信号与系统

第六讲

§2.2　冲激响应和阶跃响应
§2.3　卷积积分
§2.4　卷积积分的性质

思考题

1、零状态响应是系统的初始状态为零，仅由（）信号引起的响应。

2、系统的自由响应包含零输入响应和（　　）响应的一部分。

3、一个 LTI系统，当其（ ）状态为零时，输入为单位冲激函数引起的响应，称为（）响应。

4、δ(t)、δ'　(t)哪个是奇函数、偶函数?

5、$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = (\_\_\_\_\_\_)$$

6、某LTI的数学模型为 y'(t)+2y(t)=2δ'(t)+δ(t)

初始状态$y(0_-)=3$，求初始值$y(0_+)$。

冲激函数匹配法：

$$k_1 y''(t)+k_2 y'(t)+k_3 y(t)=k_4\delta''(t)+k_5\delta(t)$$

0时刻方程两端 δ (t) 及其各阶导数相等

$$y_{zs}''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_0(t)$$

$$y_{zs}'(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+\underbrace{c+\int_{-\infty}^{t} r_0(x)\,\mathrm{d}x}_{r_1(t)}$$

$$y_{zs}(t)=a\delta(t)+\underbrace{b+\int_{-\infty}^{t} r_1(x)\,\mathrm{d}x}_{r_2(t)}$$

$y_{zs}''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_0(t)$

$y_{zs}'(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c+\underbrace{\int_{-\infty}^{t} r_0(x)\,\mathrm{d}x}_{r_1(t)}$

$y_{zs}(t)=a\delta(t)+b+\underbrace{\int_{-\infty}^{t} r_1(x)\,\mathrm{d}x}_{r_2(t)}$

$y_{zs}'(0_+)-y_{zs}'(0_-)=\int_{0_-}^{0+} y''_{zs}(x)\,\mathrm{d}x=c$ $\quad y_{zs}'(0_+)=c$

$y_{zs}(0_+)-y_{zs}(0_-)=\int_{0_-}^{0+} y'_{zs}(x)\,\mathrm{d}x=b$ $\quad y_{zs}(0_+)=b$

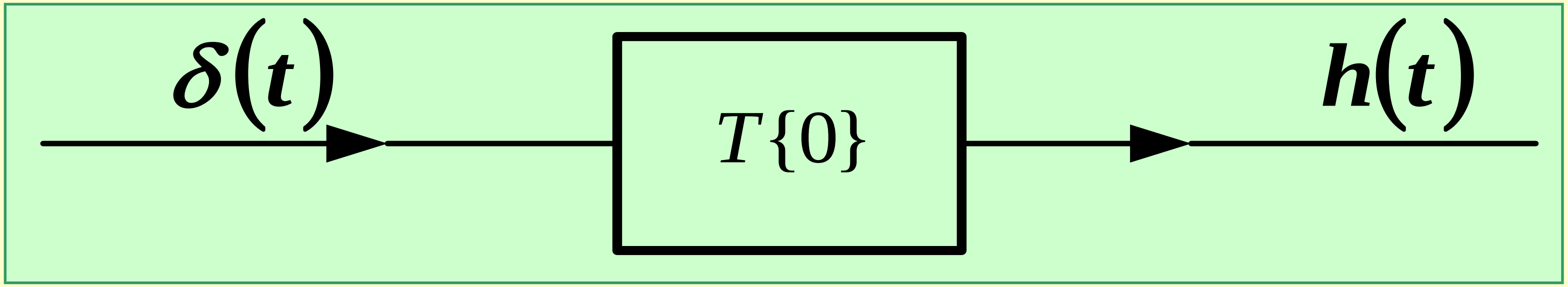
0−，0+区间， $\delta''(t)$、 $\delta'(t)$、$r_0(t)$积分均为0

§2.2 冲激响应和阶跃响应

一、冲激响应

由单位冲激函数 δ(t) 所引起的零状态响应称为单位冲激响应，记为 $h(t)$。

$$h(t)=T[\{0\},\ \delta(t)]$$



1．系统冲激响应的求解

对于LTI系统，可以用一*n*阶微分方程表示

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=$$
$$b_m f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1 f^{(1)}(t)+b_0 f(t)$$

$$h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h^{(1)}(t)+a_0h(t)$$
$$=b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta^{(1)}(t)+b_0\delta(t)$$

- $h(t)$解的形式

$$h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h^{(1)}(t)+a_0h(t)$$
$$=b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta^{(1)}(t)+b_0\delta(t)$$

$\delta(t)$及导数在 $t\geqslant 0_+$ 时都为零，因而方程右端恒等于零，这样原系统的冲激响应形式与齐次解形式相同。

①与特征根有关

例：当特征根均为单根时

$$h(t)=\left[\sum_{i=1}^{n}c_ie^{\lambda_i t}\right]\varepsilon(t)$$

②与n，m相对大小有关

- 当$n>m$时，$h(t)$不含$\delta(t)$及其各阶导数；
- 当$n=m$时，$h(t)$中应包含$\delta(t)$；
- 当$n<m$时，$h(t)$应包含$\delta(t)$及其各阶导数

例2.2-2　描述某系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f''(t)+2f'(t)+3f(t)$$

求其冲激响应h(t)。

解:(1)根据h(t)的定义 有

$$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)+3\delta(t)$$

$$h'(0_-)=h(0_-)=0$$

(2) 对t>0时，有$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=0$

特征根为–2，–3。故系统的冲激响应为

$$h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}，\ t>0$$

$$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)+3\delta(t)$$

解：(3) 先求 $h'(0_+)$ 和 $h(0_+)$

$$h''(t)=a\,\delta''(t)+b\,\delta'(t)+c\,\delta(t)+r_1(t)$$

$$h'(t)=a\,\delta'(t)\ +b\,\delta(t)+c+\int_{-\infty}^{t} r_1(x)\,\mathrm{d}x$$

$$h(t)\ =a\,\delta(t)\ +b+\int_{-\infty}^{t} r_2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a\,\delta''(t)+b\,\delta'(t)+c\,\delta(t)+r_1(t)+5[a\,\delta'(t)+b\,\delta(t)+r_2(t)]+6[a\,\delta(t)+r_3(t)]=\delta''(t)+2\delta'(t)+3\delta(t)$$

整理得

$$a\,\delta''(t)+(b+5a)\,\delta'(t)+(c+5b+6a)\,\delta(t)+r_1(t)+5r_2(t)+6r_3(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)+3\delta(t)$$

利用 $\delta(t)$ 系数匹配，得 $a=1$，$b=-3$，$c=12$

$a=1$，$b=-3$，$c=12$

所以 $h''(t)=\delta''(t)-3\delta'(t)+12\delta(t)+r_1(t)$

$h'(t)=\delta'(t)-3\delta(t)+12+r_1(t)$

$h(t)=\delta(t)-3+r_2(t)$

$h''(t)$从0_-到0_+积分得 $h'(0_+)-h'(0_-)=12$

$h'(t)$从0_-到0_+积分得 $h(0_+)-h(0_-)=-3$

故 $h'(0_+)=12$ $h(0_+)=-3$，

(4) 代入初始条件

$h(0_+)=-3$，$h'(0_+)=12$

求得$C_1=3$，$C_2=-6$，所以

$h(t)=3e^{-2t}-6e^{-3t}$, $t>0$

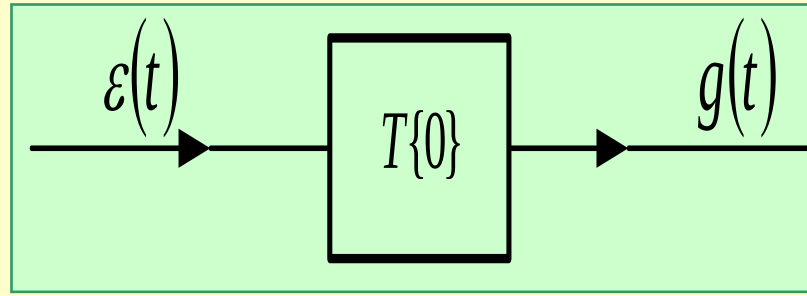
$h(t)=d\delta(t)+(3e^{-2t}-6e^{-3t})\varepsilon(t)$ $d=1$

$=\delta(t)+(3e^{-2t}-6e^{-3t})\varepsilon(t)$

$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)+3\delta(t)$

二. 阶跃响应

$g(t)=T[\{0\},\ \varepsilon(t)]$



LTI系统满足**微、积分**特性

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(x)\,\mathrm{d}x \qquad g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau\;..\;h(t)=\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$g^{(n)}(t)+a_{n-1}g^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1g^{(1)}(t)+a_0g(t)=\varepsilon(t)$$

$$g(t)=\left(\sum_{j=1}^{n}C_je^{\lambda_i t}+\frac{1}{a_0}\right)\varepsilon(t)$$

(j=0, 1, 2, —— n−1)

LTI系统的微分特性和积分特性

（1）微分特性：

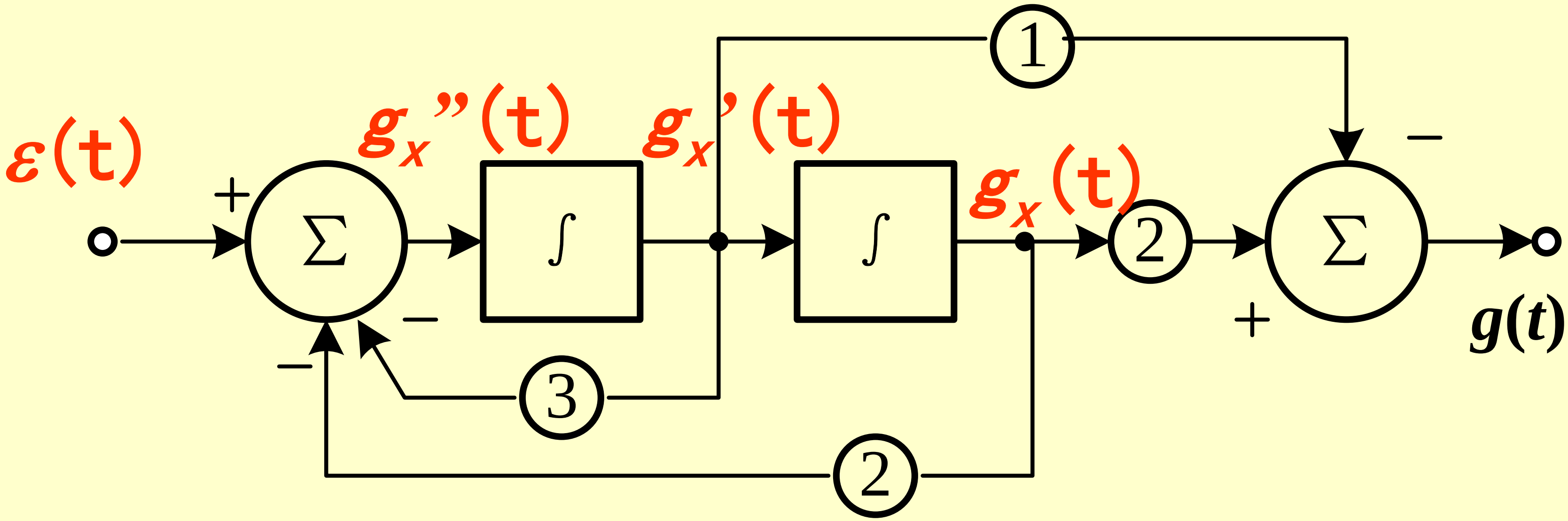
若 $f(t) \to y_{zs}(t)$

$$f'(t) \to y'_{zs}(t)$$

（2）积分特性：

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)dx \to \int_{-\infty}^{t} y_{zs}(x)dx$$

2.2-3 如图所示LTI系统，求其阶跃响应。



$g_x''(t)+3g_x'(t)+2g_x(t)=\varepsilon(t)$ $g(t)=-g_x'(t)+2g_x(t)$

$g_x(t)=(C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+0.5)\varepsilon(t)$

$g_x(t)=(-e^{-t}+0.5e^{-2t}+0.5)\varepsilon(t)$

$g(t)=-g_x'(t)+2g_x(t)=(\underbrace{-3e^{-t}+2e^{-2t}}_{\text{瞬态响应}}+\underbrace{1}_{\text{稳态响应}})\varepsilon(t)$

§2.3 卷积积分

(1) 卷积

设函数$f_1(t)$和$f_2(t)$在（$-\infty$，$+\infty$）上有定义，

若含参变量t的广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 收敛

则称此积分为$f_1(t)$和$f_2(t)$的卷积。

$$f(t) = f_1(t) \otimes f_2(t) \quad \text{或} \quad f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

一、信号的卷积积分

根据h(t)的定义：　$\delta(t) \longrightarrow h(t)$

由时不变性：　$\delta(t-\tau) \quad h(t-\tau)$

由齐次性：　$f(\tau)\delta(t-\tau) \quad f(\tau)\,h(t-\tau)$

由积分性：$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$f(t) \quad y_{zs}(t)$

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t) * h(t)$$

二、卷积的图解法

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

卷积过程可分解为四步：

（1）**换元：** t换为 τ → 得 $f_1(\tau)$、$f_2(\tau)$

（2）**反转平移：** $f_2(\tau) \rightarrow f_2(-\tau)$ 平移t → $f_2(t-\tau)$

（3）**两信号重叠部分相乘：** $f_1(\tau) f_2(t-\tau)$

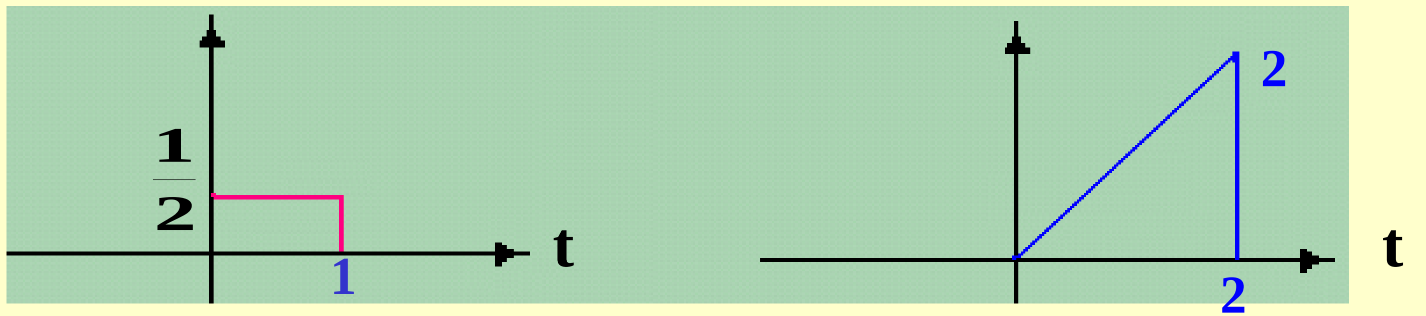
（4）**相乘后图形积分：** τ 从 $-\infty$ 到 ∞ 对乘积项积分

注意：t为参变量

第 16 页

例1 $f(t)$、$h(t)$如图所示，求$y_{zs}(t)=h(t)*f(t)$

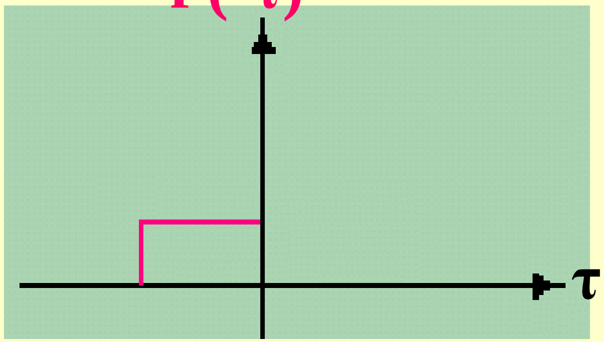
f (t)　　　　　　　　$h(t)$



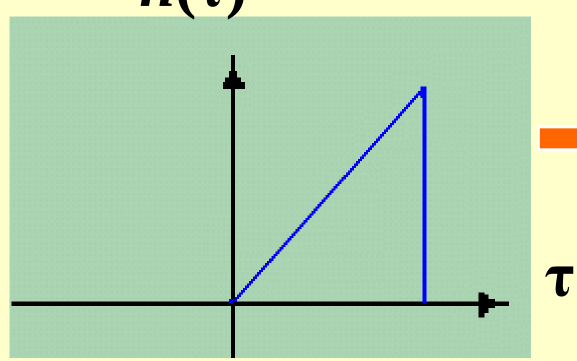
解： $h(t)$函数：换元为$h(\tau)$

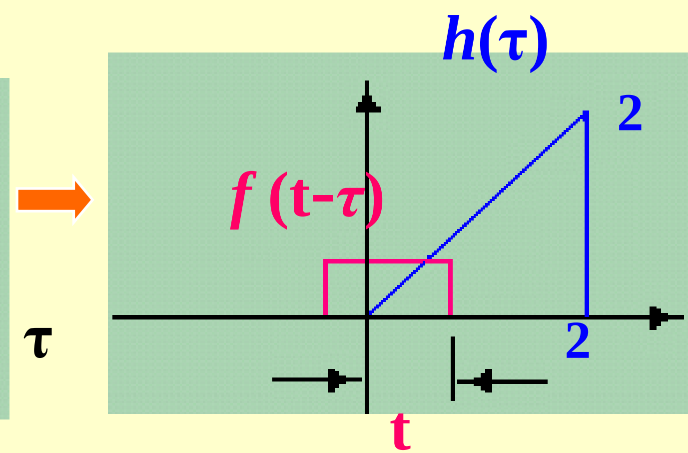
$f(t)$函数：换元为$f(\tau)$、反转 并**平移**t

f (-τ)

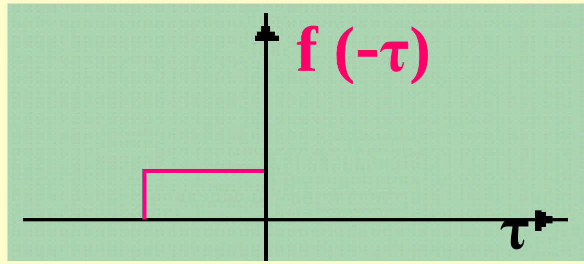


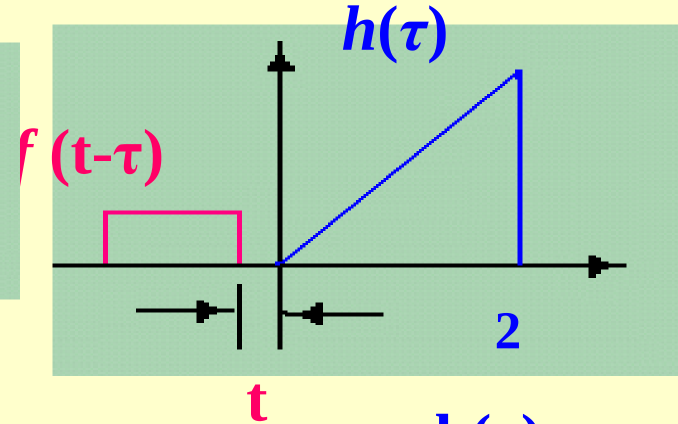
$h(\tau)$





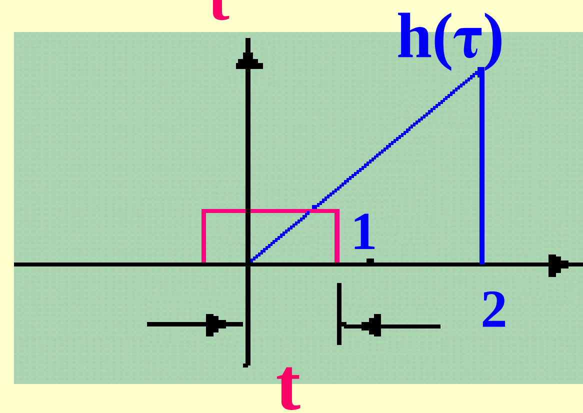
$$y_{zs}(t)=h(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\cdot f(t-\tau)d\tau$$





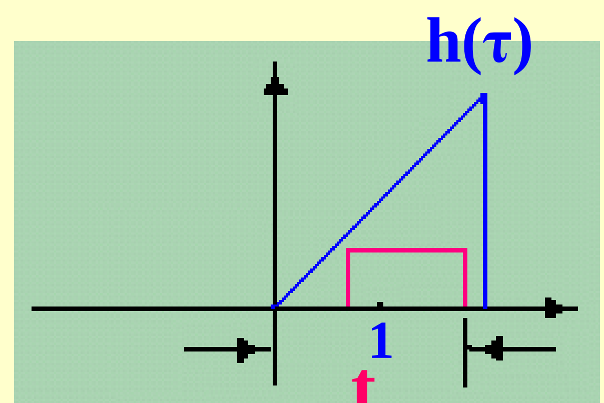
(1) t≤0

$y_{zs}(t)=0$



(2) 0≤t≤1

$$y_{zs}(t)=\int_{0}^{t}\frac{1}{2}\cdot\tau\cdot d\tau=\frac{1}{4}t^{2}$$



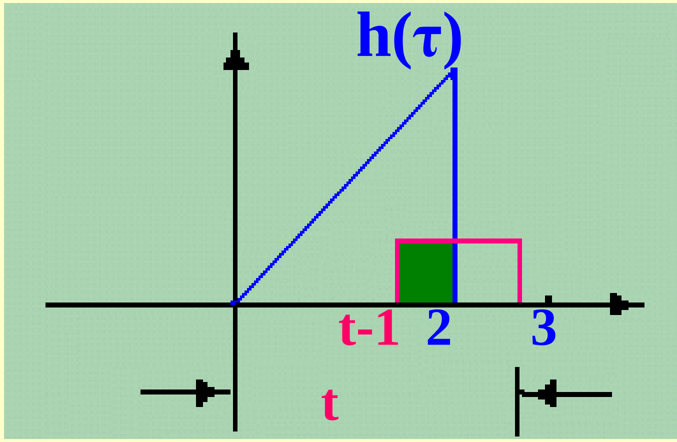
(3) 1≤t≤2

$$y_{zs}(t)=\int_{t-1}^{t}\frac{1}{2}\cdot\tau\cdot d\tau=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}$$

$$y_{zs}(t)=h(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\cdot f(t-\tau)d\tau$$

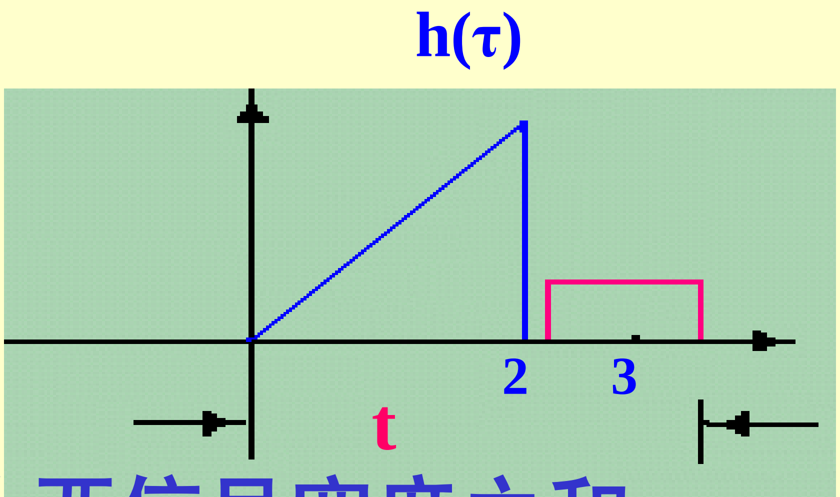
（4） 2≤t≤3

$$y_{zs}(t)=\int_{t-1}^{2}\frac{1}{2}\cdot\tau\cdot d\tau=-\frac{1}{4}t^{2}+\frac{1}{2}t+\frac{3}{4}$$



（5） 3≤t≤+∞

$$y_{zs}(t)=0$$



结论：两信号卷积后宽度为两信号宽度之和。

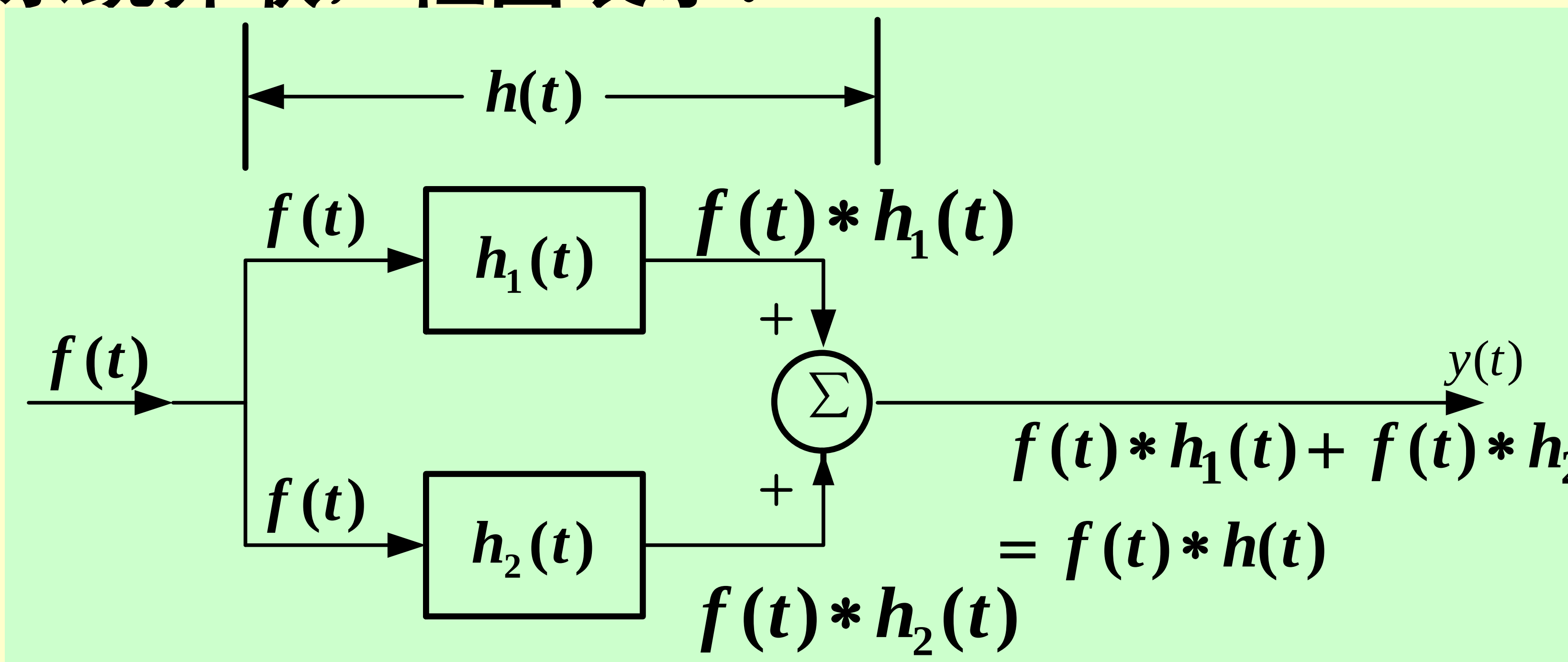
§2.4 卷积积分的性质

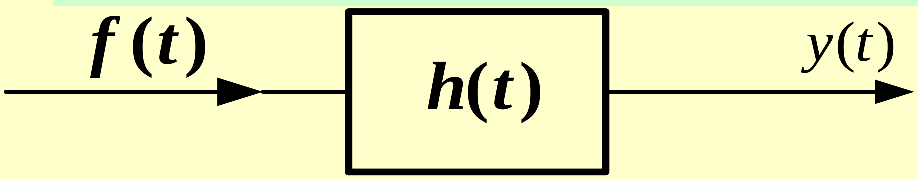
一、卷积代数运算

1. **交换律** $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

2．分配律 $f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$

系统并联，框图表示：





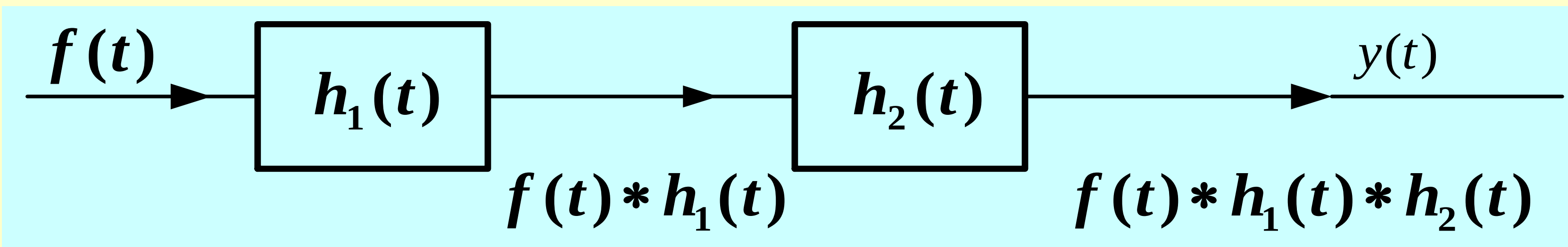
$$h(t)=h_1(t)+h_2(t)$$

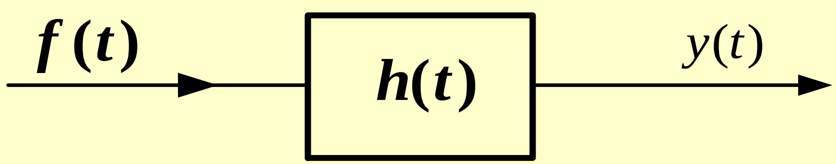
结论：并联系统冲激响应等于子系统冲激响应之和

3．结合律 $[f(t)*f_1(t)]*f_2(t)=f(t)*[f_1(t)*f_2(t)]$

$$f(t)*h_1(t)*h_2(t)=f(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

系统级联，框图表示：





$$h(t)=h_1(t)*h_2(t)$$

结论：串联系统冲激响应等于子系统冲激响应的卷积.