信号与系统

第二十七讲

§6.2　z变换的性质

思考题

1. 已知 $f(n) \longleftrightarrow F(z)=z^{-1}+3+z$

$h(n) \longleftrightarrow H(z)=1+z^{2}+z^{3}$

计算$y(n)=f(n)*h(n)$

两个有限序列卷积，$f_c(k)=f_a(k) * f_b(k)$

$f_a(k)$的序号 $a_1 \rightarrow a_n$

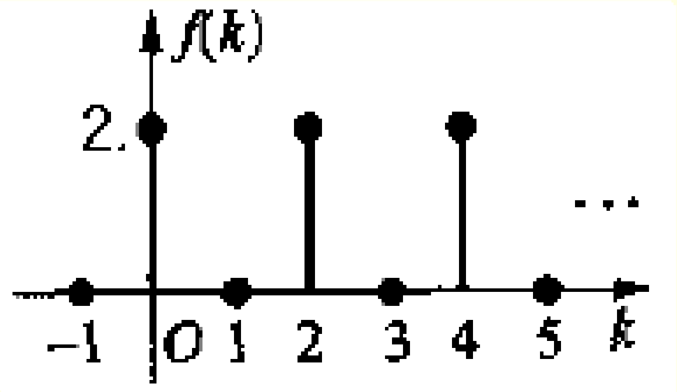
$f_b(k)$的序号 $b_1 \rightarrow b_m$

$f_c(k)$的序号为 $a_1+b_1 \rightarrow a_n+b_m$

项数为 a_n+b_m-1

思考题

2. 画出因果序列 $f(k)=\begin{cases}0, & k\text{为奇数}\\ 2, & k\text{为偶数}\end{cases}$ 图形，并求出其z变换。



例6.1-2 求因果序列 $f_1(k)=a^k\varepsilon(k)=\begin{cases}0, & k<0\\ a^k, & k\ge 0\end{cases}$ **z变换**

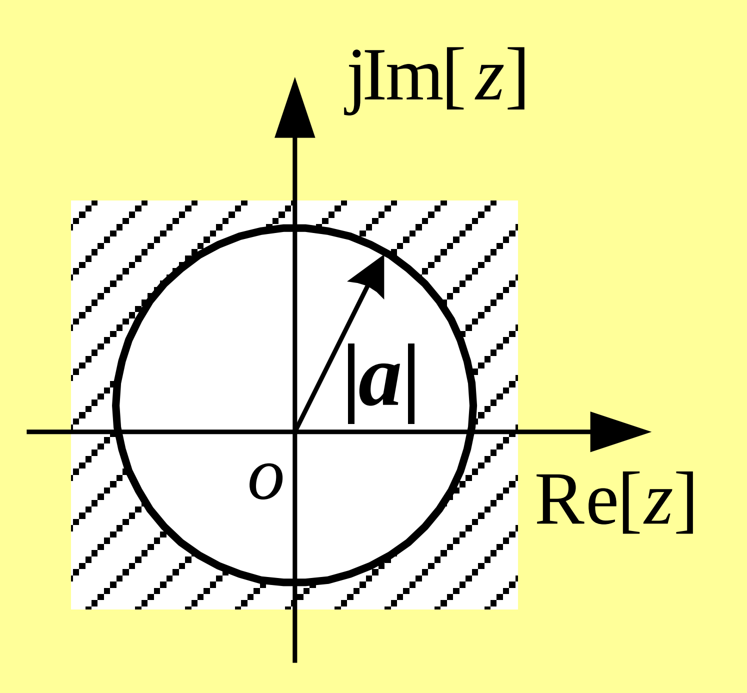
解：根据定义

$$F_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}(az^{-1})^k=\lim_{N\to\infty}\frac{1-(az^{-1})^{N+1}}{1-az^{-1}}$$

可见：仅当 $|az^{-1}|<1$，　$|z|>|a|$ 时，其z变换存在。

$$F_1(z)=\frac{z}{z-a}$$

收敛域为 $|z|>|a|$



注意： 双边z变换须表明收敛域，否则其对应的序列将不唯一。

例

$$f_1(k)=2^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow F_1(z)=\frac{z}{z-2}\ ,\ |z|>2$$

$$f_2(k)=-2^k\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow F_2(z)=\frac{z}{z-2}\ ,\ |z|<2$$

常用序列的z变换：

$$\delta(k)\longleftrightarrow 1\ ,\ |z|>0$$

$$\varepsilon(k)\longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\ ,\ |z|>1$$

$$-\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\ ,\ |z|<1$$

§6.2　z变换的性质

- 线性性质
- 移位性质
- Z域尺度变换
- 卷积定理
- Z域微分
- 初值定理
- 终值定理

一、线性性质

若 $f_1(k) \longleftrightarrow F_1(z) \quad \alpha_1<|z|<\beta_1,$

$f_2(k) \longleftrightarrow F_2(z) \quad \alpha_2<|z|<\beta_2$

对任意常数a_1、a_2，则

$$a_1 f_1(k)+a_2 f_2(k) \longleftrightarrow a_1 F_1(z)+a_2 F_2(z)$$

其收敛域至少是$F_1(z)$与$F_2(z)$收敛域的相交部分。

例：$2\delta(k)+3\varepsilon(k) \longleftrightarrow 2+\dfrac{3z}{z-1}$，$|z|>1$

二、移位特性

1. 双边z变换移位：

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$, $\alpha < |z| < \beta$，且对整数m>0，则

$$f(k \pm m) \longleftrightarrow z^{\pm m} F(z)$$

2. 单边z变换移位：

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$, $|z| > \alpha$，且有整数m>0, 则

$$f(k-1) \longleftrightarrow z^{-1}F(z) + f(-1)$$

280

$$f(k+1) \longleftrightarrow zF(z) - f(0)z$$

$$f(t \pm t_0) \longleftrightarrow \mathrm{e}^{\pm j\omega t_0} F(j\omega)$$

$$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \longleftrightarrow \mathrm{e}^{-st_0} F(s)$$

例：求$f(k)=k\varepsilon(k)$的单边z变换$F(z)$。

解

$$f(k+1)=(k+1)\varepsilon(k+1) = (k+1)\varepsilon(k) = f(k)+\varepsilon(k)$$

$$f(k+1) \leftrightarrow F(z)+\frac{z}{z-1}$$

$$f(k+1) \longleftrightarrow zF(z)-f(0)z$$

$$\boxed{F(z)+\frac{z}{z-1}=zF(z)} \quad F(Z)=\frac{Z}{(Z-1)^2}, \ |z|>1$$

三、z域尺度变换(序列乘a^k)

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$ ，$\alpha < |z| < \beta$ ， 且有常数a≠0

则 $a^k f(k) \longleftrightarrow F(z/a)$, $\alpha |a| < |z| < \beta |a|$

例： $\varepsilon(k) \longleftrightarrow \dfrac{z}{z-1}$ $\quad a^k \varepsilon(k) \longleftrightarrow \dfrac{z}{z-a}$

推广： $a^{-k} f(k) \longleftrightarrow F(az)$, $\alpha / |a| < |z| < \beta / |a|$

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a>0)$$

四、卷积定理

若 $f_1(k) \longleftrightarrow F_1(z) \quad \alpha_1 < |z| < \beta_1,$

$f_2(k) \longleftrightarrow F_2(z) \quad \alpha_2 < |z| < \beta_2$

则 $f_1(k) * f_2(k) \longleftrightarrow F_1(z)F_2(z)$

例： 求f(k)= kε(k)的z变换F(z).

解： $f(k) = k\varepsilon(k) = \varepsilon(k) * \varepsilon(k-1) \longleftarrow \frac{z}{z-1} \times \frac{z^{-1}z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}$

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega)$$

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(s)F_2(s)$$

例： 求$2^k\varepsilon(-k)*[2^{-k}\varepsilon(k)]$

解： $$2^{-k}\varepsilon(k)\longleftrightarrow\frac{z}{z-0.5},|z|>0.5$$

$$2^{k}\varepsilon(-k)\longleftrightarrow\frac{-2}{z-2},|z|<2$$

象函数为

$$\frac{-2z}{(z-0.5)(z-2)}=\frac{\frac{4}{3}z}{z-0.5}+\frac{-\frac{4}{3}z}{z-2}$$

原式= $\frac{4}{3}(0.5)^k\varepsilon(k)+\frac{4}{3}(2)^k\varepsilon(-k-1)$

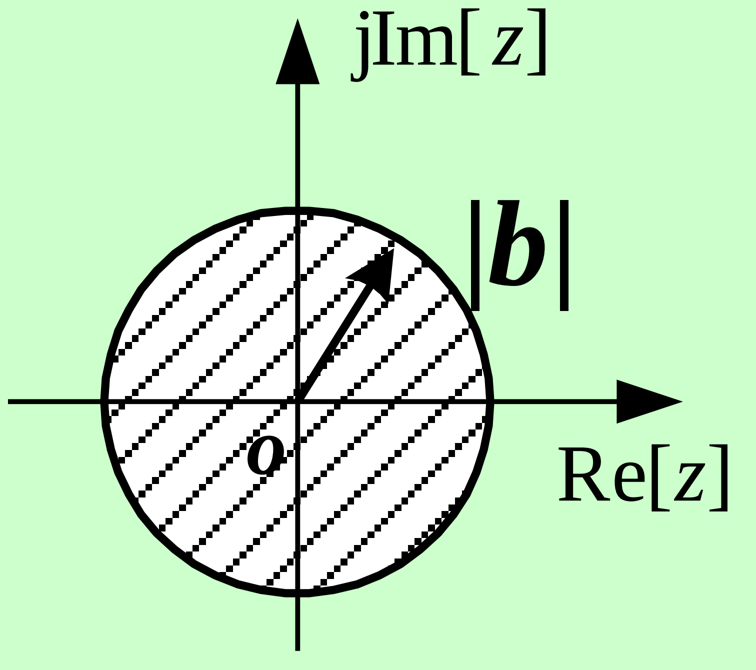
求反因果序列的z变换 $f_2(k) = b^k \varepsilon(-k)$

解
$$F_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} (bz^{-1})^k = \sum_{m=0}^{\infty} (b^{-1}z)^m = \lim_{N\to\infty} \frac{1-(b^{-1}z)^{N+1}}{1-b^{-1}z}$$

$|b^{-1}z|<1$, 即 $|z|<|b|$ 时，其z变换存在

$$F_2(z) = \frac{b}{b-z} = \frac{-b}{z-b}$$

收敛域为 $|z|< |b|$



例6.1-3 求反因果序列的z变换

$$f_2(k)=\begin{cases} b^k, & k<0 \\ 0, & k\ge 0\end{cases} = b^k\varepsilon(-k-1)$$

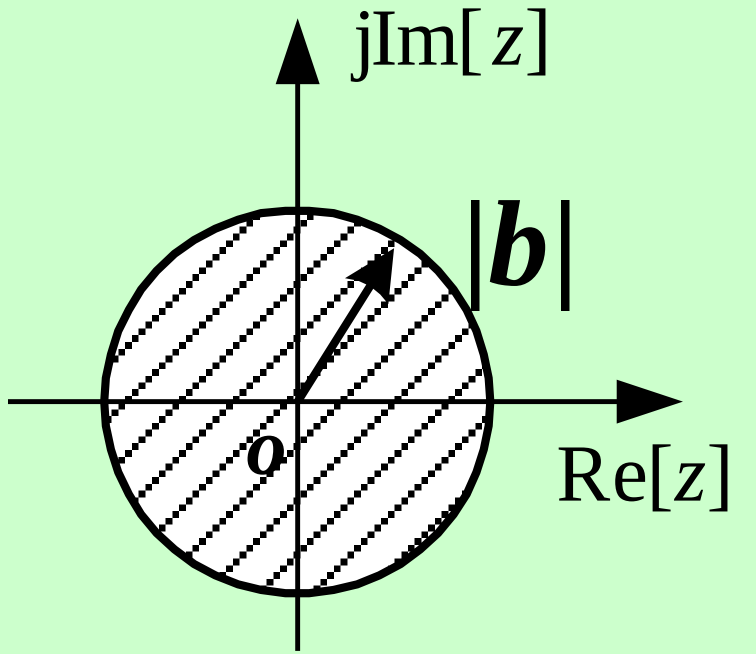
解

$$F_2(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}(bz^{-1})^k=\sum_{m=1}^{\infty}(b^{-1}z)^m=\lim_{N\to\infty}\frac{b^{-1}z-(b^{-1}z)^{N+1}}{1-b^{-1}z}$$

$|b^{-1}z|<1$, 即 $|z|<|b|$时，其z变换存在

$$F_2(z)=\frac{-z}{z-b}$$

收敛域为$|z|<|b|$



五、 z域微分（序列乘k ）

$$(-t)f(t)\longleftrightarrow\frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}$$

若 $f(\mathrm{k})\longleftrightarrow F(\mathrm{z})$

$$-\mathrm{j}tf(t)\longleftrightarrow F^{(1)}(\mathrm{j}\omega)$$

则

$$kf(k)\longleftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z)$$

$$k^2 f(k)\longleftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[-z\frac{d}{dz}F(z)\right]$$

例： 求$f(\mathrm{k})=\mathrm{k}\varepsilon(\mathrm{k})$的z变换$F(\mathrm{z})$.

解： $\varepsilon(k)\longleftrightarrow\dfrac{z}{z-1}$

$$k\varepsilon(k)\longleftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right)=-z\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2}=\frac{z}{(z-1)^2}$$

六、初值定理

初值定理适用于右边序列。

$$f(k) \longleftrightarrow F(z)\text{，}\ \alpha < |z| < \infty$$

因果序列f(k)，

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

$$f(1) = \lim_{z\to\infty}[zF(z) - zf(0)]$$

$$f(2) = \lim_{z\to\infty}[z^2F(z) - z^2 f(0) - zf(1)]$$

$$f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

七、终 值 定 理

终值定理适用于右边序列。

$f(k) \longleftrightarrow F(z)$，$\alpha<|z|<\infty$ 且 $0\le\alpha<1$

$$f(\infty)=\lim_{k\to\infty} f(k)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z)$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)}$$

初（终）值定理例题

例6.2-13 某因果序列的z变换为（a为实数）

$$F(z)=\frac{z}{z-a},\ |z|>|a|$$

求$f(0)$、$f(1)$、$f(2)$和$f(\infty)$

解：

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)$$

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{z-a}=1$$

$$f(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z)$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\times\frac{z}{z-a}$$

$$=\begin{cases}1, & a=1\\ 0, & a=\text{其它}\end{cases}$$

初（终）值定理例题

例6.2-13 某因果序列的z变换为（a为实数）

$$F(z)=\frac{z}{z-a},\ |z|>|a|$$

求$f(0)$、$f(1)$、$f(2)$和$f(\infty)$

解:

$$f(1)=\lim_{z\to\infty}[zF(z)-zf(0)]=\lim_{z\to\infty}[\frac{z^2}{z-a}-z]$$

$$=\lim_{z\to\infty}[\frac{z^2-z^2+az}{z-a}]=\lim_{z\to\infty}\frac{az}{z-a}=a$$

例6.2-13 某因果序列的z变换为（a为实数）

$$F(z)=\frac{z}{z-a},|z|\rangle|a|$$

求$f(0)$、$f(1)$、$f(2)$和$f(\infty)$

解： $f(2)=\lim\limits_{z\to\infty}[z^2F(z)-z^2f(0)-zf(1)]$

$$=\lim_{z\to\infty}[z^2\frac{z}{z-a}-z^2-az]=\lim_{z\to\infty}\frac{z^3-z^3+az^2-az^2+a^2z}{z-a}$$

$$=\lim_{z\to\infty}\frac{a^2z}{z-a}=a^2$$

作　业

6.1（1）、6.2（1）、6.3（1）

6.4（1）、6.5（1）