信号与系统

第十四讲

§4.8 LTI系统的频域分析

§4.9 取样定理

思 考 题

1. $f(t)=[u(t+1)-u(t-1)]\cos(100t)$ 的频谱 $F(j\omega)$

2. $f(t)=\dfrac{\sin 5t}{\pi t}\cos 20t$, 求 $F(j\omega)$

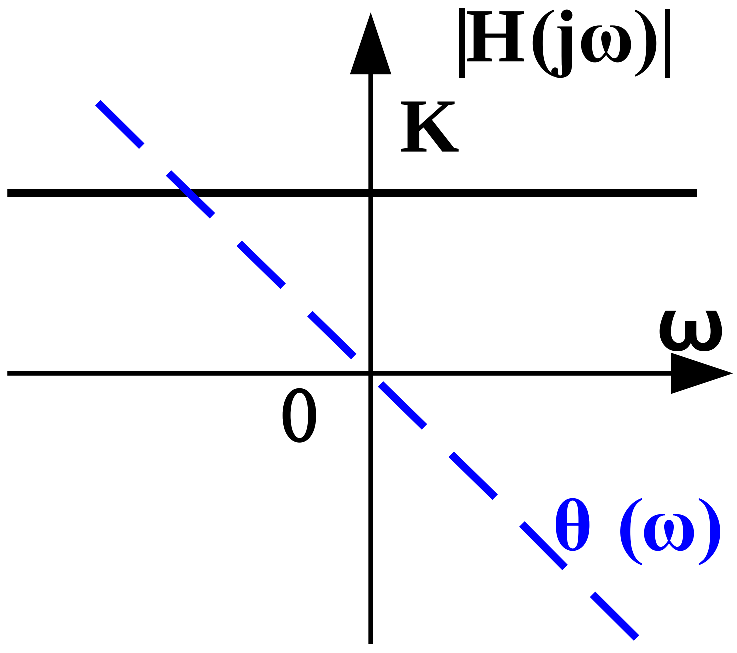
二、无失真传输与滤波

1、无失真传输

（1）信号无失真传输指输出信号与输入信号相比，幅度变化或时移，波形无变化。输入信号 $f(t)$ 无失真传输后 $y(t)=Kf(t-t_d)$

频谱函数为 $Y(j\omega)=Ke^{-j\omega t_d}F(j\omega)$

(2)无失真传输条件：



(a) 对 $h(t)$ 的要求：

$$h(t)=K\delta(t-t_d)$$

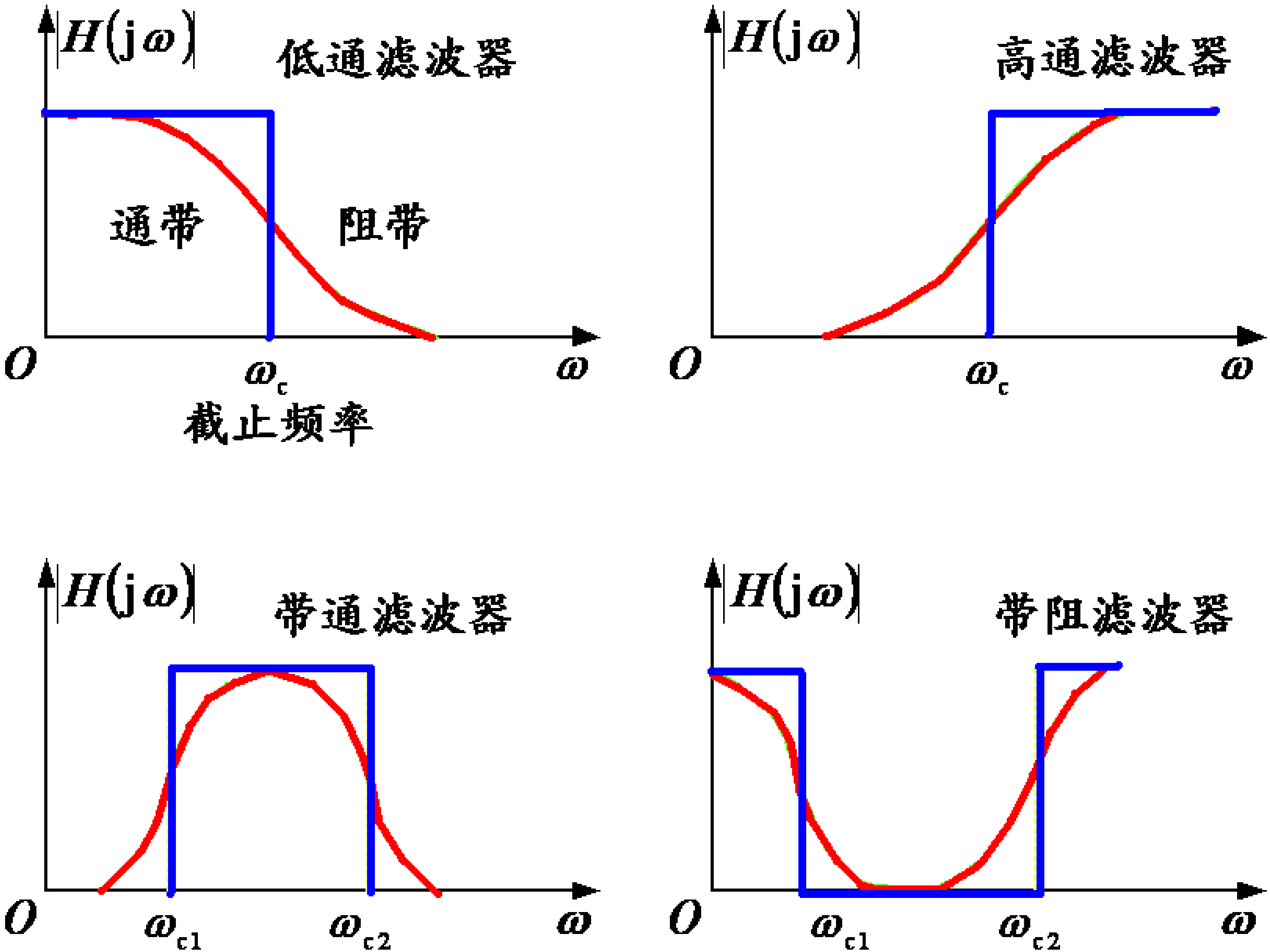
(b) 对H(jω)的要求：

$$H(j\omega)=Ke^{-j\omega t_d}$$

信号无失真传输的理想条件：

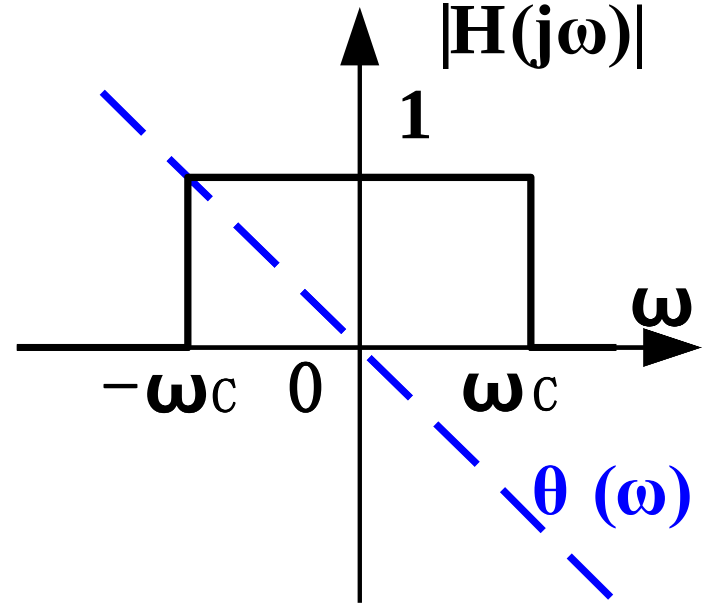
$$|H(j\omega)|=K \quad , \quad \theta(\omega)=-\omega t_d$$

几种常见滤波器



$|H(j\omega)|$
低通滤波器
通带
阻带
O
ω_c
ω
截止频率
$|H(j\omega)|$
高通滤波器
O
ω_c
ω
$|H(j\omega)|$
带通滤波器
O
ω_{c1}
ω_{c2}
ω
$|H(j\omega)|$
带阻滤波器
O
ω_{c1}
ω_{c2}
ω

2、理想低通滤波器



如图所示幅频、相频特性的系统称为**理想低通滤波器**。ω_c称为**截止角频率**。

理想低通滤波器的频率响应可写为：

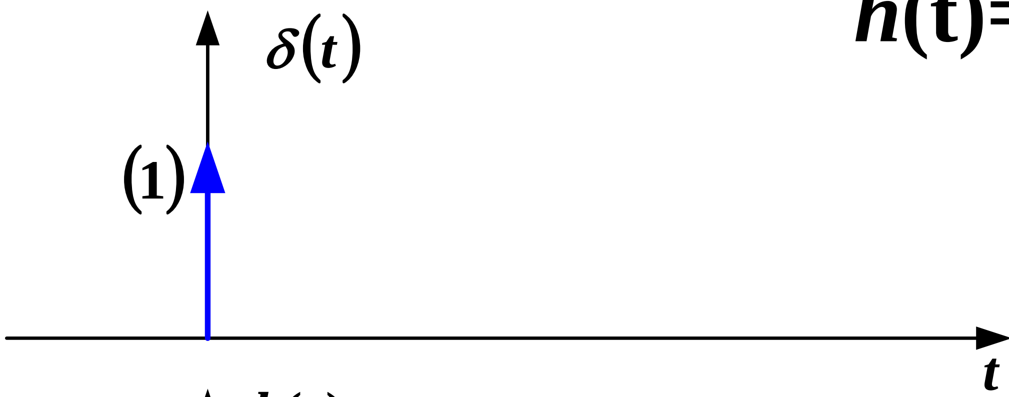
$$H(j\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega t_d}, & |\omega|<\omega_C \\ 0, & |\omega|>\omega_C \end{cases} = g_{2\omega_C}(\omega)e^{-j\omega t_d}$$

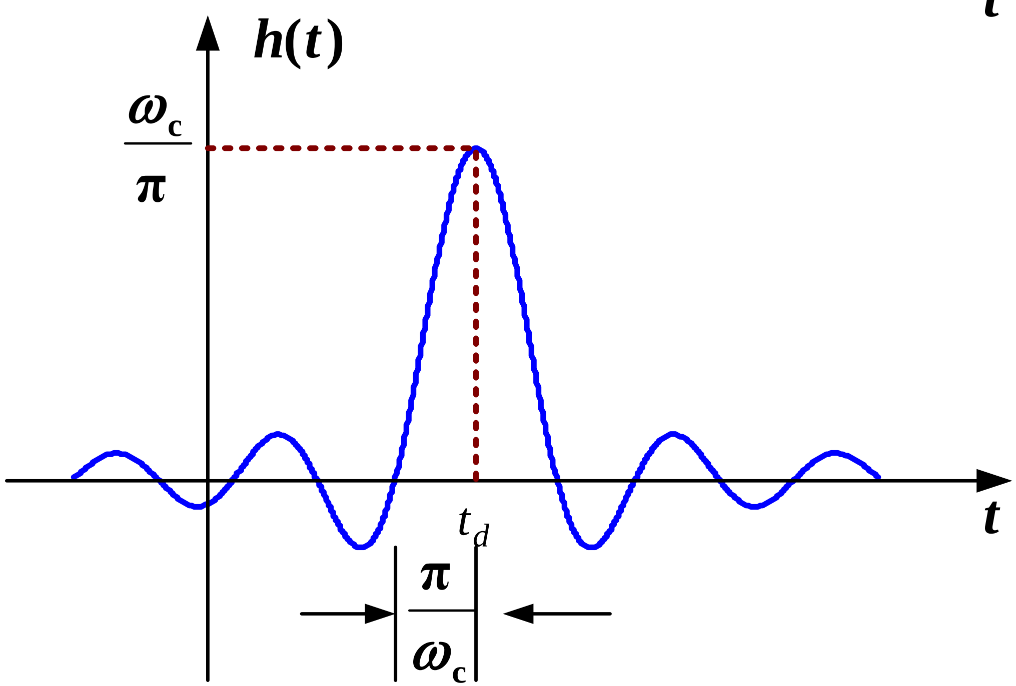
● ω在$0\sim\omega_c$ 的低频段内，信号无失真传输。

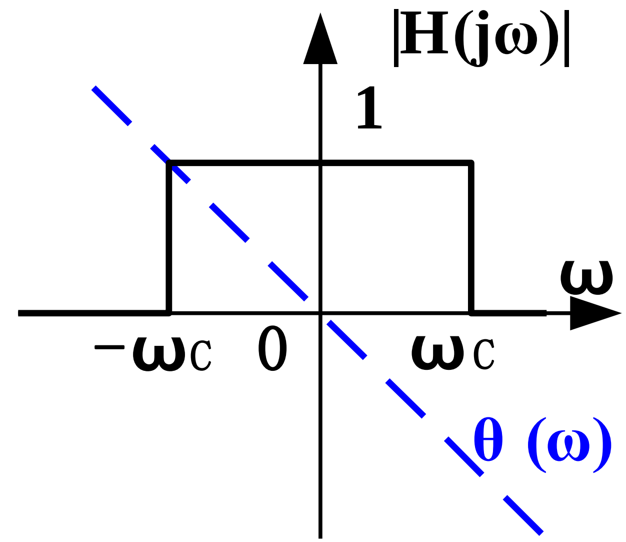
• 理想低通的冲激响应

146页

$$h(t)=\mathscr{F}^{-1}[g_{2\omega c}(\omega)e^{-j\omega td}] = \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_d)]$$

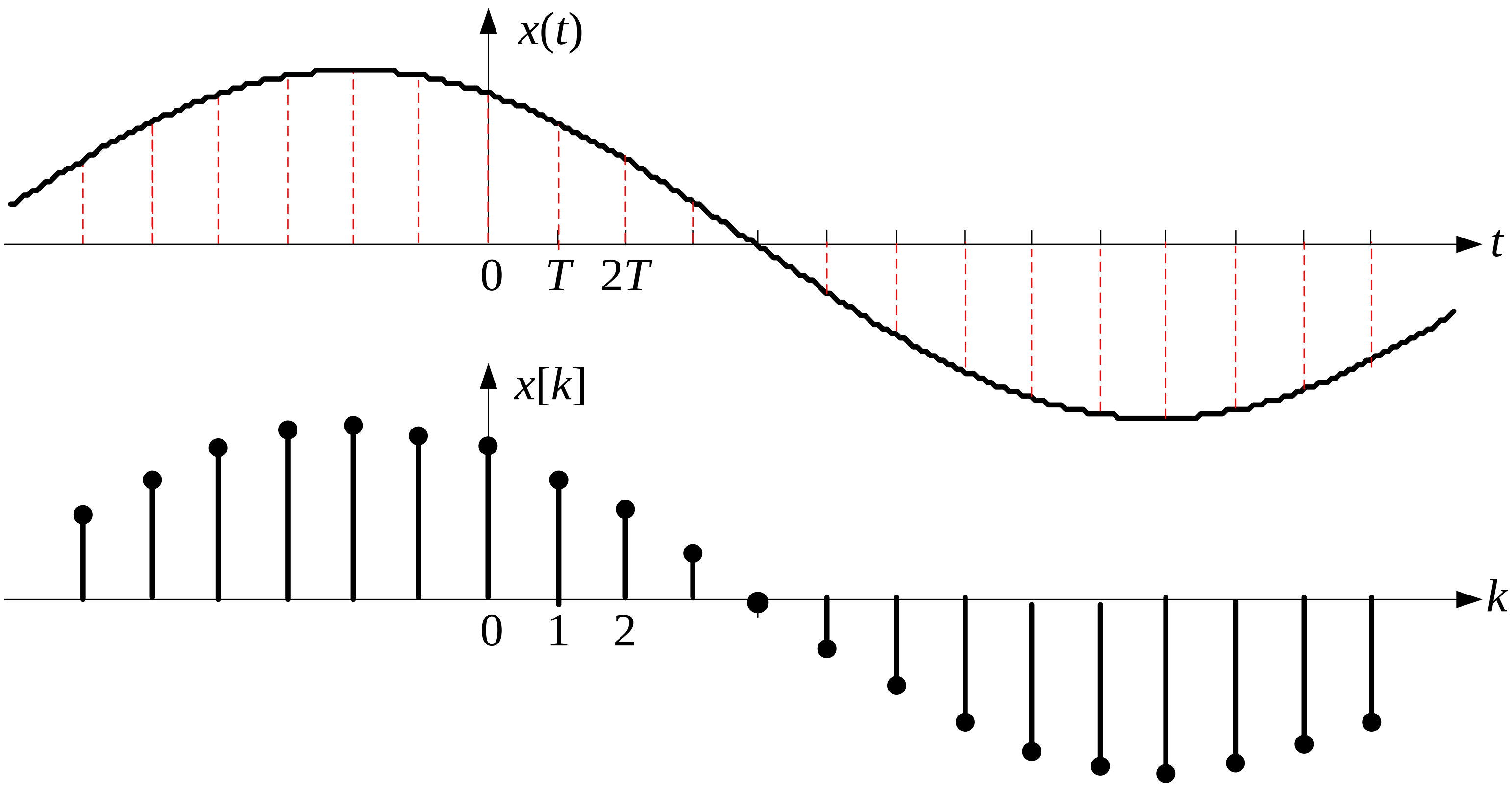






§4.9 取样定理

连续信号可用离散样本值表示。利用这些样本值可以恢复原信号。



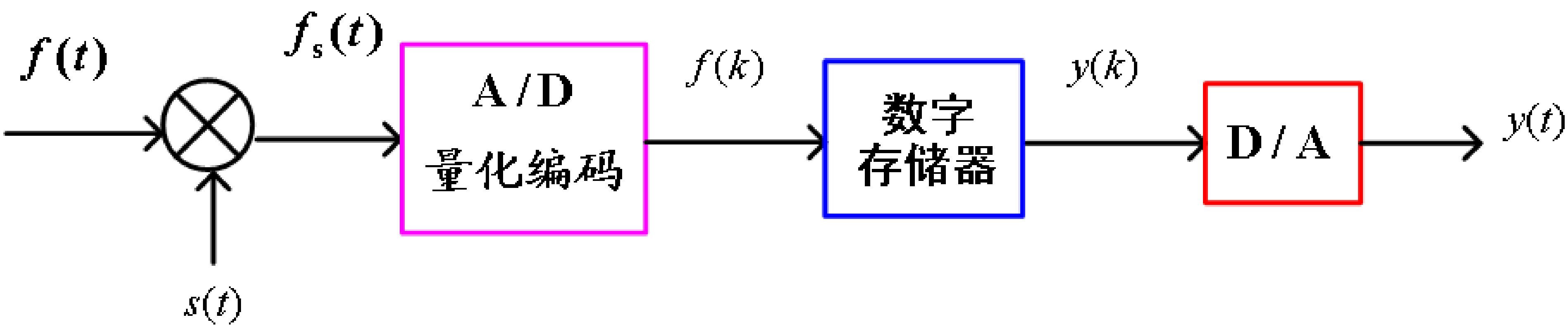
$$x[k] = x(t)\big|_{t=kT}$$

谁提出信号取样？

Harry Nyquist(1889 – 1976)

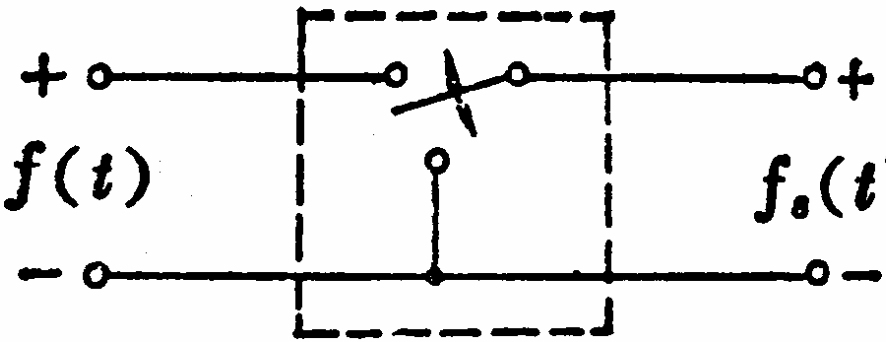
Nyquist，美国物理学家，1889年出生在瑞典。1907年移民到美国并于1912年进入北达克塔大学学习。1917年在耶鲁大学获得物理学博士学位。1917～1934年在AT&T公司工作，后转入Bell电话实验室。

一．信号的取样

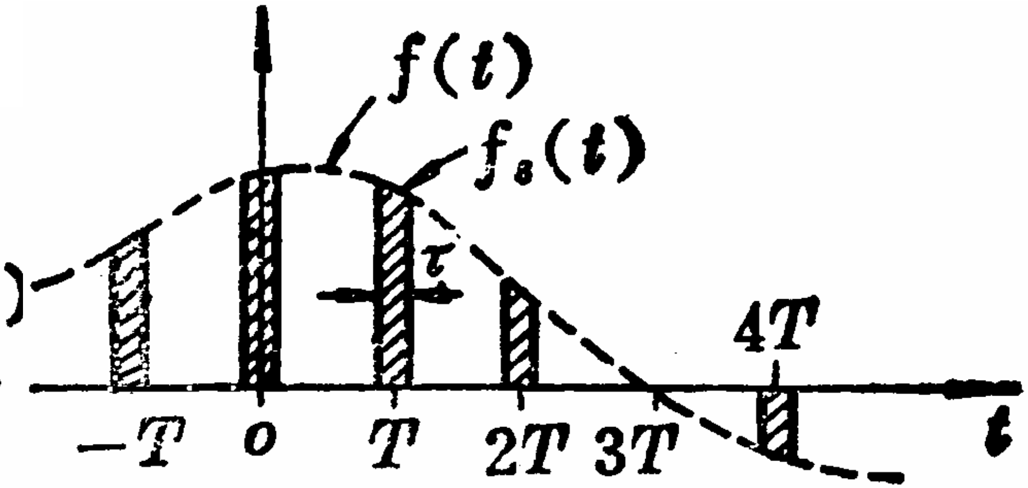


取样是用取样脉冲序列 $s(t)$ 从连续信号 $f(t)$ 中“抽取”离散样本值的过程。得到的离散信号称为取样信号 $f_s(t)$ 。

需要解决的问题：
- $F_s(j\omega)$与$F(j\omega)$的关系
- 由$f_s(t)$能否恢复$f(t)$?

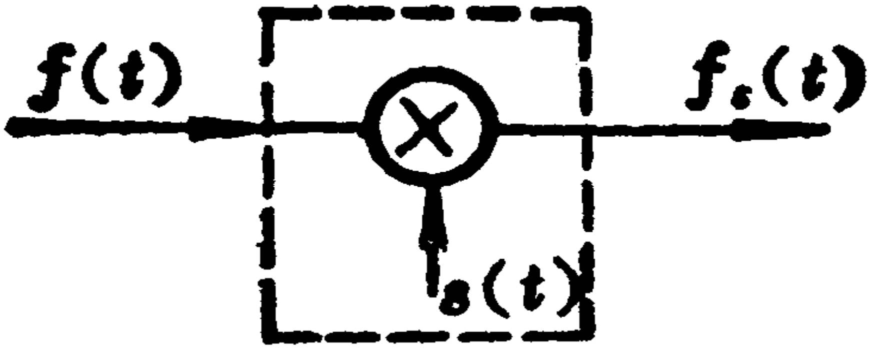


取样器示例



输入原信号f(t)和输出取样信号fs(t)

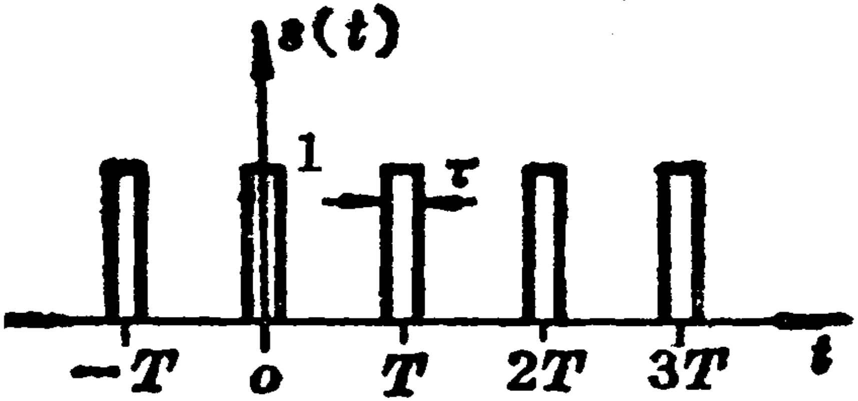
模拟信号的数字处理，要求模拟信号在离散化的过程中不能丢失信息。



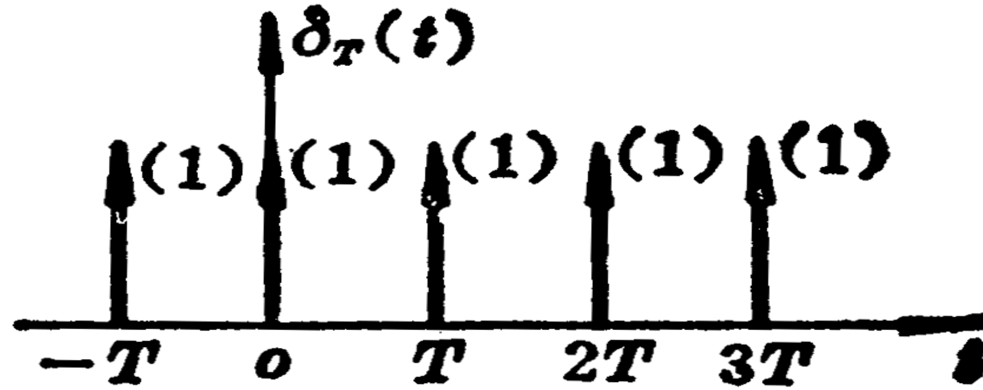
$$f_s(t) = f(t) \cdot s(t)$$

脉宽τ很小，s(t)近似一个冲激序列。

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



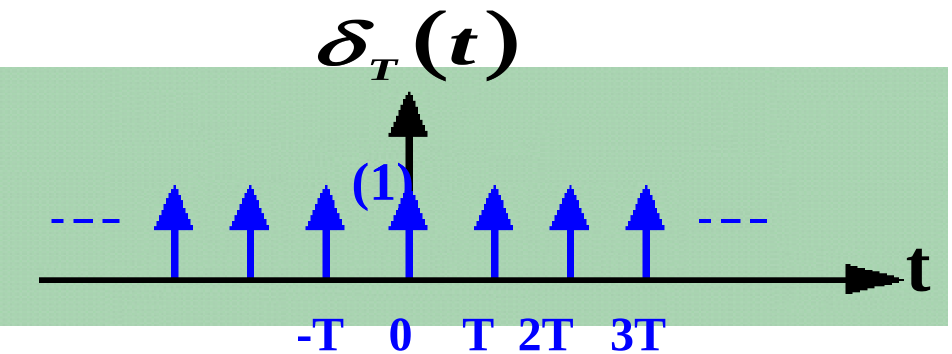
（a）开关函数

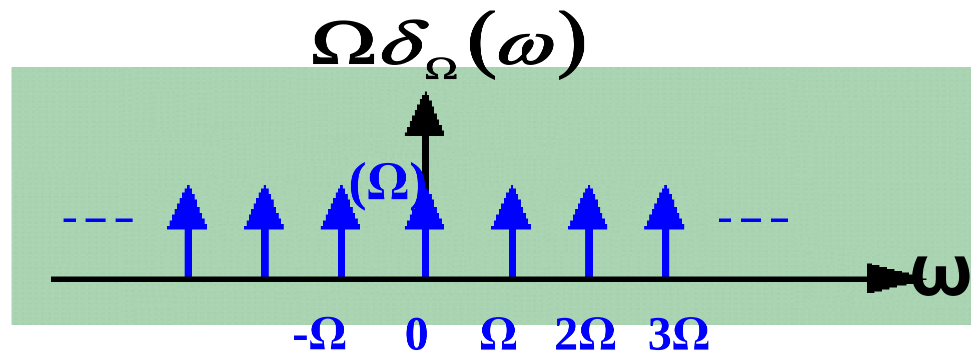


（b）单位冲激序列

168页

例4.7-2 周期信号如图，求其傅里叶变换。





解：表达式： $$\delta_T(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)$$

傅里叶系数：

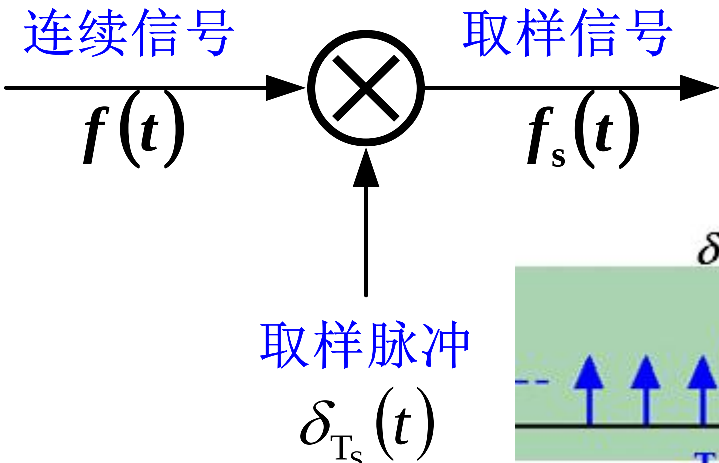
$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\Omega t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta_T(t)e^{-jn\Omega t}dt=\frac{1}{T}$$

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{jn\Omega t}\longleftrightarrow F_T(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega)$$

$$F[\delta_T(t)]=\frac{2\pi}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)=\Omega\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)$$

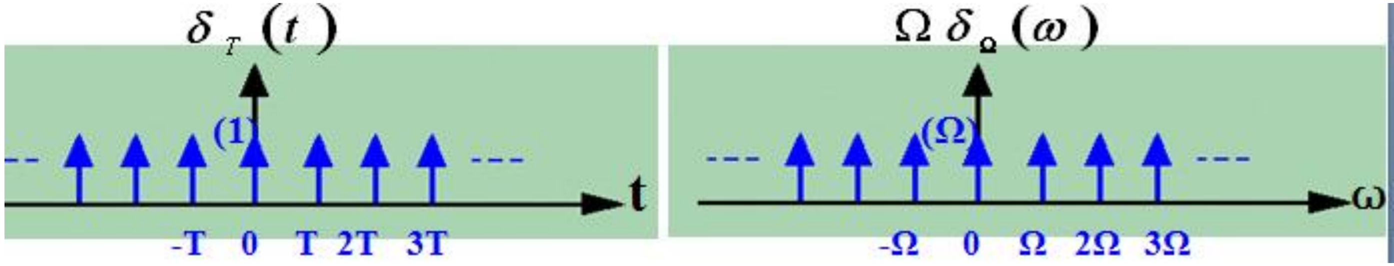
一、信号的取样

1. 理想取样（周期单位冲激取样）



$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) \ (-\omega_m < \omega < \omega_m)$$

$$s(t) \longleftrightarrow S(j\omega) \quad f_s(t) \longleftrightarrow F_s(j\omega)$$



$$s(t) = \delta_{T_S}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \leftrightarrow S(j\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

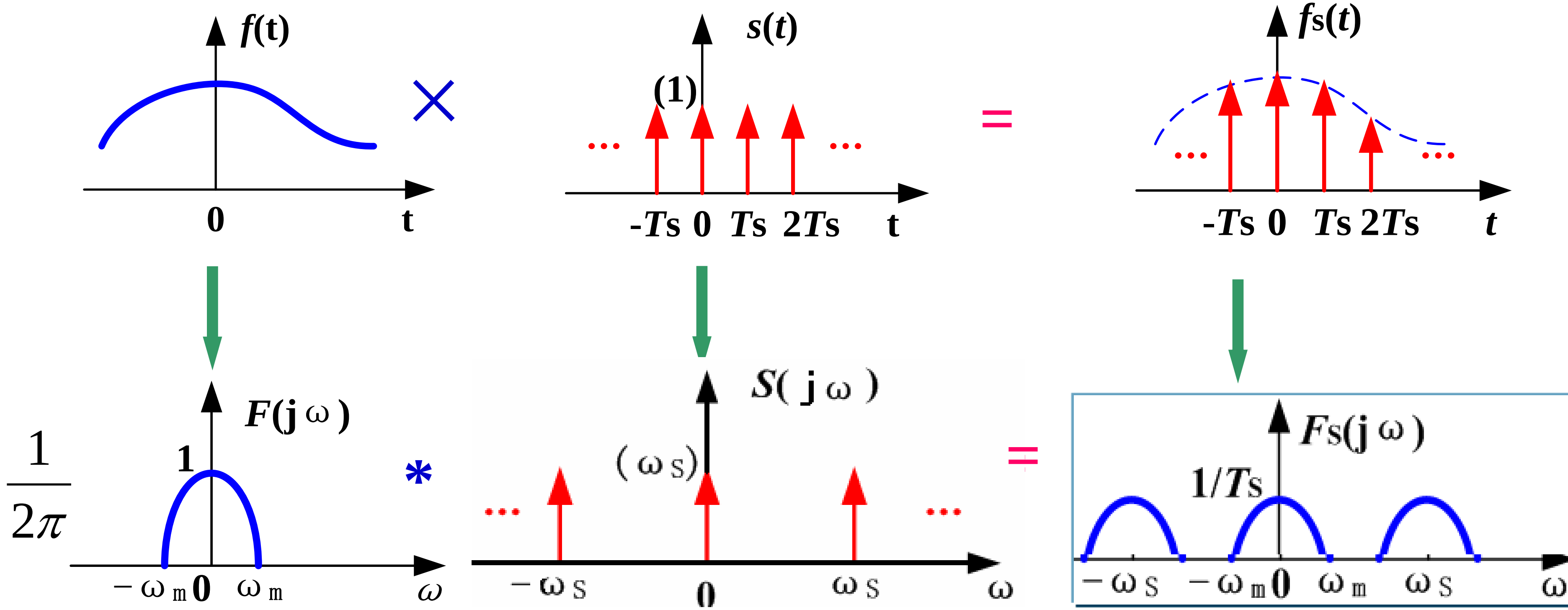
$$F_s(j\omega) = \mathcal{F}\left[f(t)\delta_{T_S}(t)\right] = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * S(j\omega) = \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$

T_S 取样间隔 ω_S 取样角频率

2．冲激取样信号的频谱

T_s 取样间隔

ω_s 取样角频率



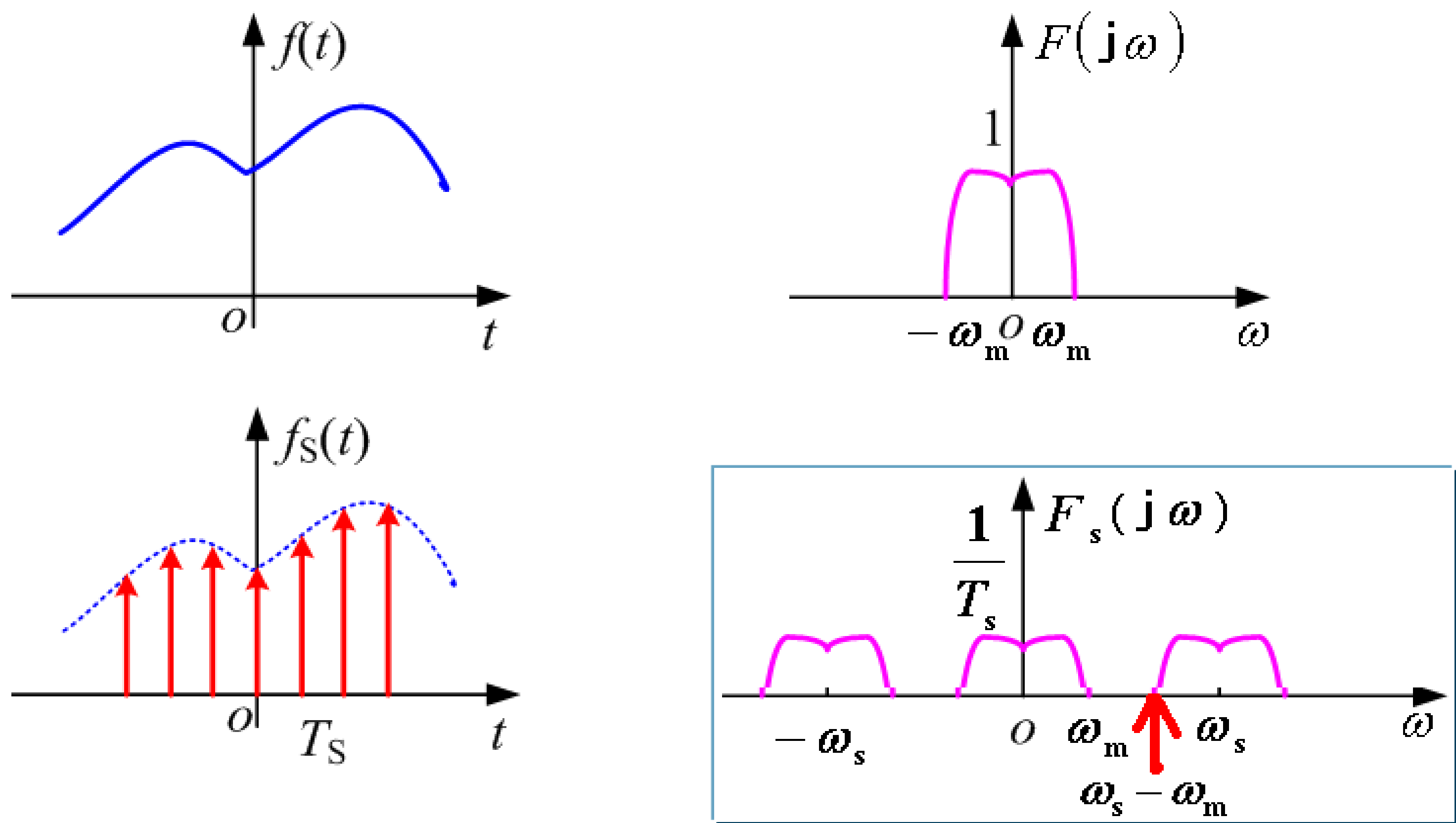
$\omega_s \geq 2\omega_m$，$f_s(t)$频谱不发生混叠。

最低允许的取样频率 $f_s=2f_m$ 称为奈奎斯特频率；

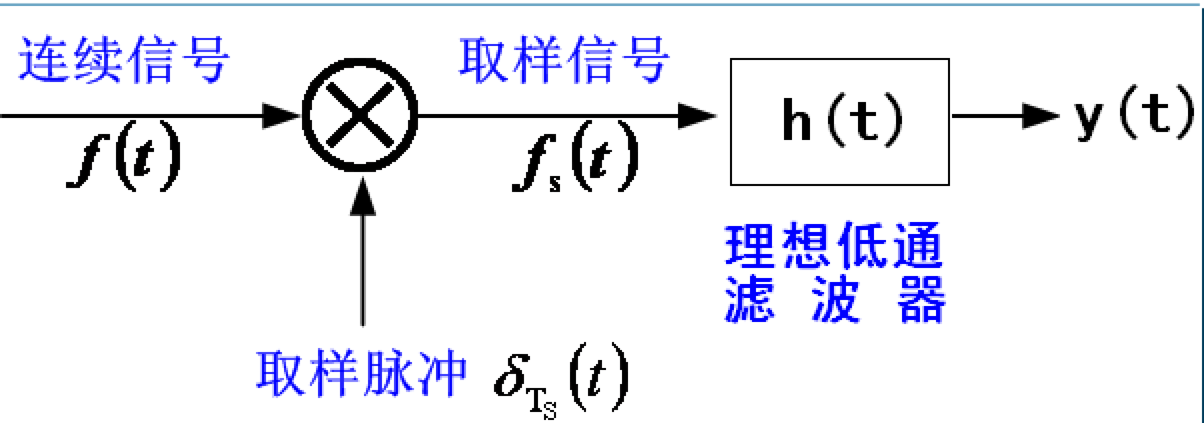
最大允许的取样间隔 $T_s=1/f_s$ 称为奈奎斯特间隔。

二、时域取样定理

频谱在区间（$-\omega_m$，ω_m）以外为0的**带限信号** $f(t)$，可由在均匀间隔 T_s 上的**样点值** $f(kT_s)$ 确定。

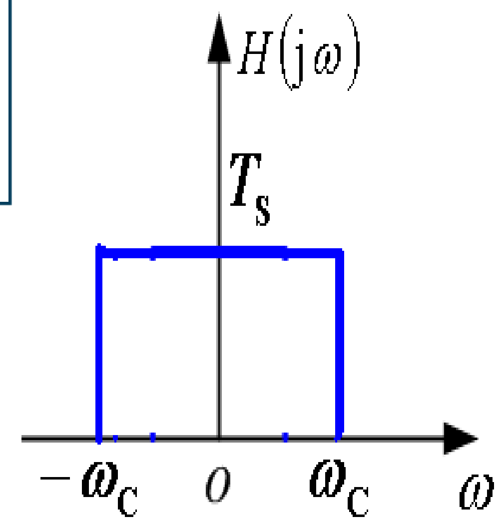


由取样信号恢复原信号



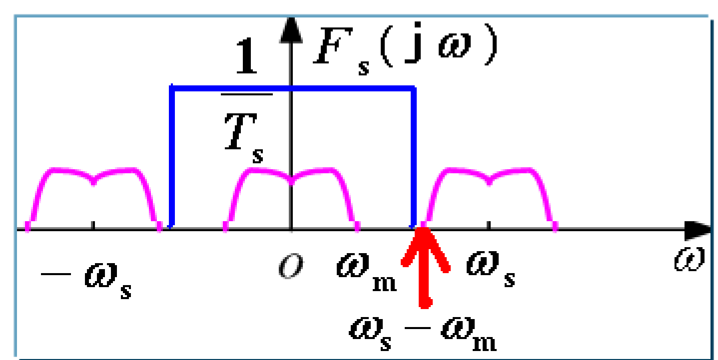
$$y(t)=f_s(t)*h(t)$$

理想低通滤波器



$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases} T_\mathrm{S} & |\omega|<\omega_\mathrm{C} \\ 0 & |\omega|>\omega_\mathrm{C} \end{cases}$$

$$Y(\mathrm{j}\omega)=F_\mathrm{s}(\mathrm{j}\omega)\cdot H(\mathrm{j}\omega)$$

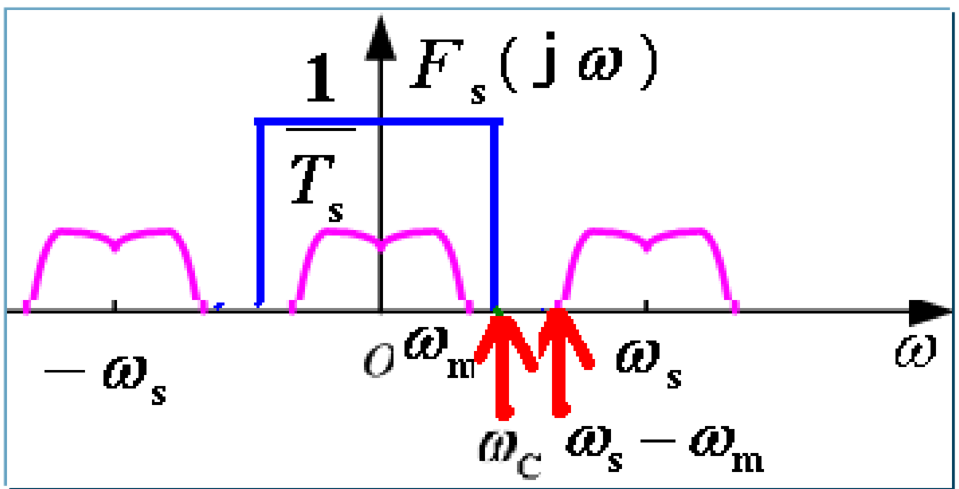


滤高频成分，恢复原信号

恢复原信号的两个条件

（1） $f(t)$ 必须是带限信号；

（2）取样频率 $f_s \geqslant 2f_m$ 　取样间隔 $T_s \leqslant$ （1/2） T_m



$\omega m \leqslant \omega_C \leqslant \omega_S - \omega m$

$2\omega m \leqslant \omega_S$

1、要对50Hz～20KHz的音频信号作A/D转换，则A/D芯片的转换时间不能大于：

A、100μs　　B、50μs

C、20μs　　D、10μs

$$f_m = 20\,\mathrm{KHz},\ f_s = 2f_m$$

$$f_s = 40KHz,\ T_s = \frac{1}{f_s}$$

2、确定下列信号Sa(100t)的最低取样率与奈奎斯特间隔。

解答

奈奎斯特频率（最低取样率）：

$$f_s = 2f_m = \frac{100}{\pi}\,\mathrm{Hz}$$

奈奎斯特间隔：

$$T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{\pi}{100}\,\mathrm{s}$$

3、确定信号Sa(100t)+Sa^2(60t)的最低取样率与奈奎斯特间隔。

解答

奈奎斯特频率（最低取样率）：

$$f_s = 2f_m = \frac{120}{\pi}\,\mathrm{Hz}$$

奈奎斯特间隔：

$$T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{\pi}{120}\,\mathrm{s}$$

七、卷积定理

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega), \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$$

$$f_1(t)*f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)F_2(\mathrm{j}\omega)$$

$$f_1(t)\, f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$$

结论：两信号卷积后宽度为两信号宽度之和。