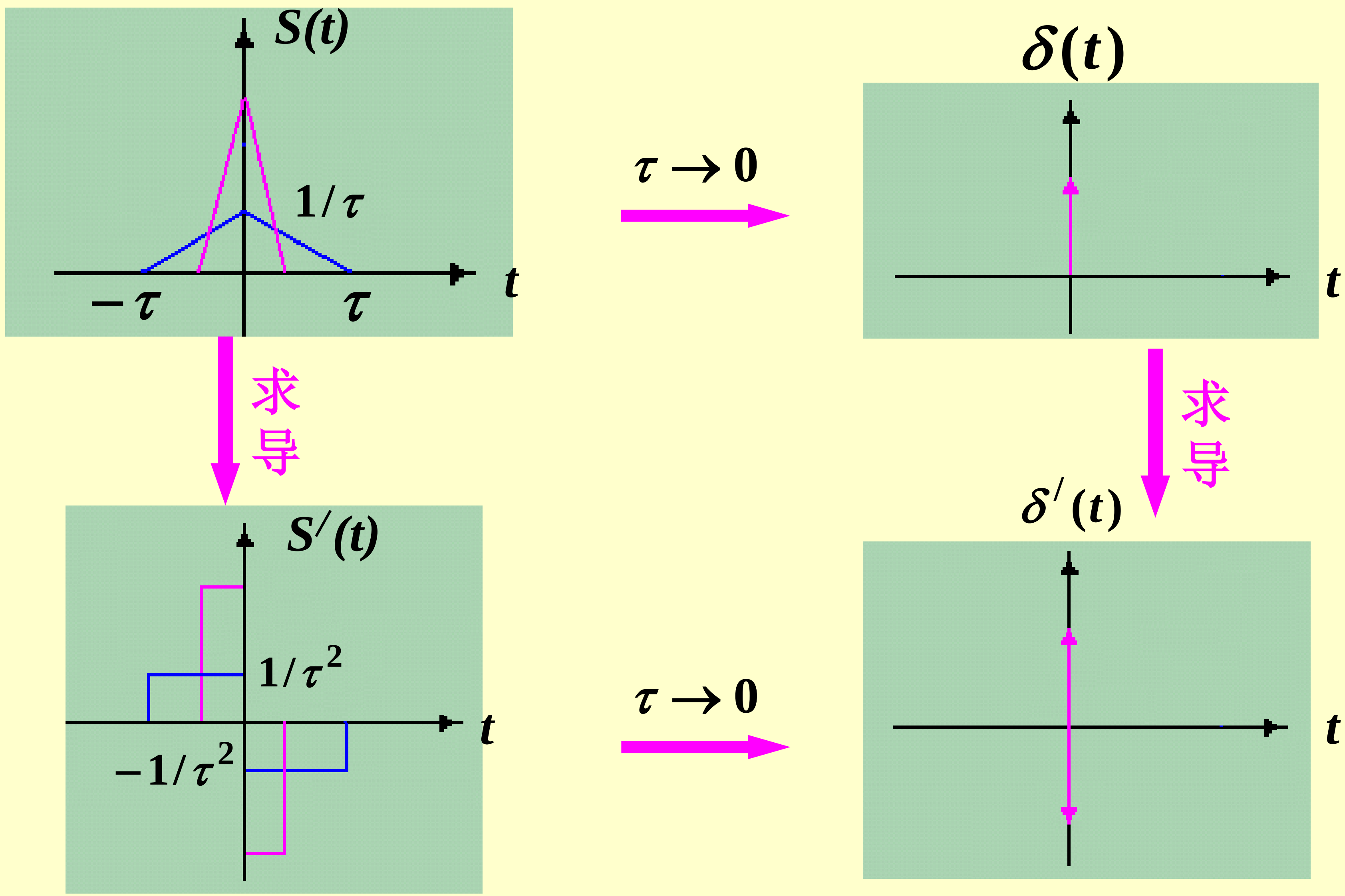
$$\int_{-1}^{9}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t)\,\mathrm{d}t = ?$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

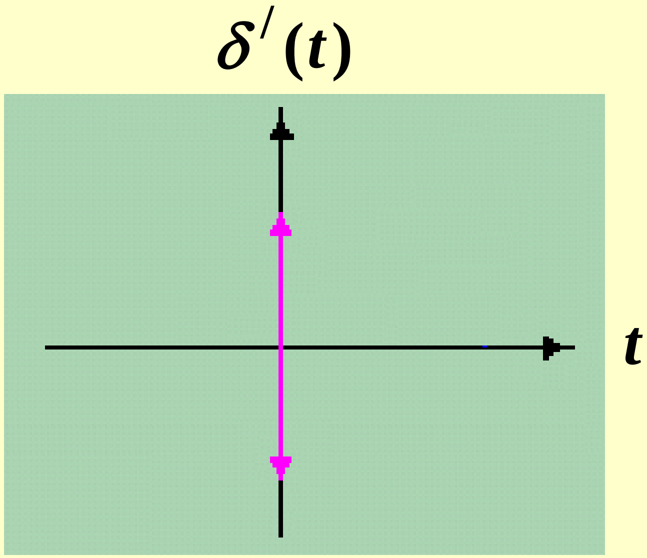
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$$

3. 冲激偶



$S(t)$
$1/\tau$
$-\tau$
τ
t
$\tau \to 0$
$\delta(t)$
t
求导
求导
$S'(t)$
$1/\tau^2$
$-1/\tau^2$
t
$\tau \to 0$
$\delta'(t)$
t

冲激偶的性质



① $\int_{-\infty}^{t} \delta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \delta(t)$

② $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,\mathrm{d}t = 0$

+、−面积抵消

③ $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

④ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t)\,\mathrm{d}t = -f'(0)$

$\delta'(t)$ 的平移：$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-t_0) f(t)\,\mathrm{d}t = -f'(t_0)$

$\delta^{(n)}(t)$ 的定义：$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n f^{(n)}(0)$

4. 对$\delta(t)$的尺度变换

$$\delta(at - t_0) = \frac{1}{|a|}\delta(t - \frac{t_0}{a})$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\delta'(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a}\delta'(t)$$

$$\delta^{(n)}(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a^n}\delta^{(n)}(t)$$

$\delta(2t) = 0.5\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(5t)(t-2)^2 \mathrm{d}t = ? \quad \frac{4}{5}$$

当$a = -1$时 $\quad \delta^{(n)}(-t) = (-1)^n \delta^{(n)}(t)$

$\delta(-t) = \delta(t)$ 为偶函数，

$\delta'(-t) = -\delta'(t)$ 为奇函数

冲激函数的性质总结

（1）取样性

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

（2）奇偶性

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

（3）比例性

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

（4）微积分性质

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \varepsilon(t)$$

（5）冲激偶

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)\,\mathrm{d}t = -f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \delta(t)$$

§1.5 系统的描述

问题：

1、如何描述系统？
2、数学模型与框图如何转换？
3、系统是如何分类的？

一、系统的描述

1、系统的数学模型

连续系统----微分方程

系统的激励和响应均为连续信号。

离散系统----差分方程

系统的激励和响应均为离散信号。

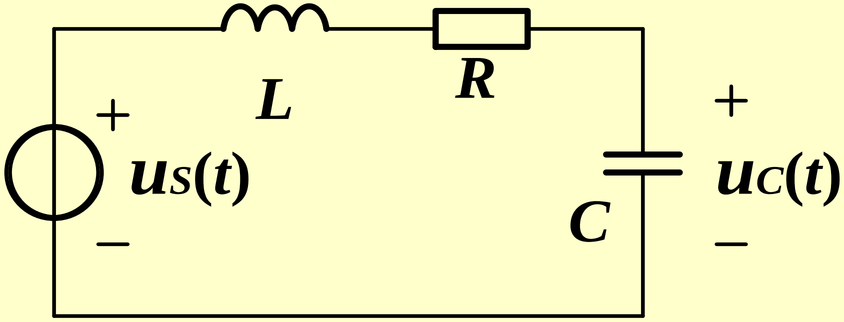
2、系统的框图表示

1、系统的数学模型

1）连续系统的微分方程

$u_S(t)$激励，$u_C(t)$响应，由KVL和VAR列方程.

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_S$$



二阶常系数线性微分方程

微分方程写成

$$a_2\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}+a_0 y(t)=f(t)$$

2）离散系统的差分方程

某地区第k年的人口为$y(k)$，从外地迁入的人口为$f(k)$，出生率和死亡率分别为a和b，第k年的人口总数为：

$$y(k)=y(k-1)+ay(k-1)-by(k-1)+f(k)$$

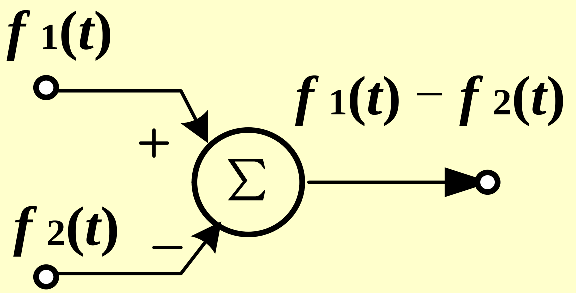
差分方程：由输出序列项与输入序列项构成的方程。其最高序号与最低序号的差数，称为**阶数**。

由n阶差分方程描述的系统称为n阶系统。

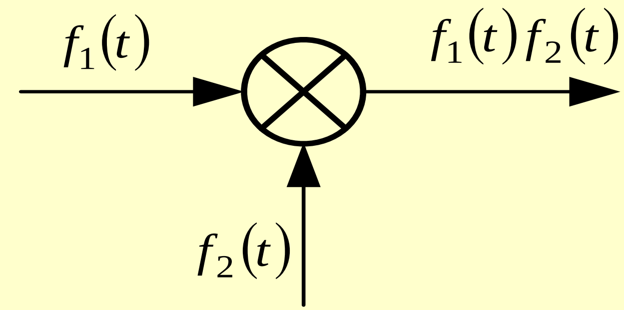
2． 系统的框图描述

1）连续系统的基本单元

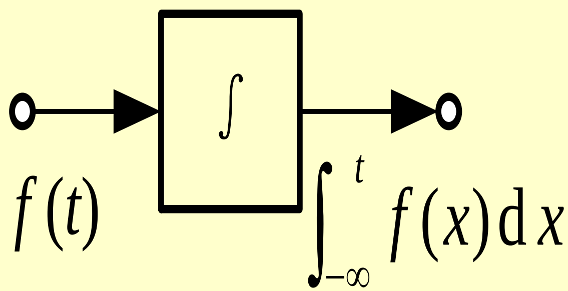
加法器



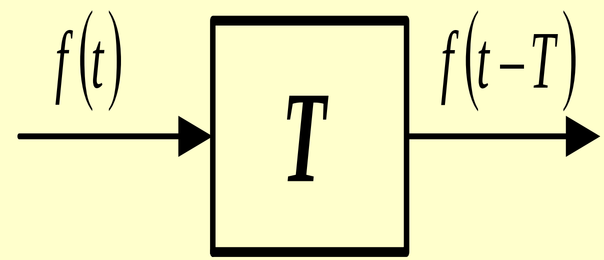
乘法器



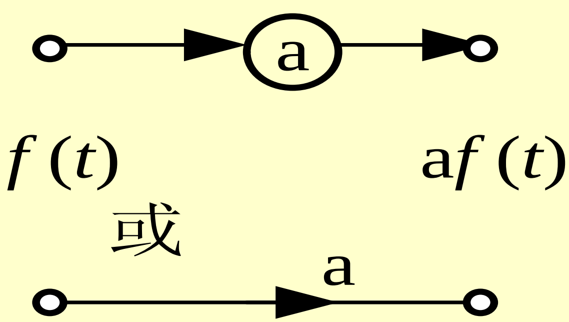
积分器



延时器

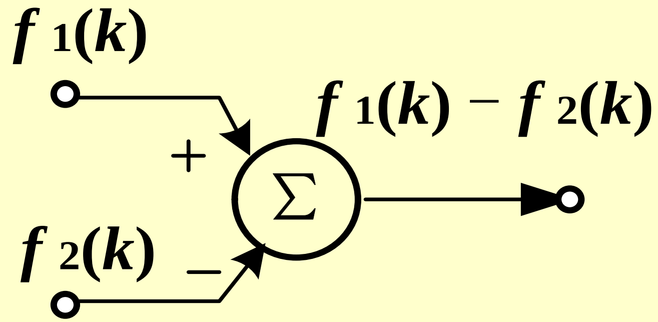


数乘器

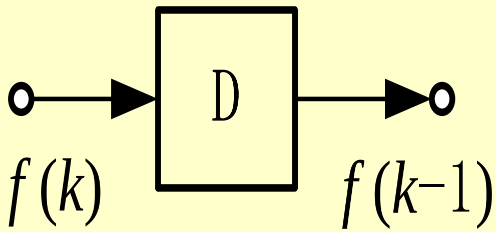


2）离散系统的基本单元

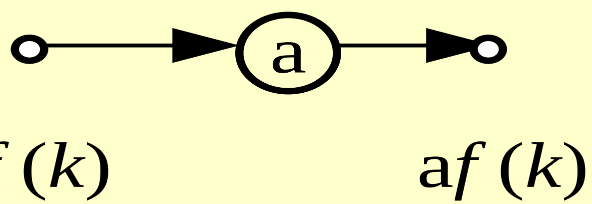
加法器



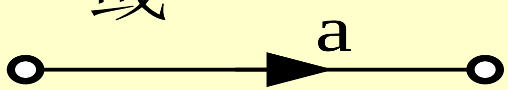
迟延单元



数乘器



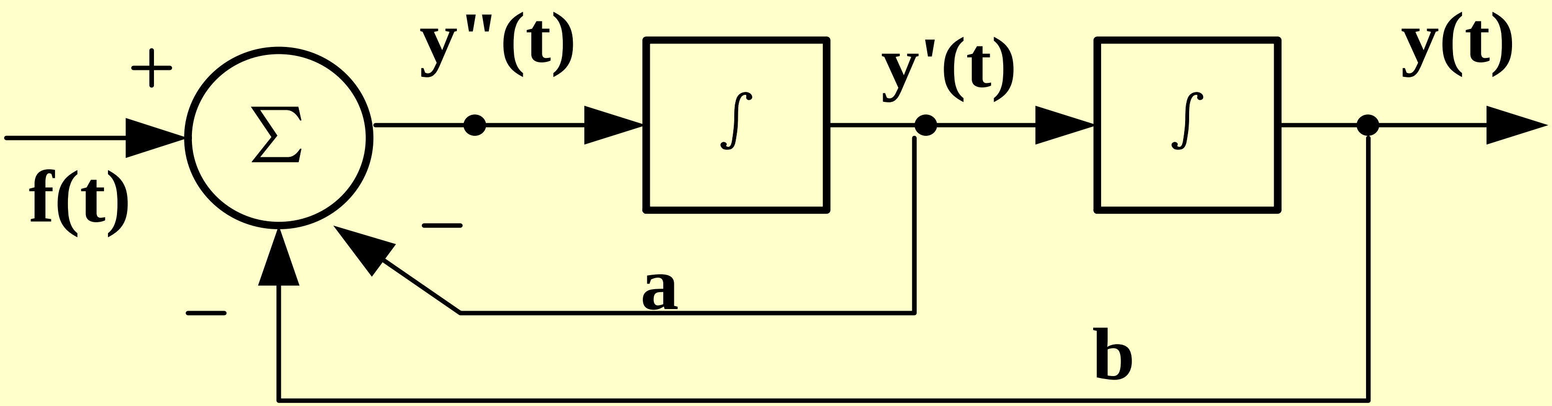
或



数学模型转换为框图

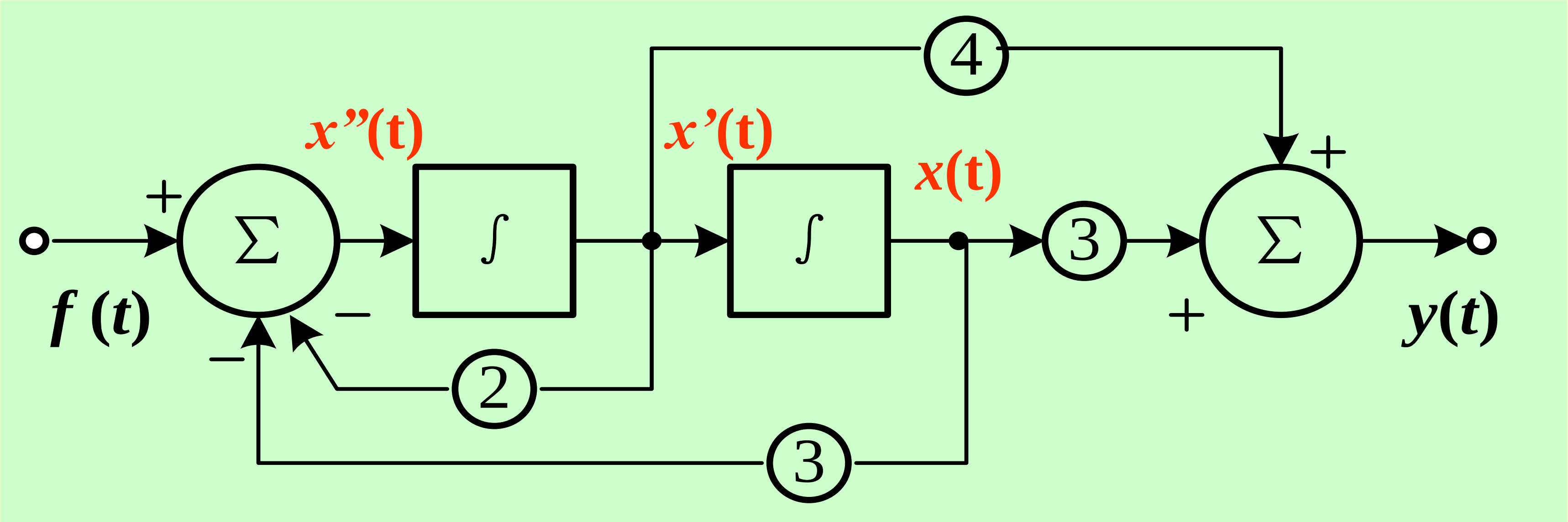
例1：已知$y''(t)+ay'(t)+by(t)=f(t)$，画框图。

解：将方程写为$y''(t)=f(t)-ay'(t)-by(t)$



框图转换为数学模型

例2： 已知框图，写出系统的微分方程。



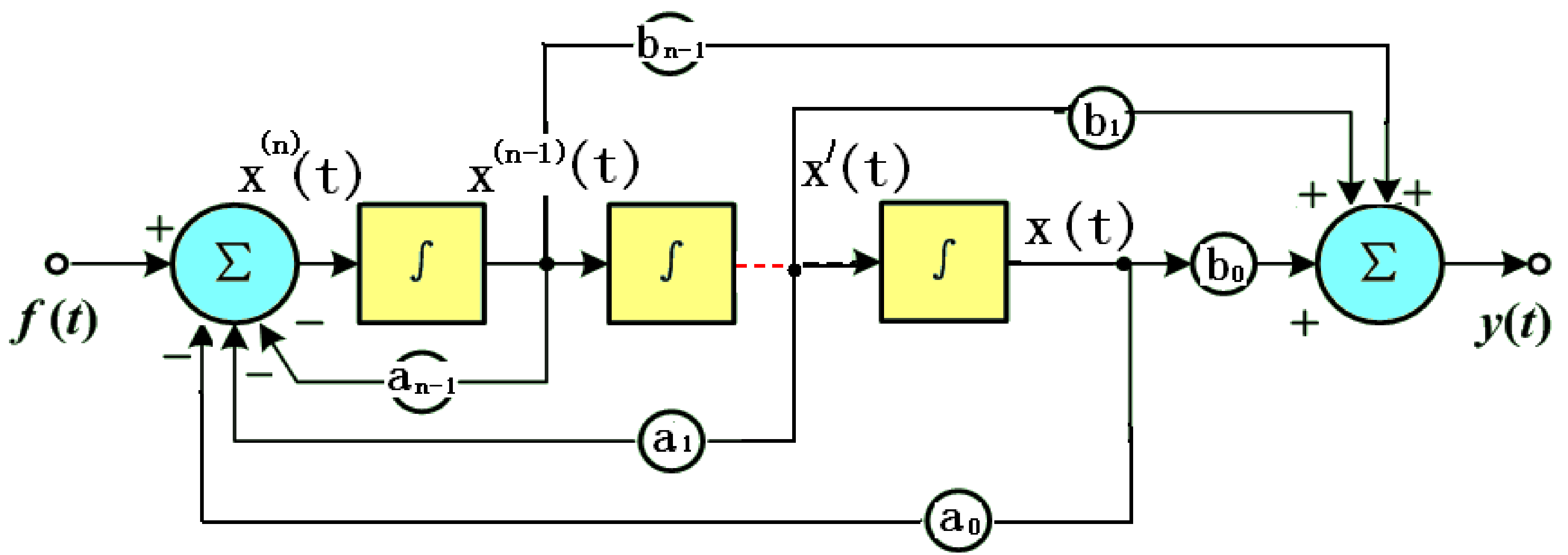
设辅助变量$x(t)$如图

$x''(t)=f(t)-2x'(t)-3x(t)$，即$x''(t)+2x'(t)+3x(t)=f(t)$

$y(t) = 4x'(t)+ 3x(t)$

$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 4f'(t)+ 3f(t)$

已知框图，写出系统的微分方程

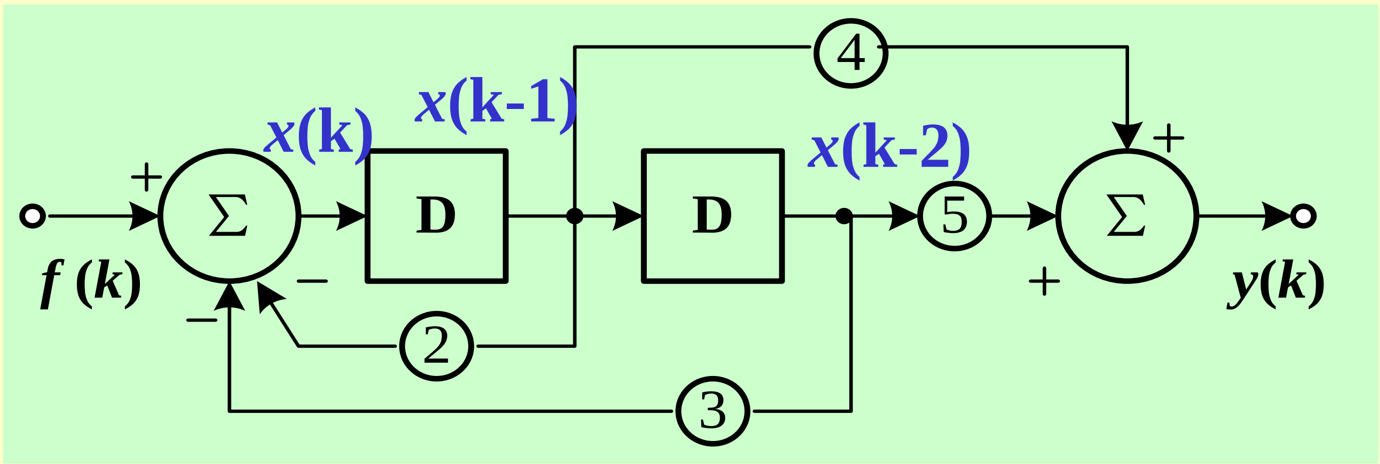


$$y^{n}(t)+a_{n-1}y^{n-1}(t)+\dots+a_1y^{1}(t)+a_0y(t)=$$

$$b_{n-1}f^{n-1}(t)+\dots+b_1f^{1}(t)+b_0f(t)$$

由框图写差分方程

例3：已知框图，写出系统的差分方程。



解： 设辅助变量 $x(k)$ 如图　$x(k)=f(k)-2x(k-1)-3x(k-2)$

即　$x(k)+2x(k-1)+3x(k-2)=f(k)$

$y(k)=4x(k-1)+5x(k-2)$

消去 $x(k)$，得

$y(k)+2y(k-1)+3y(k-2)=4f(k-1)+5f(k-2)$

二、系统的分类

- 连续 离散
- 即时 动态
- 线性 非线性
- 时变 时不变
- 可逆 不可逆
- 稳定 非稳定
- 因果 非因果

§1.6 系统的特性与分析方法

问题：

1、动态系统有哪些特性？
2、什么是线性时不变系统？
3、什么是因果信号、因果系统？
4、有哪些系统分析方法？

系统的特性

- 线性
- 时不变性
- 因果性
- 稳定性

$f(t)$:激励

$y(t)$:响应

$$y(\cdot) = \mathrm{T}[f(\cdot)]$$

本课程重点： 线性时不变系统。

(Linear Time-Invariant)，简称LTI系统。

1. 线性

$f1(\cdot) \rightarrow$ 系统 $\rightarrow y1(\cdot)$

$f2(\cdot) \rightarrow$ 系统 $\rightarrow y2(\cdot)$

满足齐次性、可加性

$$af1(\cdot)+bf2(\cdot) \rightarrow ay1(\cdot)+by2(\cdot)$$

齐次性：

$$f(\cdot) \rightarrow y(\cdot) \quad \Longrightarrow \quad af(\cdot) \rightarrow ay(\cdot)$$

可加性：

$$\left.\begin{array}{l} f1(\cdot) \rightarrow y1(\cdot) \\ f2(\cdot) \rightarrow y2(\cdot) \end{array}\right\} \Longrightarrow f1(\cdot)+f2(\cdot) \rightarrow y1(\cdot)+y2(\cdot)$$

$af1(\cdot)+bf2(\cdot) \rightarrow$ 系统 $\rightarrow ay1(\cdot)+by2(\cdot)$

动态线性系统应满足的条件

动态系统响应与激励$f(\cdot)$有关，与系统初始状态$x(0)$也有关，初始状态称“内部激励”。

$$y(\cdot) = T[\,x(0)\,,\ f(\cdot)\,]$$
$$y_{zi}(\cdot) = T[\,x(0)\,,\ 0\,]$$
$$y_{zs}(\cdot) = T[\,0\,,\ f(\cdot)\,]$$

满足3个条件：

可分解性 $y(\cdot)=y_{zi}(\cdot)+y_{zs}(\cdot)$

零状态线性

$$T[0, af_1(t)+bf_2(t)]=aT[0, f_1(\cdot)]+bT[0, f_2(\cdot)]$$

零输入线性

$$T[ax_1(0)+bx_2(0), 0]= aT[x_1(0), 0]+bT[x_2(0), 0]$$

判断下列系统是否为线性系统？

（1） $y(t)=3x(0)+2f(t)+x(0)f(t)+1$

（2） $y(t)=2x(0)+|f(t)|$

解：（1） $y_{zs}(t)=2f(t)+1$， $y_{zi}(t)=3x(0)+1$

显然， $y(t) \neq y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$

不满足可分解性，故为非线性

（2） $y_{zs}(t)=|f(t)|$， $y_{zi}(t)=2x(0)$

$y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)$ 满足可分解性；

由于$T[0, af(t)]=|af(t)|\neq ay_{zs}(t)$

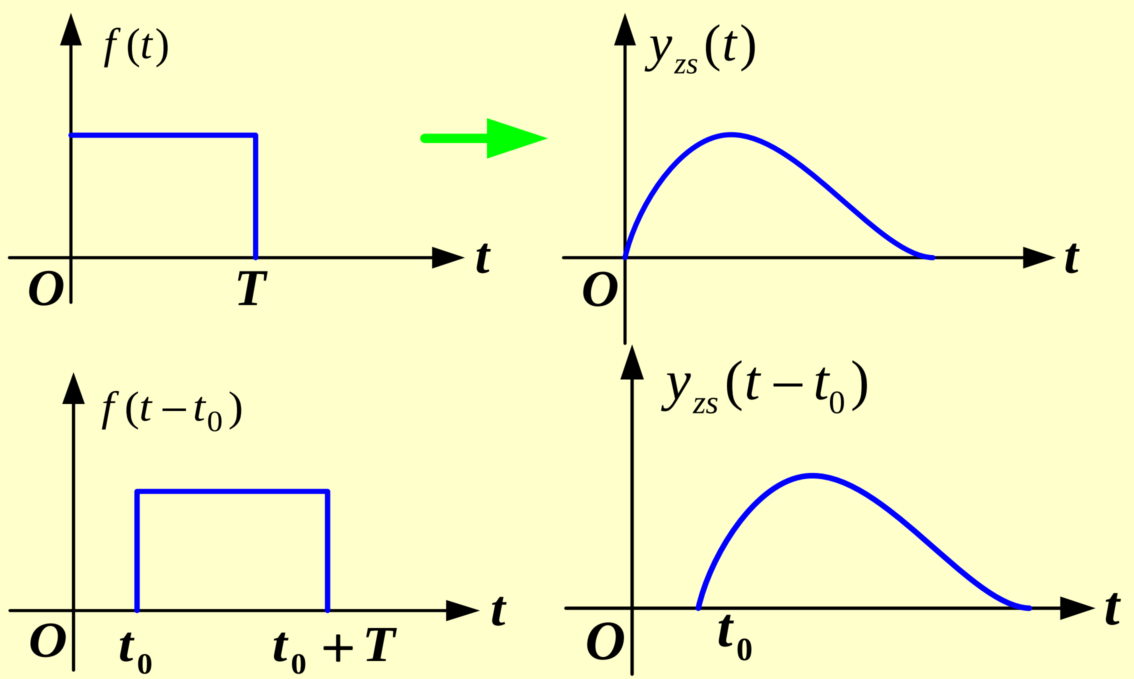
不满足零状态线性。故为非线性系统。

2. 时不变性

- **时不变系统：** 系统参数不随时间变化

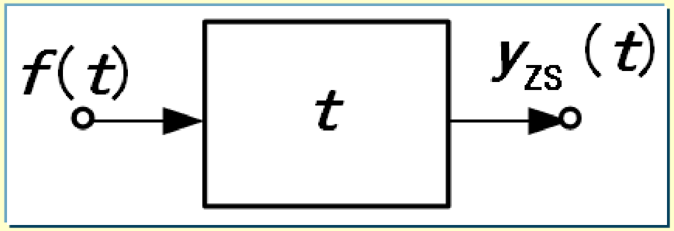
线性系统 → {时不变, 时　变} → {常系数微分方程, 变系数微分方程}

线性时不变系统： $f(t) \to y_{zs}(t)$　$f(t-t_d) \to y_{zs}(t-t_d)$



例：判断下列系统是否为时不变系统？

$$y_{zs}(t)=tf(t)$$



解： 令 $\mathrm{f}_1(\mathrm{t})=f(t-t_\mathrm{d})$

$$\mathrm{y}_{\mathrm{zs1}}(\mathrm{t})=t\,\mathrm{f}_1(\mathrm{t})=\mathrm{t}\,f(t-t_\mathrm{d})$$

而 $y_{\mathrm{zs2}}(t-t_\mathrm{d})=(t-t_\mathrm{d})\,f(t-t_\mathrm{d})$

显然 $\mathrm{y}_{\mathrm{zs1}}(t-t_\mathrm{d})\neq y_{\mathrm{zs2}}(t-t_\mathrm{d})$

故该系统为时变系统

直观判断方法：

若 $f(\cdot)$ 前出现变系数，或有反转、展缩变换，则系统为时变系统。

第 26 页

3. 因果性

- **因果系统**:指零状态响应不会出现在激励之前的系统。

$t=t_0$时$f(t)$加入：有$t<t_0$，$y_{zs}(t)=0$

- **判断方法**： 输出不超前于输入

- **因果信号**

$t=0$ 接入系统的信号称为因果信号。

可表示为：$f(t)=f(t)\varepsilon(t)$

$$t<0,\ f(t)=0$$

4. 稳定性

系统对有界激励 $f(\cdot)$ 所产生的零状态响应 $y_{zs}(\cdot)$ 也有界，称该系统为有界输入有界输出稳定，简称稳定。即若 $|f(\cdot)|<\infty$，其 $|y_{zs}(\cdot)|<\infty$ 则称系统是稳定的。

如： $y_{zs}(k)=\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(x)dx$ 是不稳定系统；

$\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(x)\mathrm{d}x=t\varepsilon(t)$ 当 $t\to\infty$ 时，它也 $\to\infty$，无界。

LTI系统的微分特性和积分特性

（1）微分特性：

若 $f(t) \rightarrow y_{zs}(t)$ $\Rightarrow$ $f'(t) \rightarrow y'_{zs}(t)$

（2）积分特性：

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)dx \rightarrow \int_{-\infty}^{t} y_{zs}(x)dx$$

LTI系统分析的方法：

输入输出法、状态变量法