信号与系统

第十六讲

第五章 连续系统的*s*域分析

§5.2 拉普拉斯变换的性质

§5.3 拉普拉斯逆变换

思 考 题

1. 两信号卷积后的宽度是两信号宽度（　　）。
信号在时域扩展a倍，在频域、复频域（　　）a倍

2. 信号$x_1(t)$的最高频率为500Hz，信号$x_2(t)$的最高频率为1500Hz，对如下信号进行采样，求允许的最大采样间隔T

(1) $f_1(t)=x_1(t)*x_2(t)$

(2) $f_2(t)=x_1(t)x_2(t/3)$

五、时域微分特性（定理）

若 $f(t) \longleftrightarrow F(s)$, $\mathrm{Re}[s]>\sigma_0$,

则 $f'(t) \longleftrightarrow sF(s) - f(0\_)$

推广：$L\left[\dfrac{\mathrm{d} f^{2}(t)}{\mathrm{d} t}\right] = s\left[sF(s) - f(0\_)\right] - f'(0\_)$

$$= s^{2}F(s) - sf(0\_) - f'(0\_)$$

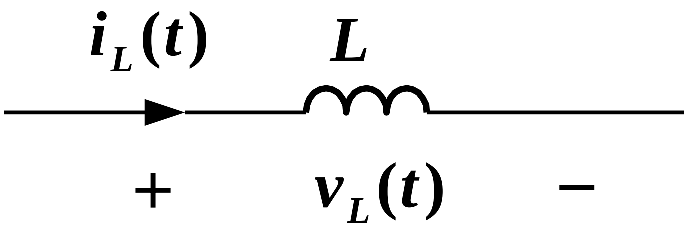
若 $f(t)$ 为因果信号，则 $f^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^{n}F(s)$

$$\delta'(t) \leftrightarrow s$$

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (\mathrm{j}\omega)^{n} F(\mathrm{j}\omega)$$

$$f'(t) \longleftrightarrow sF(s) - f(0_-)$$

电感元件的s域模型

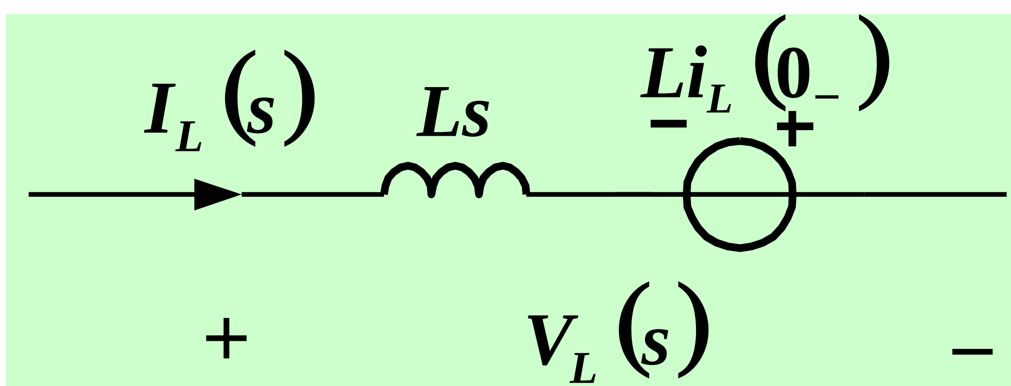


$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

设 $\mathcal{L}[i_L(t)] = I_L(s), \mathcal{L}[v_L(t)] = V_L(s)$

应用原函数微分性质

$$V_L(s) = L*[sI_L(s) - i_L(0_-)] = sLI_L(s) - Li_L(0_-)$$



六、时域积分特性(定理)

若$L[f(t)]=F(s)$，则

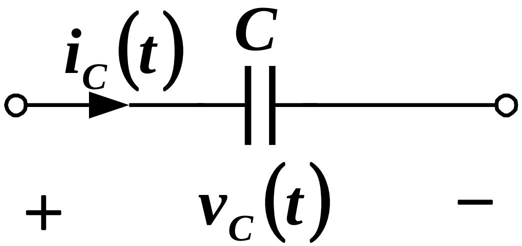
$$L\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$$

若$f(t)$为因果信号，则$f^{(-n)}(t)\longleftrightarrow F(s)/s^n$

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x \longleftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$$

电容元件的s域模型

$$L\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$$

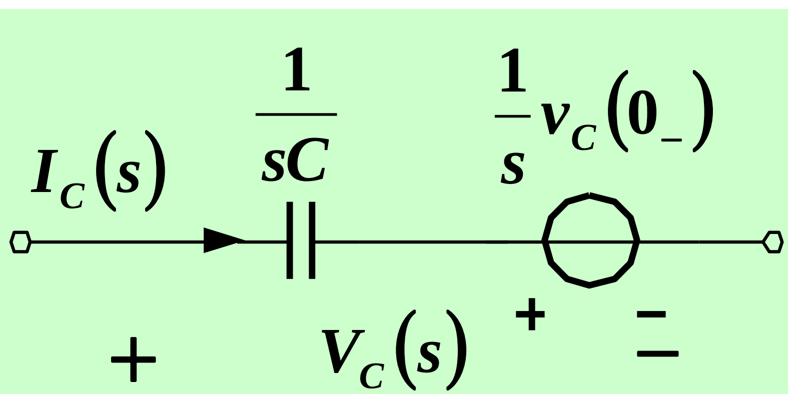


$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_c(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\frac{1}{C}i_C^{(-1)}(0_-)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0_-} i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$=v_C(0_-)$$

$$V_C(s)=\frac{1}{C}\left[\frac{I_C(s)}{s}+\frac{i_C^{(-1)}(0_-)}{s}\right]$$

$$=\frac{1}{sC}I_C(s)+\frac{1}{s}v_C(0_-)$$



设$L[i_C(t)]=I_C(s)$,

$L[v_C(t)]=V_C(s)$

七．卷积定理

若$L[f_1(t)] = F_1(s)$，$L[f_2(t)] = F_2(s)$，$f_1(t), f_2(t)$为有始信号

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$$

$$L[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} F_1(s) * F_2(s)$$

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)F_2(\mathrm{j}\omega)$$

$$f_1(t)\, f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\mathrm{j}\omega) * F_2(\mathrm{j}\omega)$$

八、s域微分和积分

$$(-jt)^n f(t) \longleftrightarrow F^{(n)}(j\omega)$$

若$f(t) \longleftrightarrow F(s)$, Re[s]>σ_0, 则

$$(-t) f(t) \longleftrightarrow F'(s) \qquad (-t)^n f(t) \longleftrightarrow F^{(n)}(s)$$

$$\frac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \int_s^{\infty} F(\eta) d\eta$$

例1： $t^2 e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow ?$

$$e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+2}$$

$$t^2 e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s+2}\right) = \frac{2}{(s+2)^3}$$

$$\pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt} f(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(jx) dx$$

九. 初值定理和终值定理

若$f(t)$及$\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$可以进行拉氏变换，且$f(t)\longleftrightarrow F(s)$,则

$$\lim_{t\to 0_+} f(t) = f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

例：$F(s)=\dfrac{2s}{s^2+2s+2}$ 求f(t)的初值与终值

解：$f(0+)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{2s^2}{s^2+2s+2}=2$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{2s^2}{s^2+2s+2}=0$$

§ 5.3 拉普拉斯逆变换

通常$F(s)$具有如下的有理分式形：

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+---+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+---+a_1 s+a_0}$$

a_i, b_i为实数　当$m<n$，$F(s)$为有理真分式

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\circ---\circ(s-z_m)}{a_n(s-s_1)(s-s_2)---\circ(s-s_n)}$$

零点　$z_1, z_2, z_3 -- z_m$是$B(s)=0$的根，称为$F(s)$的零点

极点　$s_1, s_2, s_3 -- s_n$是**是A(s)=0的根，称为F(s)极点**

$$F(s)=\frac{B(s)}{a_n(s-s_1)(s-s_2)---(s-s_n)}$$

$s_1, s_2, s_3 --- s_n$ 为不同的实根数

$$F(s)=\frac{k_1}{s-s_1}+\frac{k_2}{s-s_2}+---+\frac{k_n}{s-s_n}$$

求得 $k_1, k_2, k_3 -- k_n$ 即可将F(s)展开为部分分式

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t}\varepsilon(t)$$

求F(S)单阶极点

$$F(s)=\frac{2s^2+3s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$F(s)=\frac{2s^2+3s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$F(s)=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}+\frac{k_3}{s+3}$$

如何求系数 k_1，k_2，k_3、、、、、、?

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{k_1}{s-s_1}+\frac{k_2}{s-s_2}+----+\frac{k_n}{s-s_n}$$

Ki的求法

$$Ki=\frac{B(s_i)}{A'(s_i)}$$

$$F(s)=\frac{2s^2+3s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$F(s)=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}+\frac{k_3}{s+3}$$

$$k_1=\frac{2s^2+3s+3}{3s^2+12s+11}\Big|_{s=-1}=1$$

同理：$k_2=-5$

$k_3=6$

$$\therefore F(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{-5}{s+2}+\frac{6}{s+3}$$

$$f(t)=(e^{-t}-5e^{-2t}+6e^{-3t})\varepsilon(t)$$

§5.4 复频域分析

一、微分方程的变换解

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1 y^{(1)}(t)+a_0 y(t)$$

$$=b_m f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\ldots+b_1 f^{(1)}(t)+b_0 f(t)$$

根据时域微分特性

$$Y(s)=\frac{M(s)}{A(s)}+\frac{B(s)}{A(s)}F(s)=Y_{zi}(s)+Y_{zs}(s)$$

$y(t)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $y_{zi}(t)$ $\quad$ $y_{zs}(t)$

5.4-1 描述某LTI系统的微分方程为

$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t)$

初始状态$y(0_)=2$，$y'(0\_)=1$，

激励$f(t)=\varepsilon(t)$，求系统的零输入响应、零状态响应、全响应

解:

$$Y(s)=\underbrace{\frac{sy(0\_)+y'(0\_)+3y(0\_)}{s^2+3s+2}}_{Y_{zi}(s)}+\underbrace{\frac{2(s+3)}{s^2+3s+2}F(s)}_{Y_{zs}(s)}$$

$$F(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=Y_{zi}(s)+Y_{zs}(s)=\frac{2s+7}{(s+1)(s+2)}+\frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=Y_{zi}(s)+Y_{zs}(s)=\frac{2s+7}{(s+1)(s+2)}+\frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{s}$$

$$Y_{zi}(s)=\frac{2s+7}{(s+1)(s+2)}=\frac{5}{s+1}-\frac{3}{s+2}$$

$$y_{zi}(t)=(5e^{-t}-3e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$Y_{zs}(s)=\frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{s}=\frac{3}{s}-\frac{4}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

$$y_{zs}(t)=(3-4e^{-t}+e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$y(t)=(3+e^{-t}-2e^{-2t})\varepsilon(t)$$

3：强迫响应 / 稳态响应

$e^{-t}-2e^{-2t}$：自由响应 / 瞬态响应

强迫响应:

象函数极点是F(S)极点

二、系统函数

系统函数$H(s)$定义为 $$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}$$

它只与系统的结构、元件参数有关，而与激励、初始状态无关。

$y_{zs}(t)= h(t)*f(t)$ ⟶ $Y_{zs}(s)=\mathcal{L}[h(t)]F(s)$

$H(s)=\mathcal{L}[h(t)]$

5.4-6 已知输入$f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$，某LTI因果系统的零状态响应 $y_{zs}(t)=(3e^{-t}-4e^{-2t}+e^{-3t})\varepsilon(t)$ 求系统的冲激响应和描述该系统的微分方程

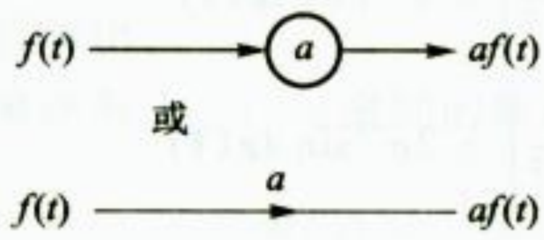
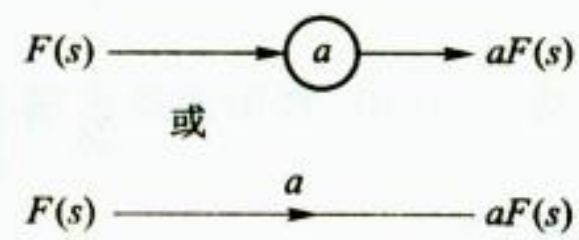
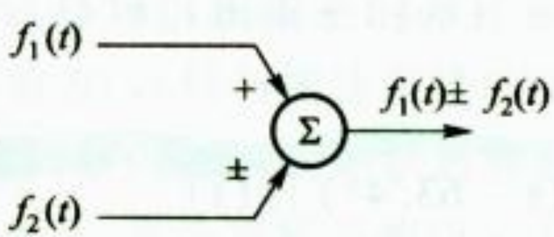
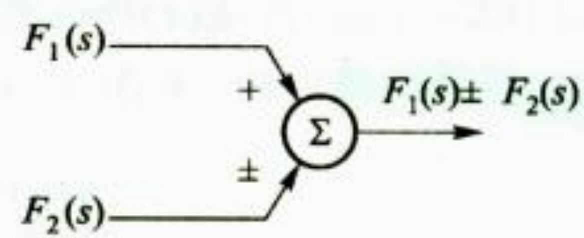
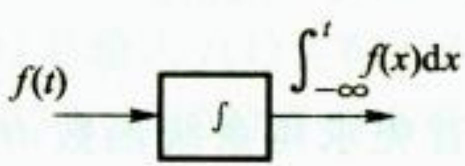
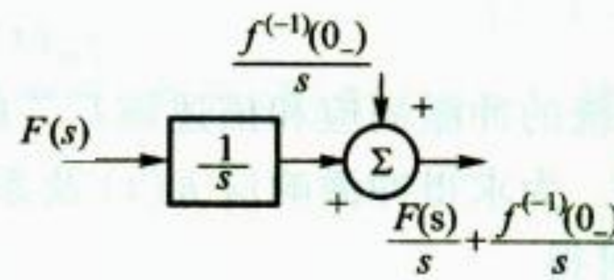
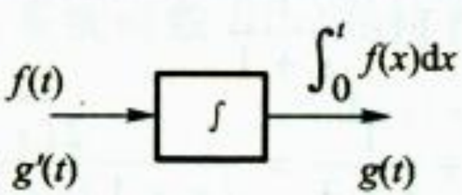
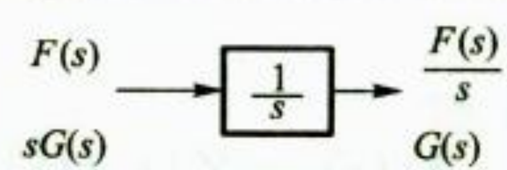
解：
$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}=\frac{2(s+4)}{(s+2)(s+3)}=\frac{2s+8}{s^2+5s+6}=\frac{4}{s+2}+\frac{-2}{s+3}$$

$$h(t)=(4e^{-2t}-2e^{-3t})\varepsilon(t)$$

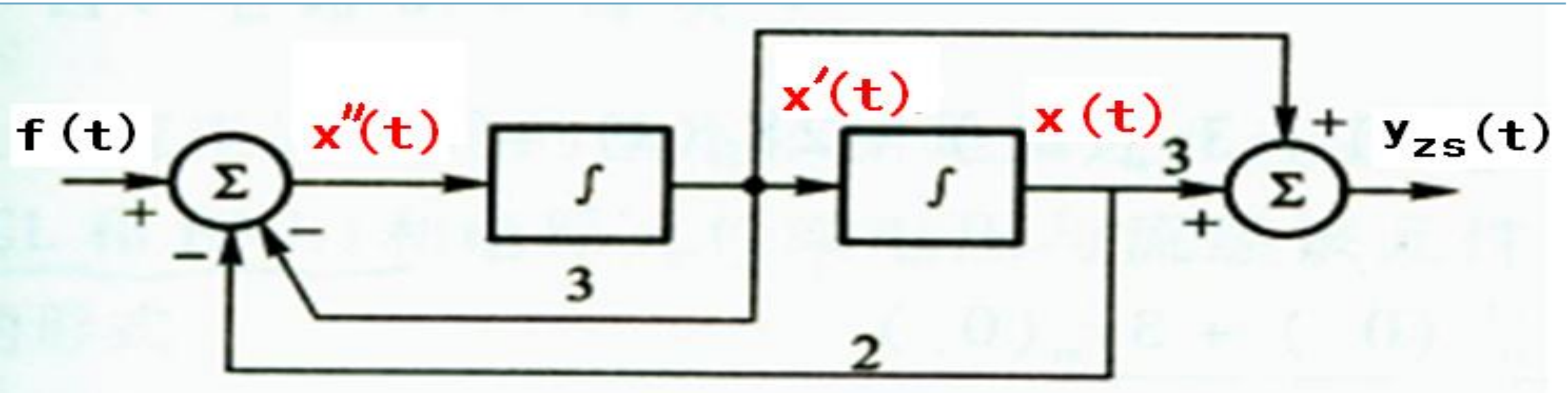
$$s^2Y_{zs}(s)+5sY_{zs}(s)+6Y_{zs}(s)=2sF(s)+8F(s)$$

$$y_{zs}''(t)+5y_{zs}'(t)+6y_{zs}(t)=2f'(t)+8f(t)$$

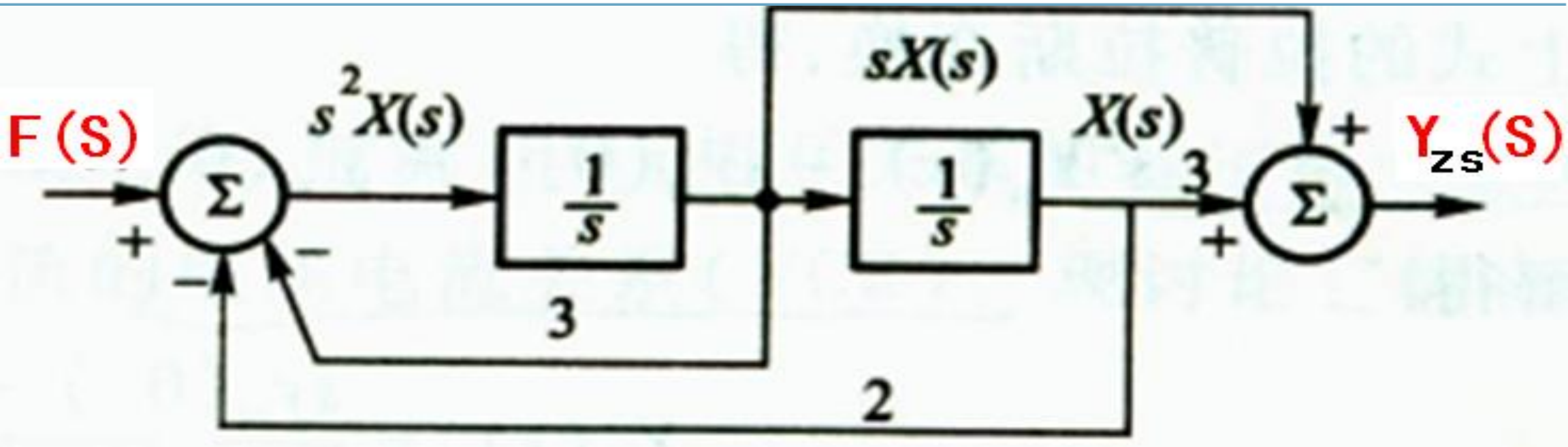
三、系统的s域框图

名称	时域模型	s 域模型
数乘器 （标量乘法器）		
加法器		
积分器		
积分器 （零状态）		

5.4-7 已知输入$f(t)=\varepsilon(t)$，求冲激响应$h(t)$和零状态响应 $y_{zs}(t)$。

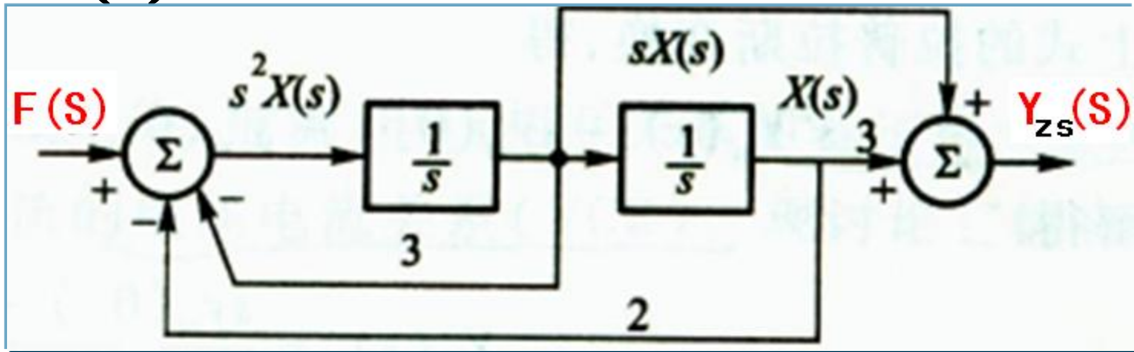


S域框图



解：画出s域框图，设右边加法器输入为X(s)

$s^2X(s) = F(s) - 3sX(s) - 2X(s)$



$$X(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}F(s)$$

$Y_{zs}(s) = sX(s) + 3X(s)$

$$= \frac{s+3}{s^2+3s+2}F(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}\frac{1}{s} = \frac{\frac{3}{2}}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2}$$

$$y_{zs}(t) = \left(\frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

$$H(S) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t)$$