信号与系统

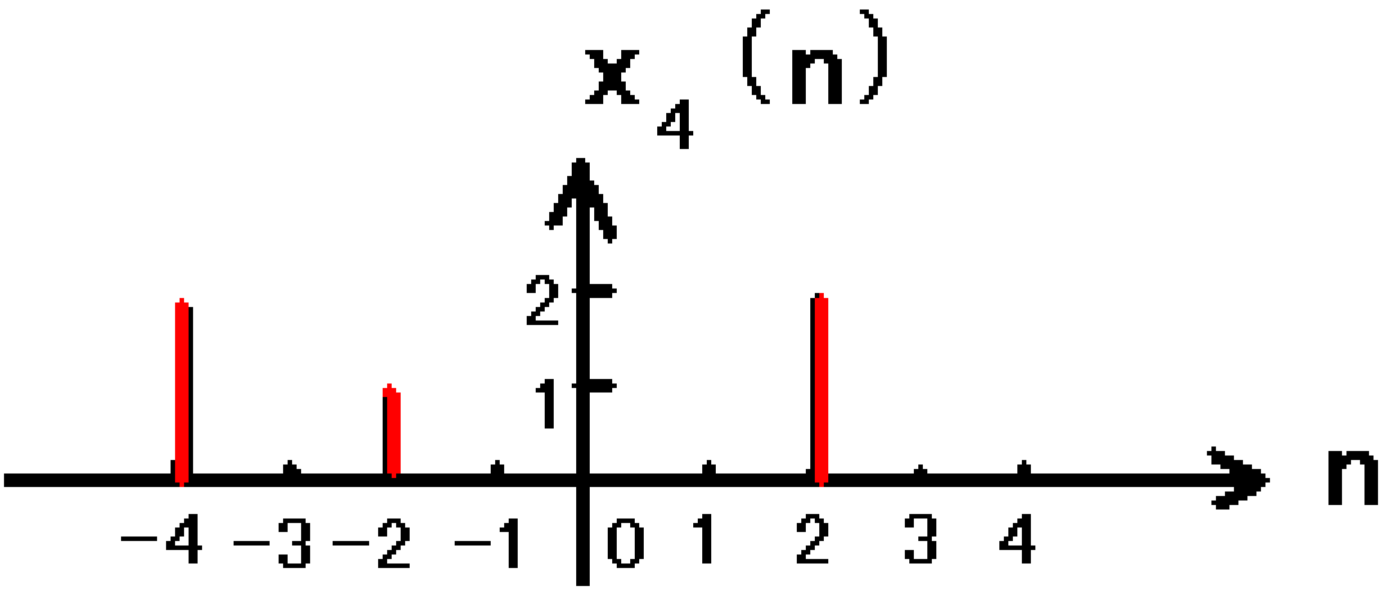
第二十四讲

§3.1 LTI离散系统的响应

§3.2 单位序列响应和阶跃响应

思考题

已知$x_4[n]$波形，画出$x_4[2-2n]$序列的图形。



P189

2. 特解$y_p(k)$:

特解的形式与激励的形式类似

激励 $f(k)$	响应 $y(k)$ 的特解 $y_p(k)$
F(常数)	P(常数)
k^m	$P_m k^m + P_{m-1}k^{m-1} + \cdots + P_1 k + P_0$(特征根均不为1) $k^r(P_m k^m + P_{m-1}k^{m-1} + \cdots + P_1 k + P_0)$(有$r$重为1的特征根)
a^k	Pa^k(a不等于特征根) $(P_1 k + P_0)a^k$(a等于特征单根) $(P_r k^r + P_{r-1}k^{r-1} + \cdots + P_0)a^k$($a$等于$r$重特征根)
$\cos(\beta k)$ $\sin(\beta k)$	$P_1\cos(\beta k) + P_2\sin(\beta k)$(特征根不等于$e^{\pm j\beta}$)

例3.1-2 系统方程 $y(k)+4y(k-1)+4y(k-2)=f(k)$ 已知初始条件 $y(0)=0$，$y(1)=-1$；激励 $f(k)=2^k$，$k\geqslant 0$。求方程的全解。

解： 特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=0$

特征根 $\lambda_1=\lambda_2=-2$

齐次解 $y_h(k)=(C_1k+C_2)(-2)^k$　　自由响应

特解 $y_p(k)=P(2)^k,\ k\geqslant 0$

代入差分方程 $P(2)^k+4P(2)^{k-1}+4P(2)^{k-2}=f(k)=2^k$

解得 $P=1/4$

特解 $y_p(k)=2^{k-2}$，$k\geqslant 0$　　强迫响应

全解 $y(k)=y_h+y_p=(C_1k+C_2)(-2)^k+2^{k-2},\ k\geqslant 0$

代入初始条件 $C_1=1$，$C_2=-1/4$

三.零输入响应和零状态响应

$$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)$$

（1）$y_{zi}(k)$ 零输入响应

求齐次差分方程的解（单实根）

$$y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\ldots+a_0y(k-n)=0$$

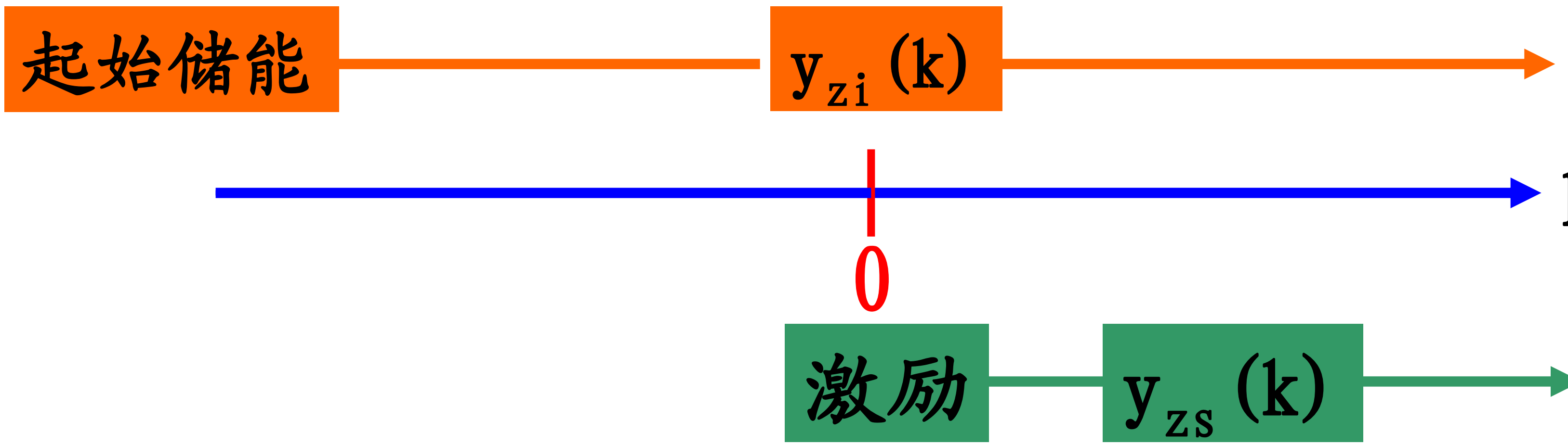
$$y_{zi}=\sum_{j=1}^{n}C_{zij}(\lambda_j)^k$$ C_{zij}——待定系数

（2）$y_{zs}(k)$ 零状态响应

非齐次差分方程的解

$$y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\ldots+a_0y(k-n)=b_mf(k)+\ldots+b_0f(k-m)$$

（3）起始条件的确定



（a） $y_{zs}(k)$ 起始条件

$$y_{zs}(-1)=y_{zs}(-2)=\text{------}=y_{zs}(-n)=0$$

（b） $y_{zi}(k)$ 起始条件

$k<0$，激励没有接入$f(k)=0$

$$\begin{cases} y_{zi}(-1)=y(-1) \\ y_{zi}(-2)=y(-2) \\ \text{-----------------} \\ y_{zi}(-n)=y(-n) \end{cases}$$

$$y_{zs}(t)=\sum_{j=1}^{n} C_{zsj}(\lambda_j)^k + y_p(k)$$

其中：C_{zsj} ——待定系数　　$y_p(k)$——特解

（4）$y(k)$全响应

$$y(k)=\sum_{i=1}^{n} c_i(\lambda_i)^k + y_p(k) = \sum_{j=1}^{n} c_{zij}(\lambda_j)^k + \sum_{j=1}^{n} c_{zsj}(\lambda_j)^k + y_p(k)$$

自由响应（$\sum_{i=1}^{n} c_i(\lambda_i)^k$）　强迫响应（$y_p(k)$）　零输入响应（$\sum_{j=1}^{n} c_{zij}(\lambda_j)^k$）　零状态响应（$\sum_{j=1}^{n} c_{zsj}(\lambda_j)^k + y_p(k)$）

例3.1-4、3.1-5

系统方程为 $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)$

已知激励 $f(k)=2^k$ ， $k\geqslant 0$

初始状态 $y(-1)=0$, $y(-2)=1/2$

求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

解：（1）$y_{zi}(k)$零输入响应

$$\begin{cases} y_{zi}(k)+3y_{zi}(k-1)+2y_{zi}(k-2)=0 \\ y_{zi}(-1)=y(-1)=0,\ y_{zi}(-2)=y(-2)=1/2 \end{cases}$$

特征根 $\lambda_1=-1$ ， $\lambda_2=-2$

解为 $y_{zi}(k)=C_{zi1}(-1)^k+C_{zi2}(-2)^k$

$$y_{zi}(k) + 3y_{zi}(k-1) + 2y_{zi}(k-2) = 0$$

$$y_{zi}(k) = C_{zi1}(-1)^k + C_{zi2}(-2)^k$$

$$y_{zi}(-1) = y(-1) = 0,\ y_{zi}(-2) = y(-2) = 1/2$$

递推求 $y_{zi}(0)$、 $y_{zi}(1)$

$$y_{zi}(k) = -3y_{zi}(k-1) - 2y_{zi}(k-2)$$

$$\begin{cases} y_{zi}(0) = -3y_{zi}(-1) - 2y_{zi}(-2) = -1 \\ y_{zi}(1) = -3y_{zi}(0) - 2y_{zi}(-1) = 3 \end{cases}$$

代入初始值解得 $C_{zi1}=1$, $C_{zi2}=-2$

$$y_{zi}(k) = (-1)^k - 2(-2)^k \quad ,\ k \geq 0$$

（2）零状态响应$y_{zs}(k)$满足

$$\begin{cases} y_{zs}(k) + 3y_{zs}(k-1) + 2y_{zs}(k-2) = f(k) \\ y_{zs}(-1) = y_{zs}(-2) = 0 \end{cases}$$

递推求初值 $y_{zs}(0)$，$y_{zs}(1)$

$$y_{zs}(k) = -3y_{zs}(k-1) - 2y_{zs}(k-2) + 2^k \qquad k \geq 0$$

$$y_{zs}(0) = -3y_{zs}(-1) - 2y_{zs}(-2) + 1 = 1$$

$$y_{zs}(1) = -3y_{zs}(0) - 2y_{zs}(-1) + 2 = -1$$

零状态响应 $y_{zs}(k) = C_{zs1}(-1)^k + C_{zs2}(-2)^k + y_p(k)$

$$= C_{zs1}(-1)^k + C_{zs2}(-2)^k + (1/3)2^k$$

$y_{zs}(0) = -3y_{zs}(-1) - 2y_{zs}(-2) + 1 = 1$

$y_{zs}(1) = -3y_{zs}(0) - 2y_{zs}(-1) + 2 = -1$

零状态响应 $y_{zs}(k) = C_{zs1}(-1)^k + C_{zs2}(-2)^k + (1/3)2^k$

代入初始值求得 $C_{zs1} = -1/3$ ，$C_{zs2} = 1$

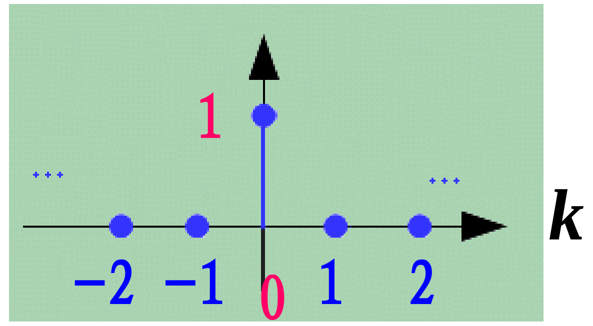
$y_{zs}(k) = -(-1)^k/3 + (-2)^k + (1/3)2^k$ ，$k \geq 0$

$y_{zi}(k) = (-1)^k - 2(-2)^k$ ，$k \geq 0$

全响应 $y(k) = (2/3)(-1)^k - (-2)^k + (1/3)2^k$ ，$k \geq 0$

§ 3.2 单位序列响应和阶跃响应

1. 单位(样值)序列$\delta(k)$



•定义:

$$\delta(k) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

•取样性质:

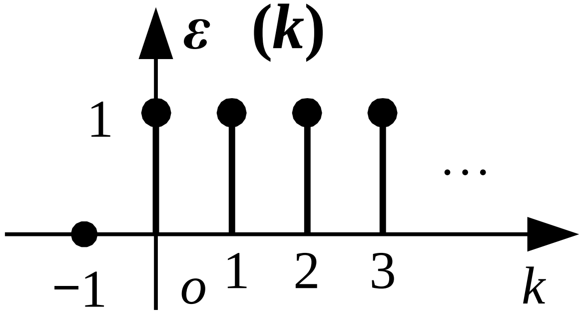
$$f(k)\delta(k) = f(0)\delta(k)$$

$$f(k)\delta(k-k_0) = f(k_0)\delta(k-k_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k) = f(0)$$

2. 单位阶跃序列$\varepsilon(k)$ 定义

- 定义 $$\varepsilon(k) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$



- $\varepsilon(k)$与$\delta(k)$的关系

$$\delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)$$

或$$\varepsilon(k) = \delta(k) + \delta(k-1) + \ldots$$

$$\varepsilon(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta(k-j)$$

K−j=i

j=0　　i=k

j=∞　　i=−∞

$$\varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta(i)$$

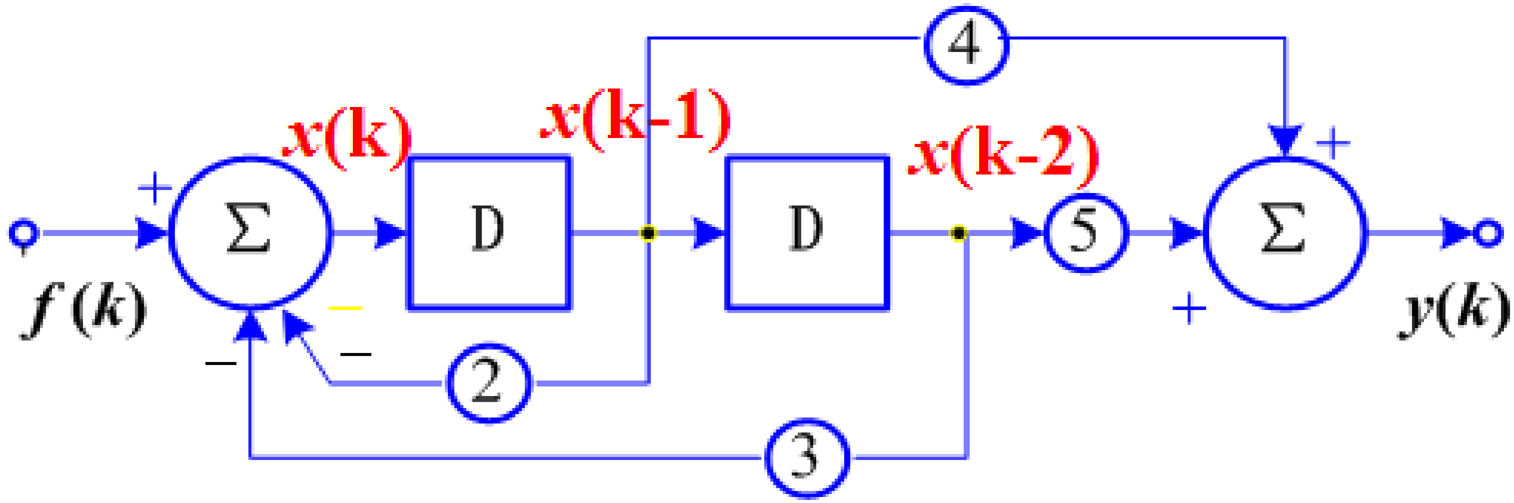
一、单位序列响应

单位序列 δ(k) 所引起的**零状态响应**，记为 $h(k)$

$h(k)=T[\{0\},\ \delta(k)]$

$$h(-i)=0 \quad i=1,2,3,---N$$

例：已知框图，写出系统的差分方程。



解：设辅助变量$x(k)$ $x(k) = f(k) - 2x(k-1) - 3x(k-2)$

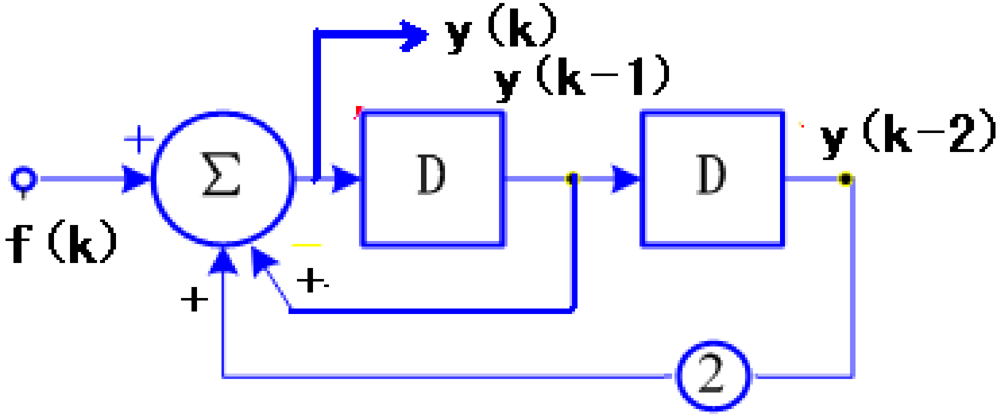
即$x(k)+2x(k-1)+3x(k-2)=f(k)$

$y(k)=4x(k-1)+5x(k-2)$

消去$x(k)$，得

$y(k)+2y(k-1)+3y(k-2)=4f(k-1)+5f(k-2)$

例3.2-1 求单位序列响应h(k)。



解：差分方程为 y(k) -y(k-1)-2y(k-2)= f(k)

根据h(k)的定义 有

$$h(k) – h(k –1) – 2h(k –2) = \delta(k)$$

$$h(–1) = h(–2) = 0$$

(1) 递推求初始值h(0)和h(1)。

$$h(k)= h(k –1) + 2h(k –2) +\delta(k)$$

$$h(0)= h(–1) + 2h(–2) + \delta(0) = 1$$

$$h(1)= h(0) + 2h(–1) + \delta(1) = 1$$

(2) 求$h(k)$

对于k >0， h(k)满足齐次方程

$$h(k) - h(k-1) - 2h(k-2) = 0$$

特征方程 $(\lambda+1)(\lambda-2) = 0$

$$h(k) = C_1(-1)^k + C_2(2)^k \quad , \quad k>0$$

$$h(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$h(1) = -C_1 + 2C_2 = 1$$

解得 $C_1 = 1/3$, $C_2 = 2/3$

$$h(k) = (1/3)(-1)^k + (2/3)(2)^k \quad , \quad k \geq 0$$

或写为

$$h(k) = [(1/3)(-1)^k + (2/3)(2)^k]\,\varepsilon(k)$$

二、阶跃响应 $g(k)=T[\{0\},\varepsilon(k)]$

由于 $$\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}\delta(i)=\sum_{j=0}^{\infty}\delta(k-j)$$

$$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)=\triangle\varepsilon(k)$$

所以 $$g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}h(i)=\sum_{j=0}^{\infty}h(k-j)$$ ， $h(k)=\triangle g(k)$

$$h(k)=[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$$

$$g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}h(i)=\sum_{i=0}^{k}[\frac{1}{3}(-1)^i+\frac{2}{3}(2)^i]$$

求和公式

$$\sum_{j=k_1}^{k_2} a^j = \begin{cases} \dfrac{a^{k_1} - a^{k_2+1}}{1-a} & a \neq 1 \\ k_2 - k_1 + 1 & a = 1 \end{cases}$$

$$g(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} h(i) = \sum_{i=0}^{k} [\frac{1}{3}(-1)^i + \frac{2}{3}(2)^i]$$

$$= [\frac{1}{3} \times \frac{1-(-1)^{k+1}}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1-2^{k+1}}{-1}]\varepsilon(k)$$

$$= [\frac{1}{6}(-1)^k + \frac{4}{3}(2)^k - \frac{1}{2}]\varepsilon(k)$$