信号与系统

第五讲

§2.1　LTI连续系统的响应
§2.2　冲激响应和阶跃响应

思考题

1、满足均匀性与可加性的动态系统就是线性系统

2、自由响应是输入信号作用到系统后产生的响应

3、强迫响应是系统固有特性产生的。

4、时域可展缩的信号具有时不变性。

5、$\varepsilon(t)$、$\delta(t)$、$\delta'(t)$具有怎样的关系？

例2.1-1 描述某系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$$

求当$f(t)=2e^{-t}$，$t\geqslant 0$；$y(0)=2$，$y'(0)=-1$时的全解

解： (1) 特征方程： $\lambda^2+5\lambda+6=0$

其特征根： $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-3$

齐次解： $y_h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$

特解： $y_p(t)=Pe^{-t}$

特解带入方程：

$$Pe^{-t}+5(-Pe^{-t})+6Pe^{-t}=2e^{-t}$$

解得 ： $P=1$

特解： $y_p(t)=e^{-t}$

例　描述某系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$$

求当 $f(t)=2e^{-t}$，$t\geqslant 0$；$y(0)=2$，$y'(0)=-1$ 时的全解

解：

齐次解：$y_h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$

特解：$y_p(t)=e^{-t}$

全解：$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}+e^{-t}$

$y(0)=C_1+C_2+1=2$，

$y'(0)=-2C_1-3C_2-1=-1$

解得　$C_1=3$，$C_2=-2$

最后得全解 $y(t)=\underbrace{3e^{-2t}-2e^{-3t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{e^{-t}}_{\text{强迫响应}}$，$t\geqslant 0$

三. 零输入响应和零状态响应

1. 概　述

LTI 系统响应

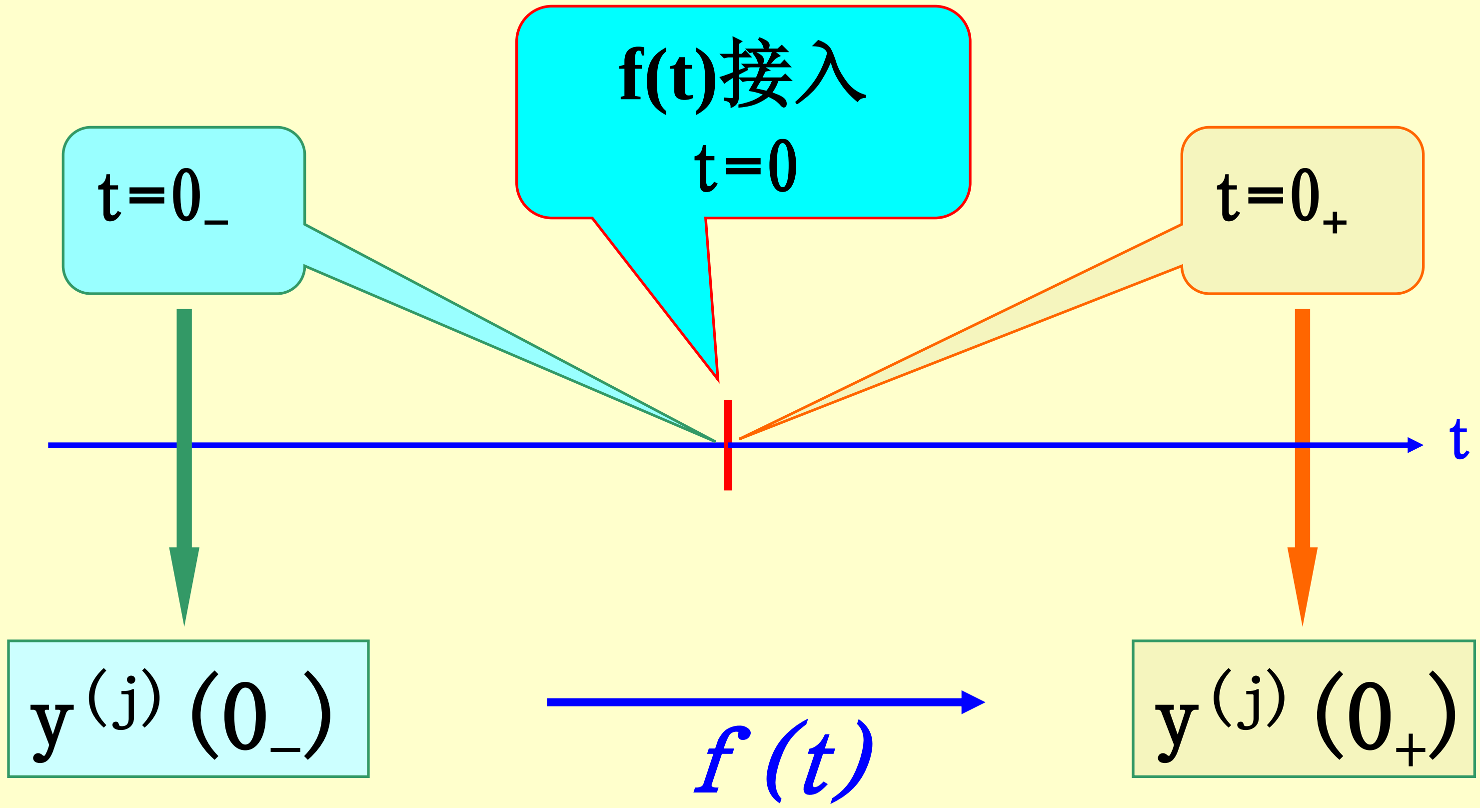
第1种：自由响应+强迫响应

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

第2种：零输入响应+零状态响应

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$$

0-和0+状态



2. 经典分析及求解

（1）$y_{zi}(t)$ 零输入响应

$$y_{zi}^{(n)}(t)+a_{n-1}y_{zi}^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0 y_{zi}(t)=0$$

$$y_{zi}=\sum_{i=1}^{n}C_{zij}e^{\lambda_i t}$$

零输入响应的 $0_+ = 0_-$

C_{zi} 由 $y_{zi}^{(j)}(0_+)=y_{zi}^{(j)}(0_-)=y^{(j)}(0_-)$ 确定

2. 经典分析及求解

（2）$y_{zs}(t)$ 零状态响应

$$y_{zs}^{(n)}(t)+a_{n-1}y_{zs}^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0 y_{zs}(t)$$
$$=b_m f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\ldots+b_1 f^{(1)}(t)+b_0 f(t)$$

$$y_{zs}(t)=\sum_{j=1}^{n}C_{zsj}e^{\lambda_j t}+y_p(t)$$

零状态响应的 $0_+ \neq 0_- = 0$ 激励含有冲激

C_{zs}由 $y_{zs}^{(j)}(0_+)$确定

（3）$y(t)$ 全响应

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{C_i\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{y_p(t)}_{\text{强迫响应}}=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\underbrace{C_{zij}e^{\lambda_j t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{j=1}^{n}C_{zsj}e^{\lambda_j t}+y_p(t)}_{\text{零状态响应}}$$

冲激函数匹配法：

$k_1 y''(t)+k_2 y'(t)+k_3 y(t)=k_4 \delta''(t)+k_5 \delta(t)$

0时刻方程两端 δ(t) 及其各阶导数相等

$y_{zs}''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_0(t)$

$$y_{zs}'(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c+\underbrace{\int_{-\infty}^{t} r_0(x)\,\mathrm{d}x}_{r_1(t)}$$

$$y_{zs}(t)=a\delta(t)+b+\underbrace{\int_{-\infty}^{t} r_1(x)\,\mathrm{d}x}_{r_2(t)}$$

$y_{zs}''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_0(t)$

$$y_{zs}'(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c+\underbrace{\int_{-\infty}^{t} r_0(x)\,\mathrm{d}x}_{r_1(t)}$$

$$y_{zs}(t)=a\delta(t)+b+\underbrace{\int_{-\infty}^{t} r_1(x)\,\mathrm{d}x}_{r_2(t)}$$

$$y_{zs}'(0_+)-y_{zs}'(0_-)=\int_{0_-}^{0+} y_{zs}''(x)\,\mathrm{d}x=c \qquad y_{zs}'(0_+)=c$$

$$y_{zs}(0_+)-y_{zs}(0_-)=\int_{0_-}^{0+} y_{zs}'(x)\,\mathrm{d}x=b \qquad y_{zs}(0_+)=b$$

0−，0+区间，$\delta''(t)$、$\delta'(t)$、$r_0(t)$积分均为0

例2.1-7 描述某系统的微分方程为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t)$$

已知$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=1$，$f(t)=\varepsilon(t)$

求系统的零输入响应、零状态响应和全响应

解 （1）零输入响应$y_{zi}(t)$

$$y_{zi}''(t)+3y_{zi}'(t)+2y_{zi}(t)=0$$

特征根：-1，-2

零输入响应：$y_{zi}(t)=C_{zi1}e^{-t}+C_{zi2}e^{-2t}$

$$y_{zi}'(0_+)=y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)$$

$$y_{zi}(0_+)=y_{zi}(0_-)=y(0_-)$$

$C_{zi1}=5$，$C_{zi2}=-3$　　$y_{zi}(t)=5e^{-t}-3e^{-2t},\ t>0$

（2）零状态响应$y_{zs}(t)$ 满足下列方程

$$\begin{cases} y_{zs}''(t)+3y_{zs}'(t)+2y_{zs}(t)=2\delta(t)+6\varepsilon(t) \\ y_{zs}(0_-)=y_{zs}'(0_-)=0 \end{cases}$$

$y_{zs}(t)$解由两部分组成$\begin{cases}\text{齐次方程的解} \\ \text{特解}\end{cases}$

$t>0 \quad y_{zs}''(t)+3y_{zs}'(t)+2y_{zs}(t)=6$

$y_{zs}(t)=C_{zs1}e^{-t}+C_{zs2}e^{-2t}+P$

特解带入方程 $P''+3P'+2P=6 \qquad P=3$

$C_{zs1} \quad C_{zs2}$：由$y_{zs}(0_+)$及$y_{zs}'(0_+)$确定

$y_{zs}''(t)+3y_{zs}'(t)+2y_{zs}(t)=2\delta(t)+6\varepsilon(t)$

$y_{zs}''(t)=a\boldsymbol{\delta}(t)+r_0(t) \quad a=2$

$y_{zs}'(0_+)=2$

$y_{zs}(t)$在t = 0无跃变　　$y_{zs}(0_+)=y_{zs}(0_-)=0$

$y_{zs}(t)=C_{zs1}e^{-t}+C_{zs2}e^{-2t}+3$

$0=C_{zs1}+C_{zs2}+3$

$2=-C_{zs1}-2C_{zs2} \qquad C_{zs1}=-4 \qquad C_{zs2}=1$

求得　$y_{zs}(t)=-4e^{-t}+e^{-2t}+3$， $t\geq 0$

$y_{zi}(t)=5e^{-t}-3e^{-2t}$, $t>0$

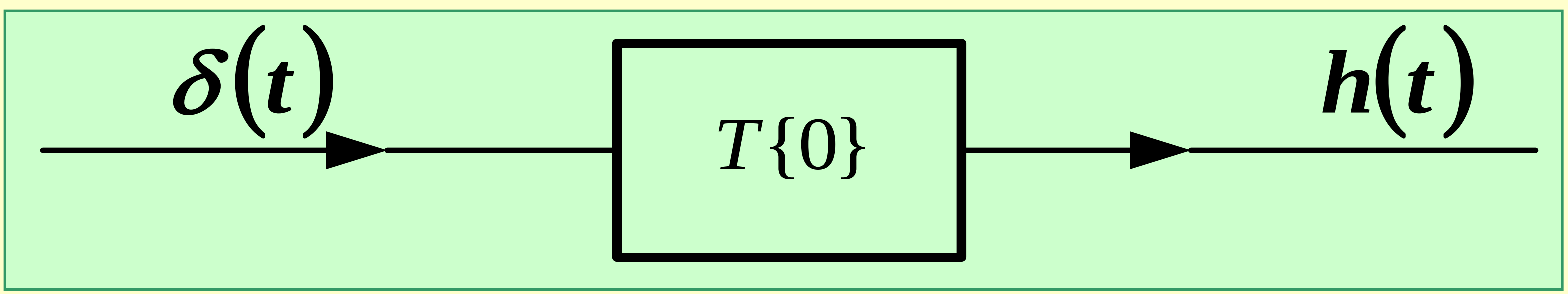
(3) 完全响应　$y(t)=e^{-t}-2e^{-2t}+3$， $t\geq 0$

§2.2 冲激响应和阶跃响应

一、冲激响应

由单位冲激函数 δ(t) 所引起的**零状态响应**称为**单位冲激响应**，记为 $h(t)$。

$$h(t)=T[\{0\},\ \delta(t)]$$



1．系统冲激响应的求解

对于LTI系统，可以用一n阶微分方程表示

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=$$
$$b_m f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1 f^{(1)}(t)+b_0 f(t)$$

$$h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h^{(1)}(t)+a_0h(t)$$
$$=b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta^{(1)}(t)+b_0\delta(t)$$

• $h(t)$解的形式

$$h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h^{(1)}(t)+a_0h(t)$$
$$=b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta^{(1)}(t)+b_0\delta(t)$$

$\delta(t)$及导数在 $t\geqslant 0_+$ 时都为零，因而方程右端恒等于零，这样原系统的冲激响应形式与齐次解形式相同。

①与特征根有关

例:当特征根均为单根时

$$h(t)=\left[\sum_{i=1}^{n}c_ie^{\lambda_it}\right]\varepsilon(t)$$

②与n，m相对大小有关

- 当$n>m$时，$h(t)$不含$\delta(t)$及其各阶导数;
- 当$n=m$时，$h(t)$中应包含$\delta(t)$;
- 当$n<m$时，$h(t)$应包含$\delta(t)$及其各阶导数

例2.2-2　描述某系统的微分方程为

$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f''(t)+2f'(t)+3f(t)$

求其冲激响应h(t)。

解:(1)根据h(t)的定义 有

$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)+3\delta(t)$

$h'(0_-)=h(0_-)=0$

(2) 对t>0时，有$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=0$

特征根为–2，–3。故系统的冲激响应为

$h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$， $t>0$

$$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)+3\delta(t)$$

解: (3) 先求 $h'(0_+)$ 和 $h(0_+)$

$$h''(t)=a\,\delta''(t)+b\,\delta'(t)+c\,\delta(t)+r_1(t)$$

$$h'(t)=a\,\delta'(t)\ \ +b\,\delta(t)+r_2(t)$$

$$h(t)\ \ =a\,\delta(t)\ \ +r_3(t)$$

$$a\,\delta''(t)+b\,\delta'(t)+c\,\delta(t)+r_1(t)+5[a\,\delta'(t)+b\,\delta(t)+r_2(t)]+6[a\,\delta(t)+r_3(t)]=\delta''(t)+2\,\delta'(t)+3\,\delta(t)$$

整理得

$$a\,\delta''(t)+(b+5a)\,\delta'(t)+(c\ +5b+6a)\,\delta(t)+\ r_1(t)+5r_2(t)+6r_3(t)=\delta''(t)+2\,\delta'(t)+3\,\delta(t)$$

利用 $\delta(t)$ 系数匹配，得 $a=1$，$b=-3$，$c=12$

$a=1，b=-3，c=12$

所以 $h''(t)=\delta''(t)-3\delta'(t)+12\delta(t)+r_1(t)$

$h'(t)=\delta'(t)-3\delta(t)+12+r_1(t)$

$h(t)=\delta(t)-3+r_2(t)$

$h''(t)$从0_-到0_+积分得 $h'(0_+)-h'(0_-)=12$

$h'(t)$从0_-到0_+积分得 $h(0_+)-h(0_-)=-3$

故 $h'(0_+)=12$ $h(0_+)=-3$，

(4) 代入初始条件

$h(0_+)=-3，h'(0_+)=12$

求得$C_1=3，C_2=-6$， 所以

$h(t)=3e^{-2t}-6e^{-3t}, t>0$

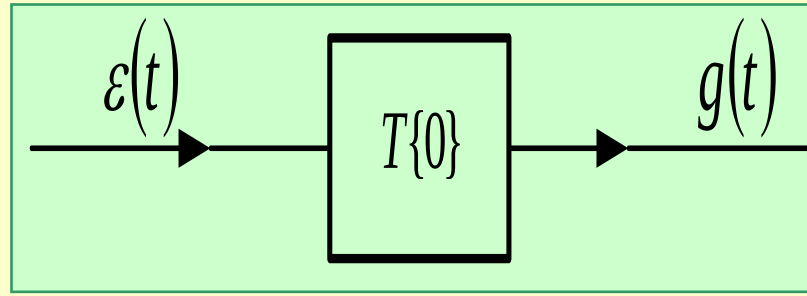
$h(t)=a\delta(t)+(3e^{-2t}-6e^{-3t})\varepsilon(t)$

$=\delta(t)+(3e^{-2t}-6e^{-3t})\varepsilon(t)$

$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)+3\delta(t)$

二. 阶跃响应

$g(t)=T[\{0\},\ \varepsilon(t)]$



LTI系统满足微、积分特性

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(x)\,\mathrm{d}x$$

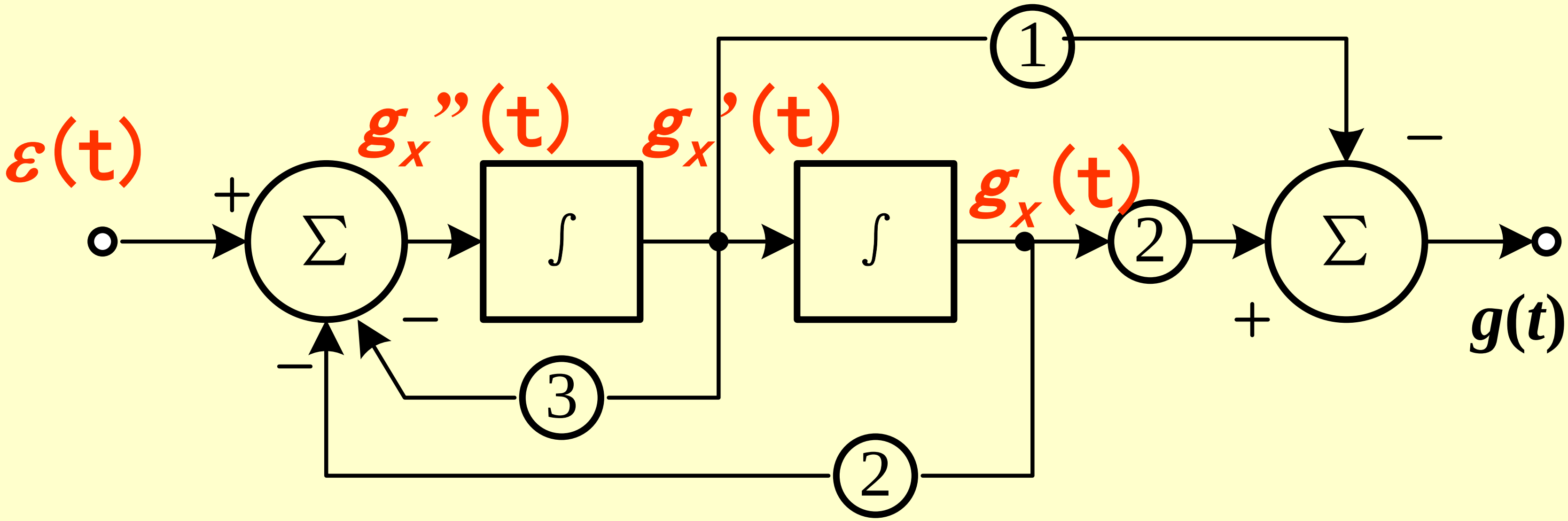
$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,..\,h(t)=\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$g^{(n)}(t)+a_{n-1}g^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1g^{(1)}(t)+a_0g(t)=\varepsilon(t)$$

$$g(t)=\left(\sum_{j=1}^{n}C_je^{\lambda_i t}+\frac{1}{a_0}\right)\varepsilon(t)$$

（j=0, 1, 2, —— n−1）

2.2-3 如图所示LTI系统，求其阶跃响应。



$g_x''(t)+3g_x'(t)+2g_x(t)=\varepsilon(t)$ $g(t)=-g_x'(t)+2g_x(t)$

$g_x(t)=(C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+0.5)\varepsilon(t)$

$g_x(t)=(-e^{-t}+0.5e^{-2t}+0.5)\varepsilon(t)$

$g(t)=-g_x'(t)+2g_x(t)=(\underbrace{-3e^{-t}+2e^{-2t}}_{\text{瞬态响应}}+\underbrace{1}_{\text{稳态响应}})\varepsilon(t)$

第二章作业

2．1　（1）（2）（3）

2．2　（1）（3）

2．3　（1）（3）　2．4（1）　2．6　2．9

2．16（1）（3）　2．17（1）（3）（5）

2．20　　2．21

2．29　　2．30

第 23 页