

上次课程内容回顾

横截面上的应力

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

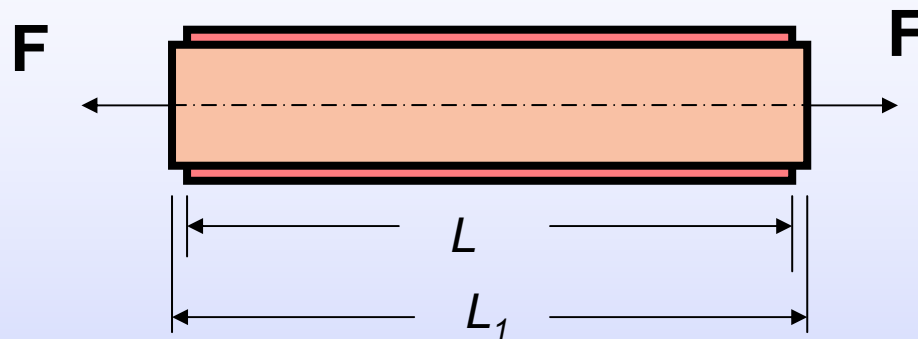
斜截面上的应力

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha$$

纵向变形

杆件的纵向变形为 $\Delta l = l_1 - l$

纵向线应变 $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$



胡克定律：拉（压）杆变形量与受力的关系

$$\Delta l \propto \frac{Fl}{A}$$

引入比例常数E

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

或写为 $\frac{F_N}{A} = E \frac{\Delta l}{l}$

即 $\sigma = E\varepsilon$

E 为弹性模量, EA 为抗拉刚度

横向变形

横向变形

$$\Delta b = b_1 - b$$

横向线应变

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$$

泊松比

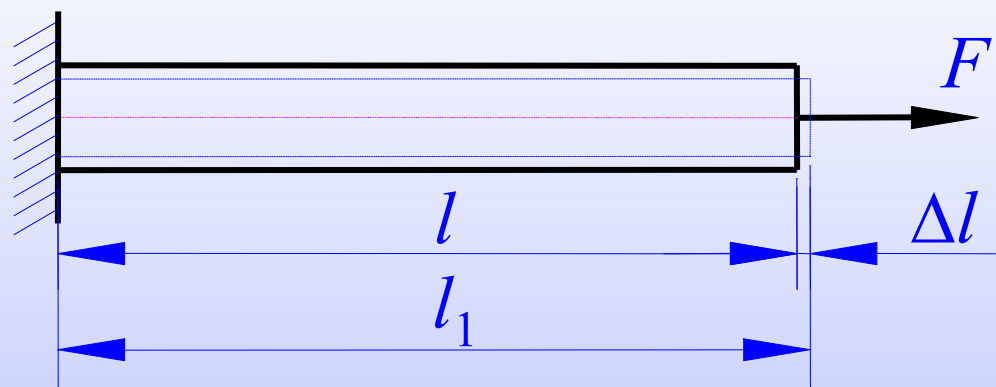
$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$$

E 和 ν 是材料的弹性常数。



§ 2-5 拉(压)杆内的应变能

应变能——弹性体受力而变形时所积蓄的能量。



应变能的计算： 能量守恒原理

$$V_{\varepsilon} = W$$

弹性体的
功能原理

单位： 焦耳J

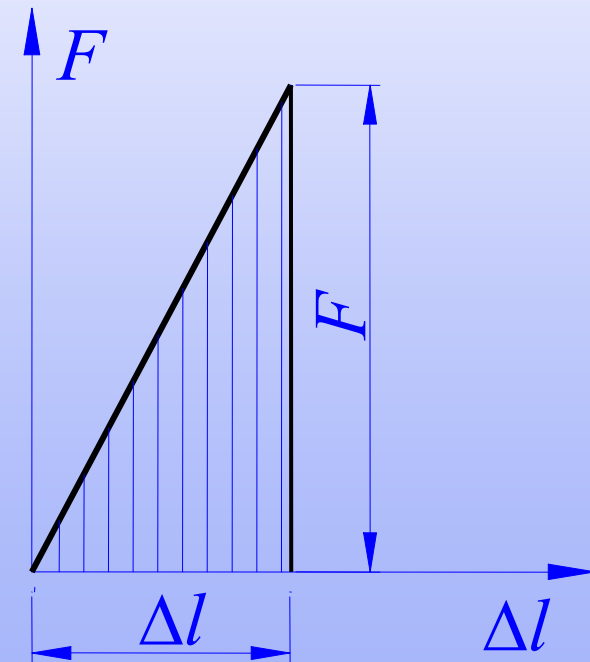
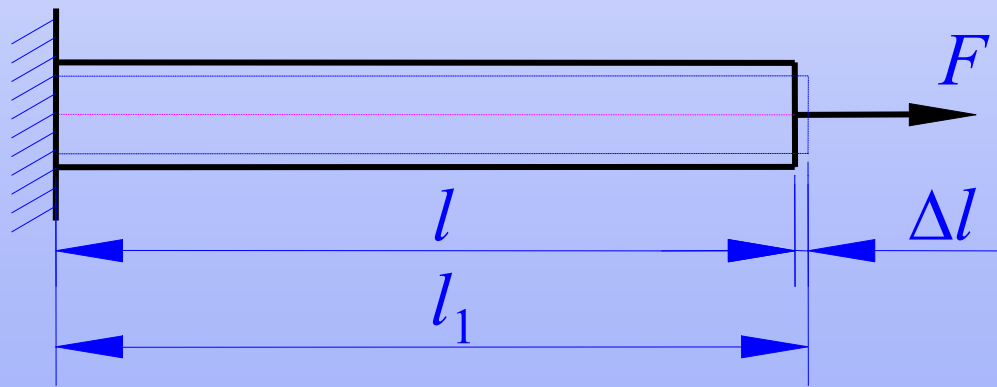
$$1\text{J} = 1\text{N} \cdot \text{m}$$

拉（压）杆在线弹性范围内的应变能

外力功：
$$W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l$$

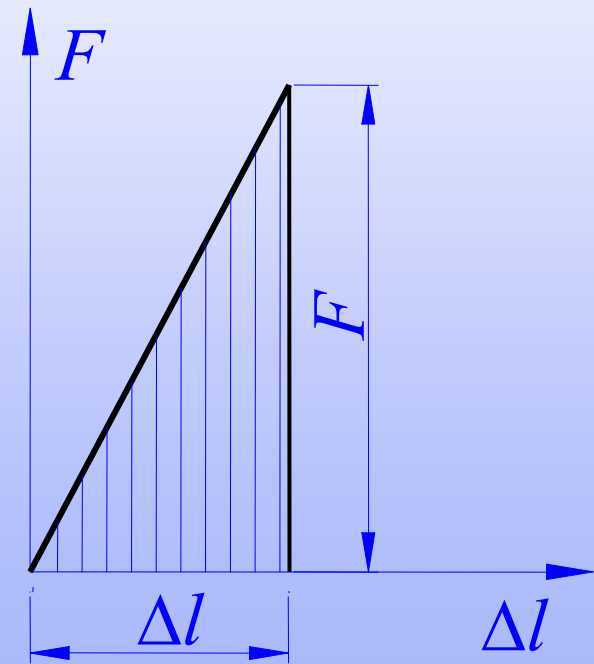
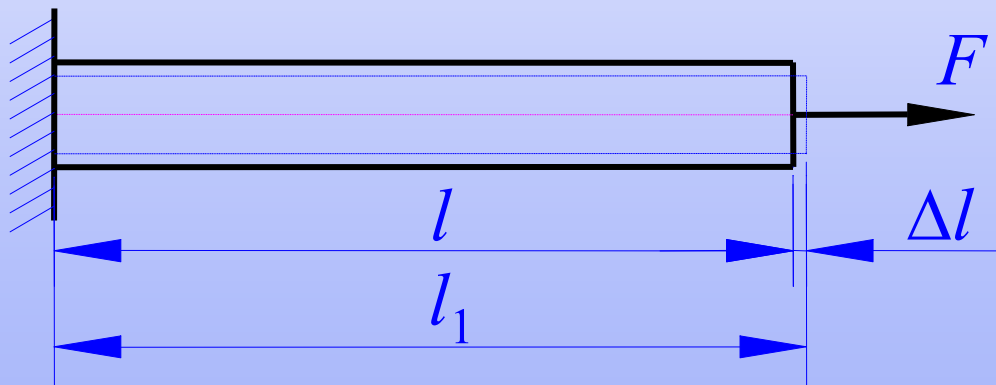
杆内应变能：
$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l \quad \left(\Delta l = \frac{Fl}{EA} \right)$$

$$= \frac{F^2 l}{2EA} = \frac{F_N^2 l}{2EA}$$



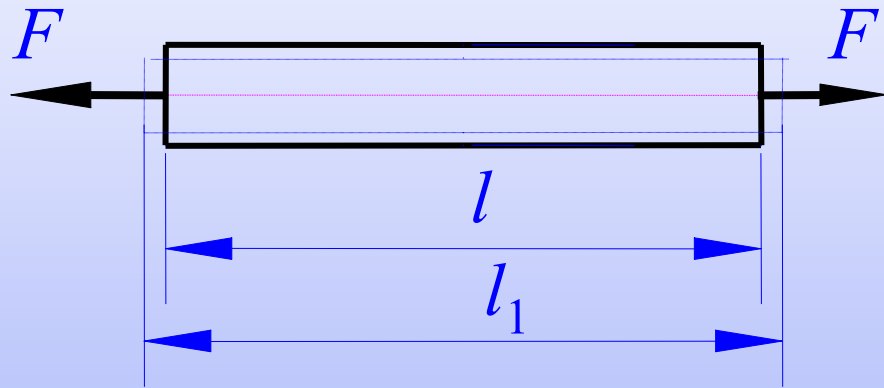
或

$$V_{\varepsilon} = W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l \quad \left(\Delta l = \frac{Fl}{EA} \right)$$
$$= \frac{EA(\Delta l)^2}{2l}$$



应变能密度 v_ε —— 杆件单位体积内的应变能

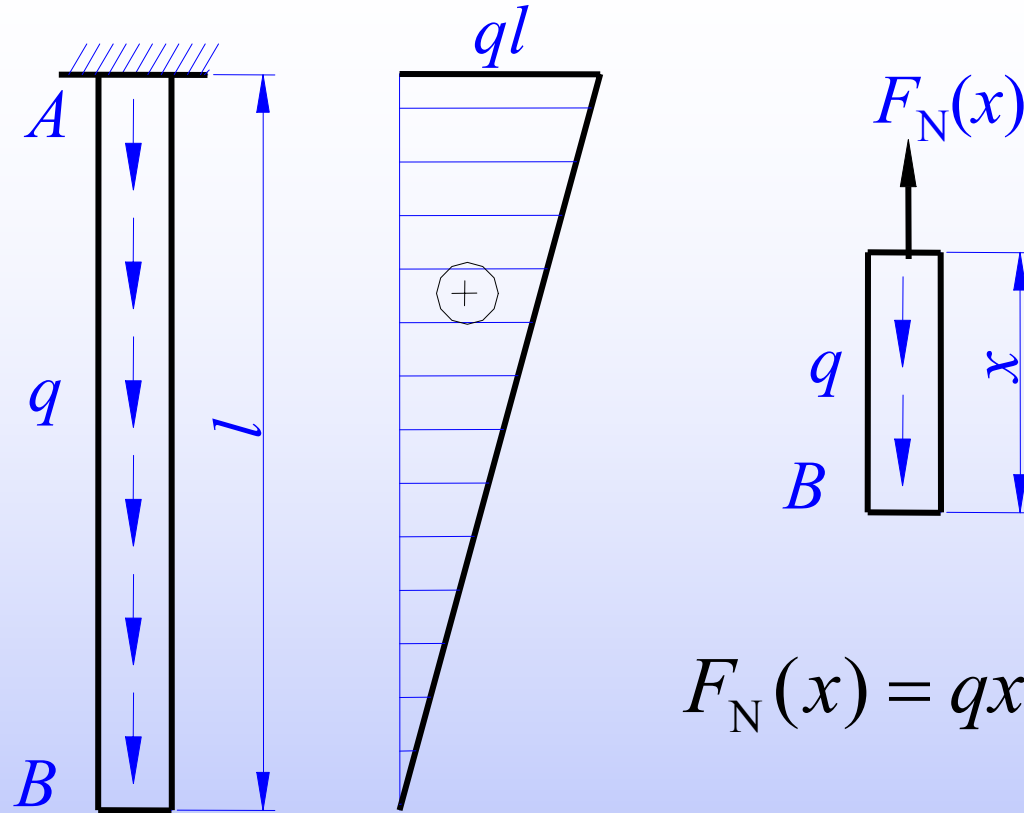
两端受轴向荷载的等直杆，由于其各横截面上所有点处的应力均相等，故全杆内的应变能是均匀分布的。



$$\begin{aligned} v_\varepsilon &= \frac{V_\varepsilon}{V} = \frac{\frac{1}{2} F \cdot \Delta l}{Al} \\ &= \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (\sigma = E \varepsilon) \\ &= \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E \varepsilon^2}{2} \end{aligned}$$

应变能密度单位： J/m^3

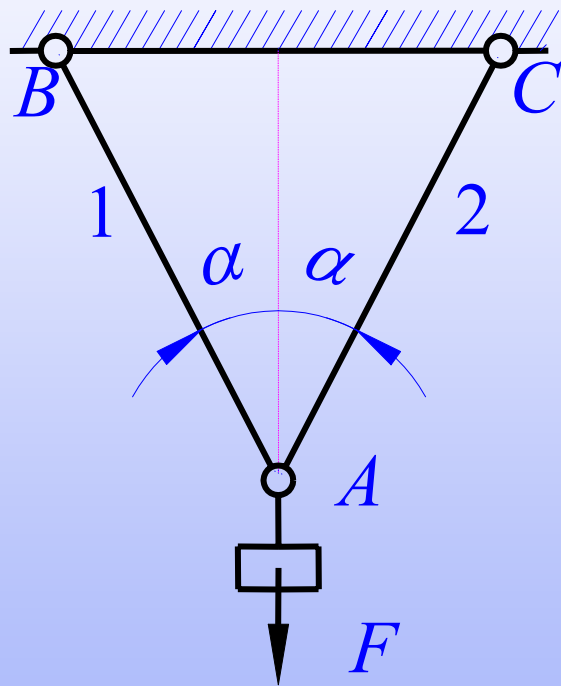
例：求应变能



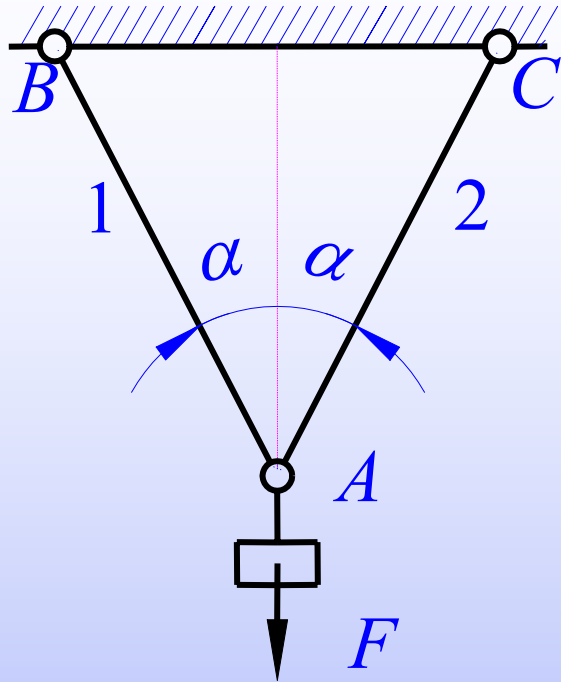
$$F_N(x) = qx \quad dV_\varepsilon = \frac{F_N^2(x) dx}{2EA}$$

$$V_\varepsilon = \int_l dV_\varepsilon = \int_0^l \frac{F_N^2(x) dx}{2EA}$$
$$= \int_0^l \frac{q^2 x^2}{2EA} dx = \frac{q^2 l^3}{6EA}$$

例2-10 求图示杆系的应变能，并按弹性体的功能原理求结点A的位移 Δ_A 。已知 $F=10\text{ kN}$ ，杆长 $l=2\text{ m}$ ，杆径 $d=25\text{ mm}$ ， $\alpha=30^\circ$ ，材料的弹性模量 $E=210\text{ GPa}$ 。



$$\begin{aligned}
 \text{解：} \quad F_{N1} &= F_{N2} = \frac{F}{2 \cos \alpha} \\
 V_\varepsilon &= 2 \times \frac{F_{N1}^2 l}{2EA} = \frac{\left(\frac{F}{2 \cos \alpha}\right)^2 l}{EA} \\
 &= \frac{\left(\frac{10 \times 10^3 \text{ N}}{2 \cos 30^\circ}\right)^2 (2 \times 10^3 \text{ mm})}{(210 \times 10^3 \text{ MPa}) \left[\frac{\pi}{4} (25 \text{ mm})^2\right]} \\
 &= 64.67 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm} = 64.67 \text{ J}
 \end{aligned}$$



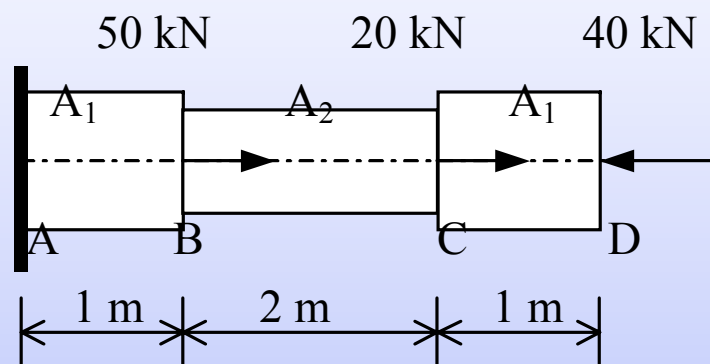
$$V_{\varepsilon} = 64.67 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm} = 64.67 \text{ J}$$

$$\text{而} \quad \frac{1}{2} F \Delta_A = V_{\varepsilon}$$

$$\Delta_A = \frac{2V_{\varepsilon}}{F} = \frac{2 \times 64.67 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}}{100 \times 10^3 \text{ N}} \\ = 1.293 \text{ mm} (\downarrow)$$

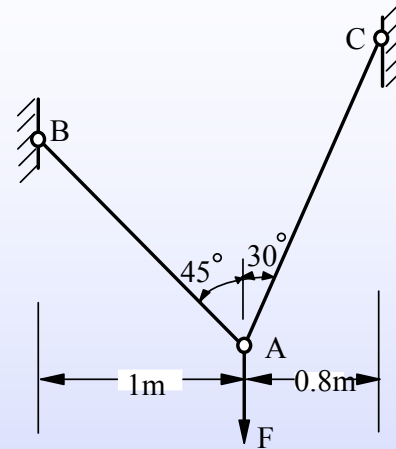
练习题：求图示变截面杆D点的位移。

已知， $E=200\text{ GPa}$ ， $A_1=500\text{ mm}^2$ ， $A_2=300\text{ mm}^2$ 。

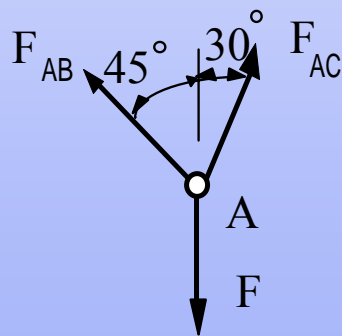


例 (P₄₆ 2-13)

已知 $F = 35\text{kN}$, AB和AC杆的直径 $d_1 = 12\text{mm}$, $d_2 = 15\text{mm}$, 材料的弹性模量 $E = 210\text{GPa}$, 求A点在铅垂方向的位移。



解：1) 求两杆的轴力，取A点为研究对象



$$\Sigma F_x = 0 \quad F_{AC} \sin 30^\circ - F_{AB} \sin 45^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_{AC} \cos 30^\circ + F_{AB} \cos 45^\circ - F = 0$$

求得： $F_{AB} = 18.11\text{kN}$ $F_{AC} = 25.62\text{kN}$

$$F_{AB}=18.11\text{kN} \quad F_{AC}=25.62\text{kN}$$

2.求两杆的应变能

$$\begin{aligned} V_{\varepsilon} &= \frac{F_{AB}^2 l_{AB}}{2EA_{AB}} + \frac{F_{AC}^2 l_{AC}}{2EA_{AC}} \\ &= \frac{(18.11 \times 10^3)^2 \times \sqrt{2} \times 4}{2E\pi \times (12 \times 10^{-3})^2} + \frac{(25.62 \times 10^3)^2 \times 1.6 \times 4}{2E\pi \times (15 \times 10^{-3})^2} \\ &= \frac{31.55 \times 10^{12}}{2E\pi} = \frac{31.55 \times 10^{12}}{2 \times 210 \times 10^9 \pi} = 0.0239 \times 10^3 J \end{aligned}$$

结点A的铅垂位移

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \frac{2V_{\varepsilon}}{F} = \frac{2 \times 0.0239 \times 10^3}{35 \times 10^3} \\ &= 1.365 \times 10^{-3} m \\ &= 1.365 \text{ mm} \end{aligned}$$

§ 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质

力学性质：在外力作用下材料在变形和破坏方面所表现出的力学性能

研究材料力学性质的意义：

- 1.在拉压杆应力、变形计算中用到材料的力学性质；
- 2.在工程中使用材料时需考虑材料的力学性质。

● § 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质

一、材料的拉伸和压缩实验

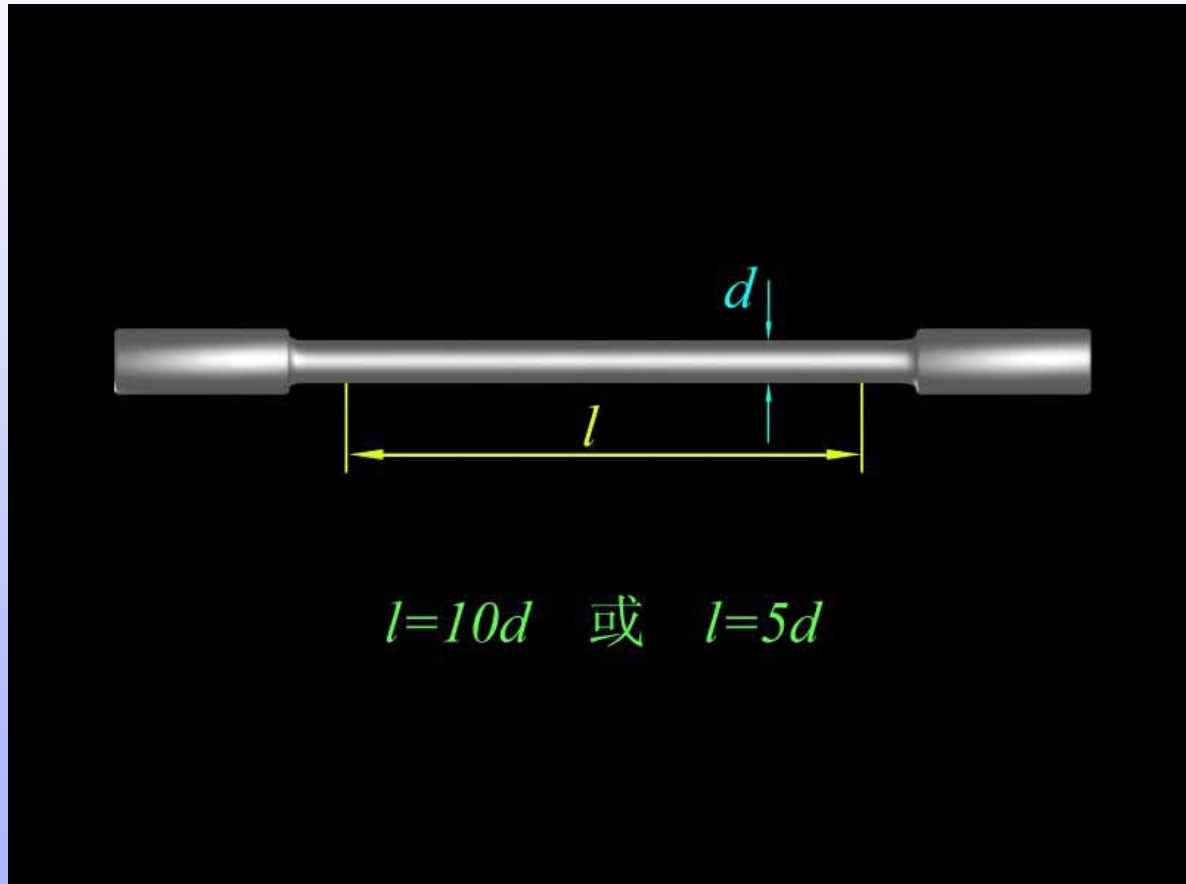
1. 拉伸标准试件：

$$l=10d$$

或 $l=5d$

2. 实验条件：

常温、静载



● § 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质

3. 实验设备：万能材料试验机



§ 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质

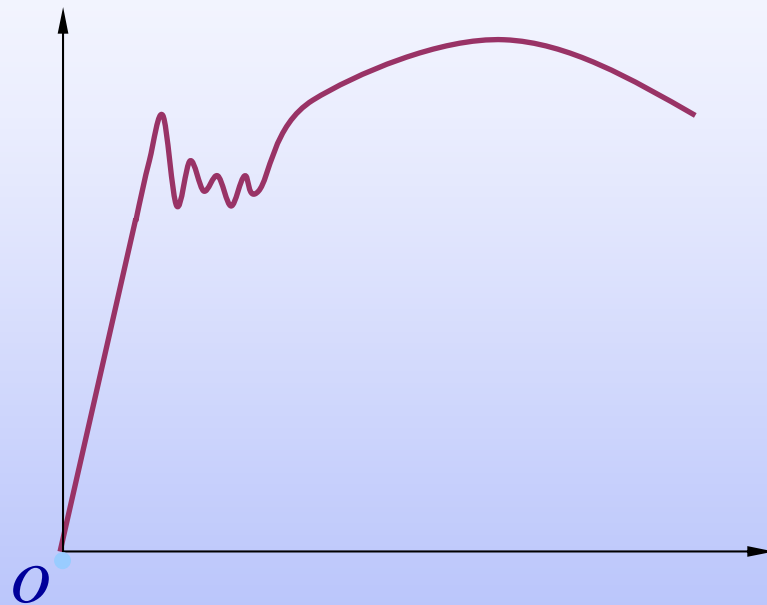
4. 拉伸实验目的：

测定低碳钢材料拉伸时的屈服极限 σ_s ，强度极限 σ_b ，延伸率 δ ，截面收缩率 ψ ；铸铁的强度极限 σ_b 。

σ_b 。

5. 拉伸图：

记录试件在拉伸时应力和应变的变化情况。



§ 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质

• 二、低碳钢在拉伸时的力学性质

1. 载荷变形图

P 为拉伸荷载，

l 为杆件的轴向变形

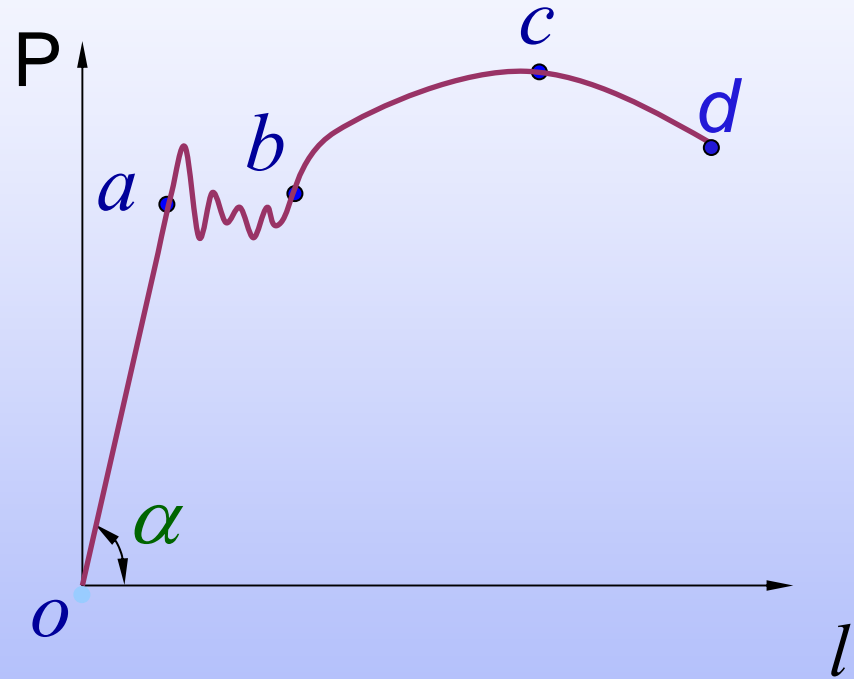
2. 拉伸的四个阶段：

oa段：弹性阶段

ab段：屈服阶段

bc段：强化阶段

cd段：局部变形阶段

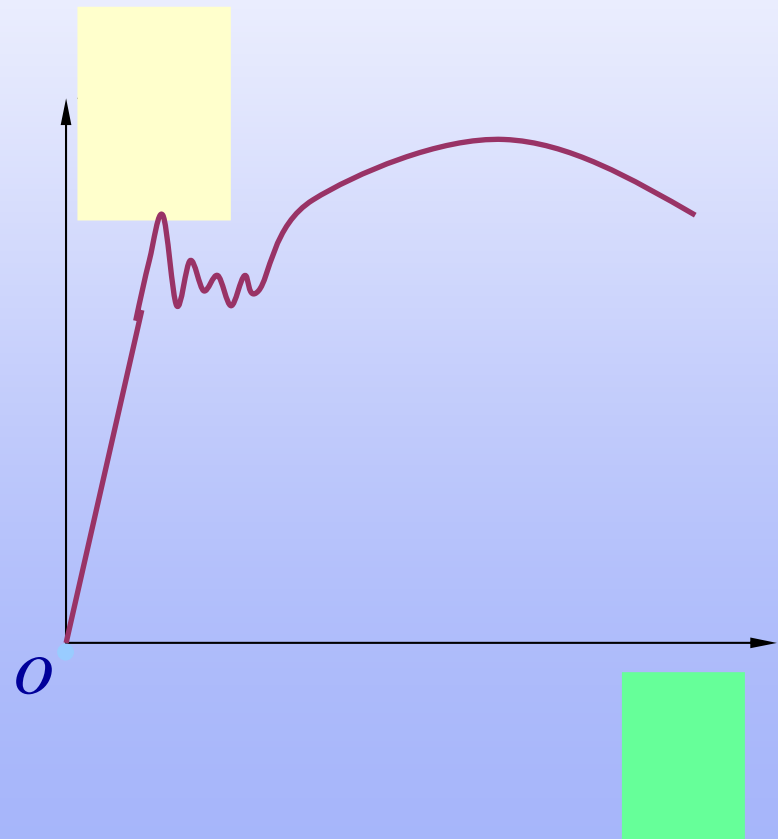


§ 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质

2. 应力 - 应变 (-) 图

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

P- l 图与 - 图只是
比例不同



§ 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质

3.三个极值点

a.比例极限 ρ ,

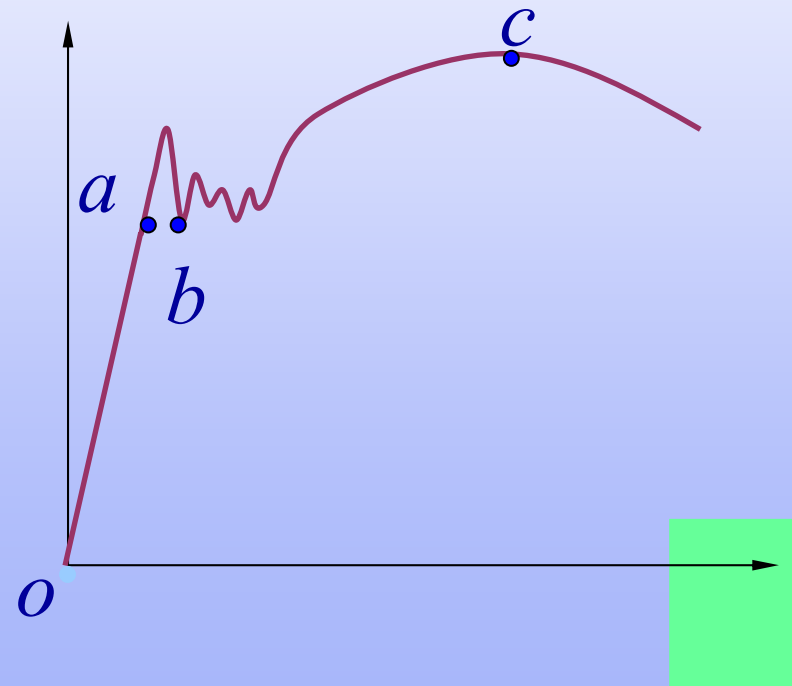
直线段最高点

b.屈服极限 s ,

屈服段的最低点

c.强度极限 b ,

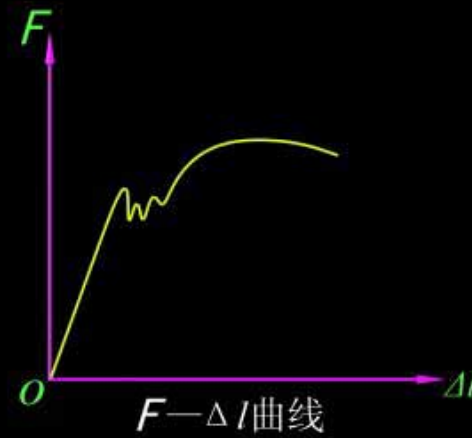
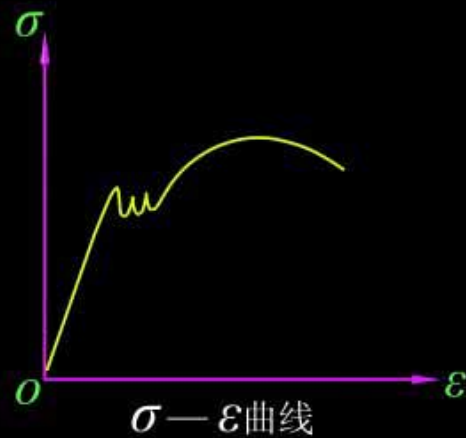
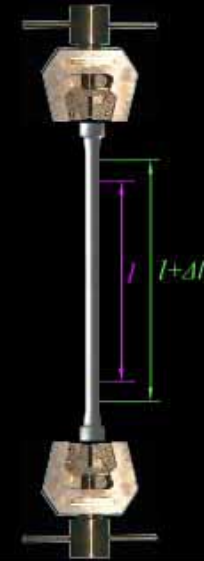
曲线的最高点



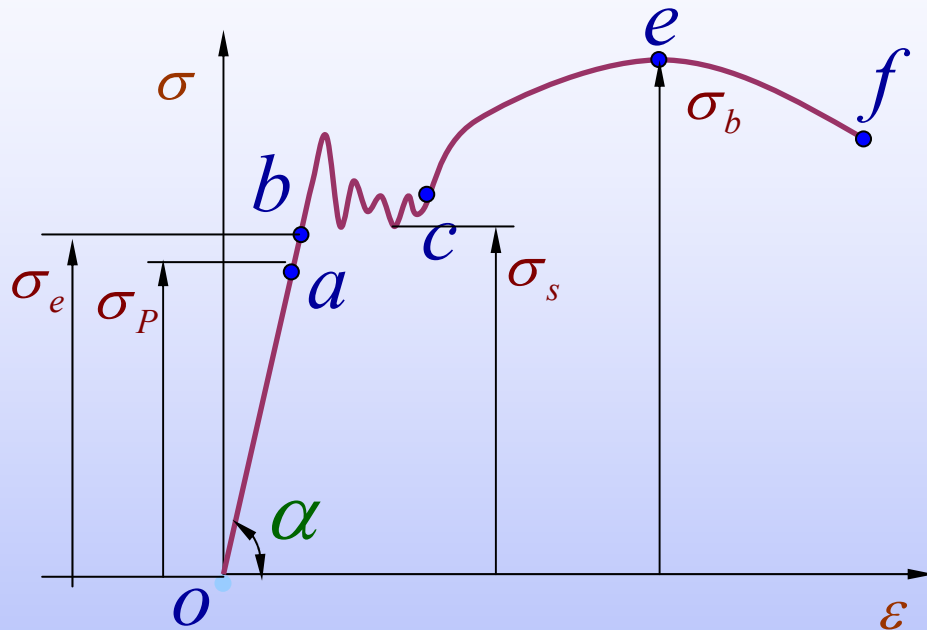
● § 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质

二 低碳钢的拉伸

$$\frac{F}{A} = \sigma$$
$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$$



§ 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质



2、屈服阶段bc (失去抵抗变形的能力)

σ_s — 屈服极限

3、强化阶段ce (恢复抵抗变形的能力)

σ_b — 强度极限

4、局部径缩阶段ef

明显的四个阶段

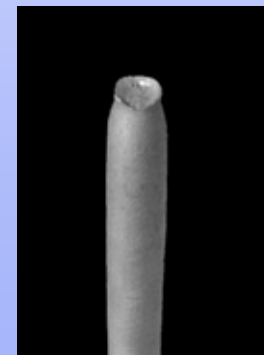
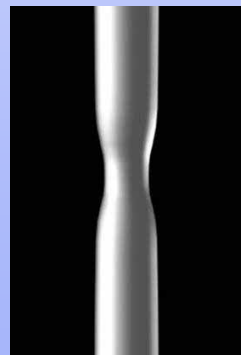
1、弹性阶段ob

σ_P — 比例极限

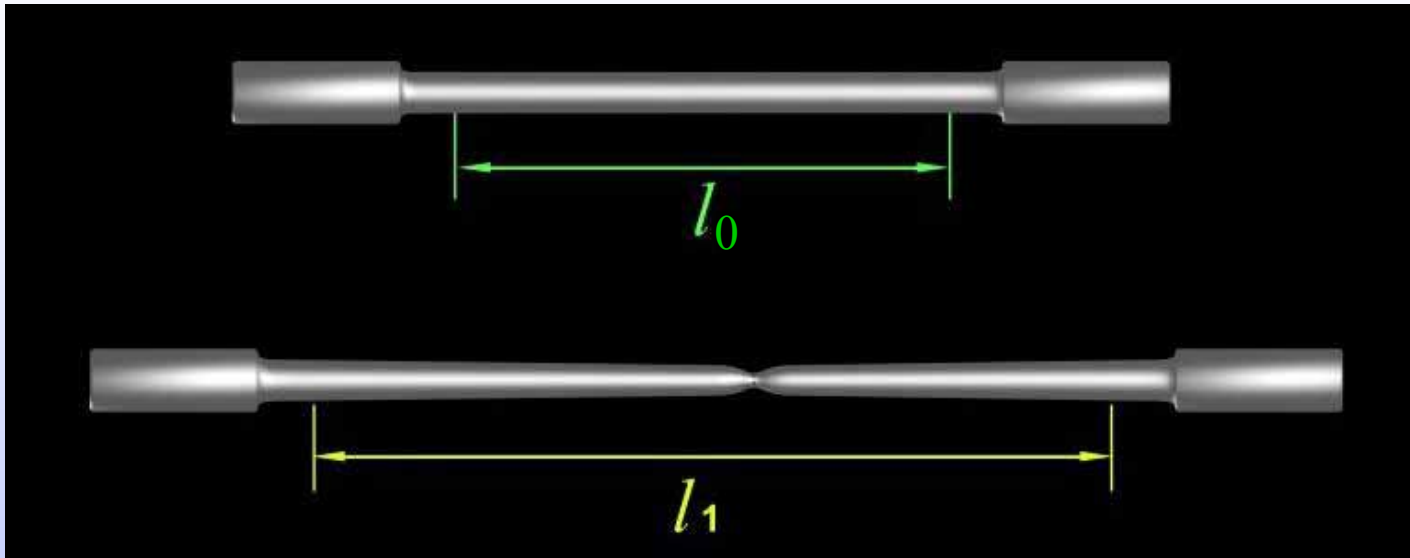
σ_e — 弹性极限

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \tan \alpha$$



● § 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质



两个塑性指标：

断后伸长率 $\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \times 100\%$ 断面收缩率 $\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \times 100\%$

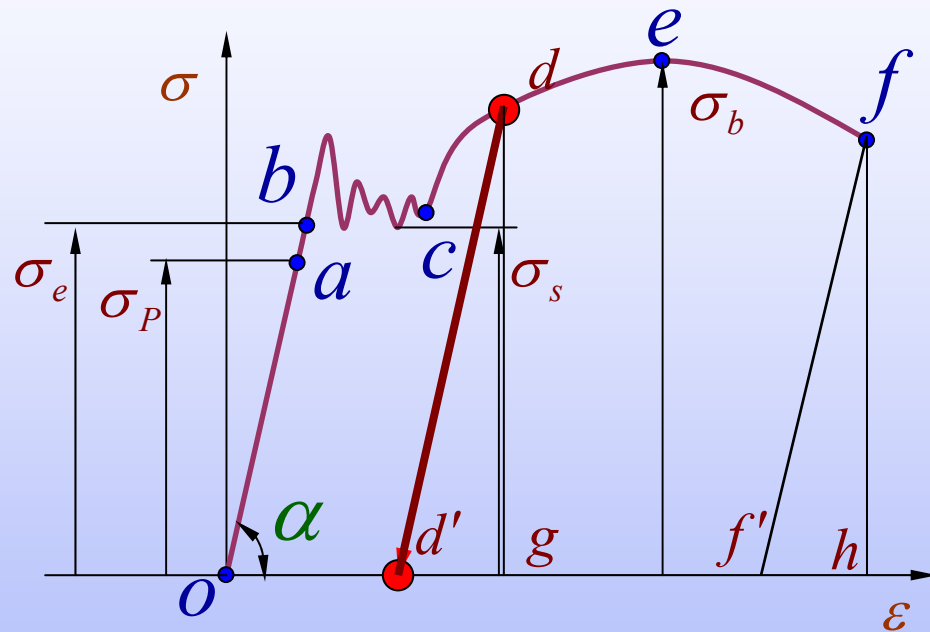
$\delta > 5\%$ 为塑性材料 $\delta < 5\%$ 为脆性材料

低碳钢的 $\delta \approx 20 - 30\%$ $\psi \approx 60\%$ 为塑性材料



● § 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质

三 卸载定律及冷作硬化



即材料在卸载过程中
应力和应变是线形关系，
这就是卸载定律。

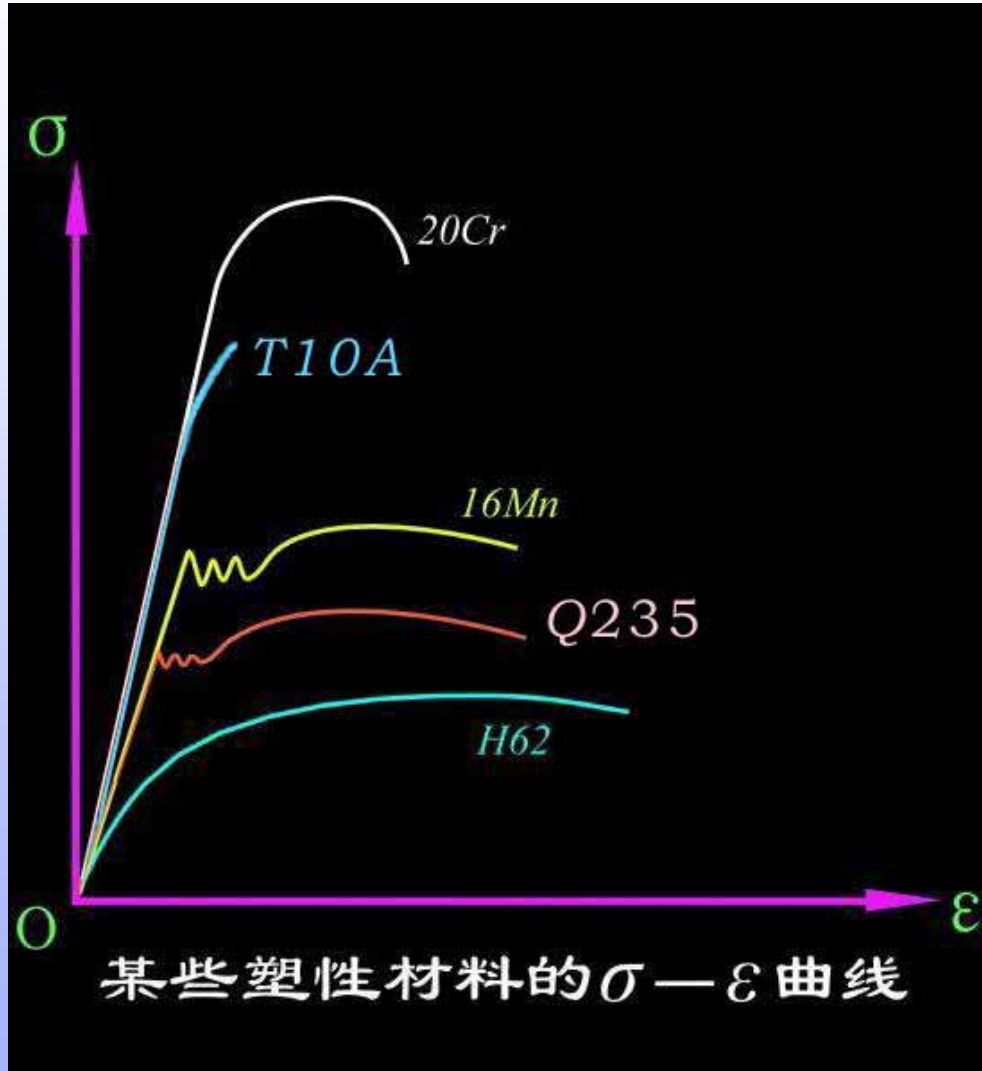
材料的比例极限增高，
延伸率降低，称之为冷作硬
化或加工硬化。

- 1、弹性范围内卸载、再加载
- 2、过弹性范围卸载、再加载

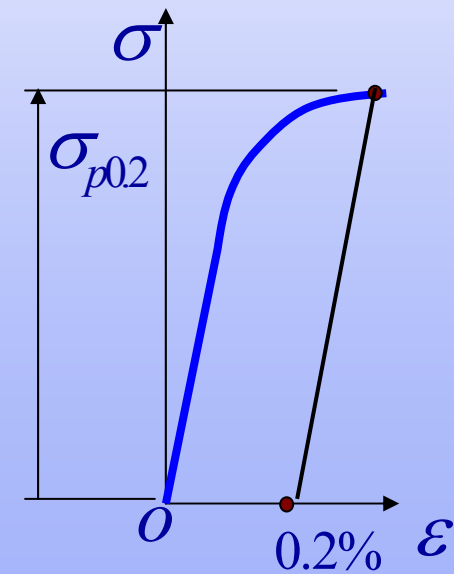


§ 2-4 材料拉伸和压缩时的力学性质

四 其它材料拉伸时的力学性质

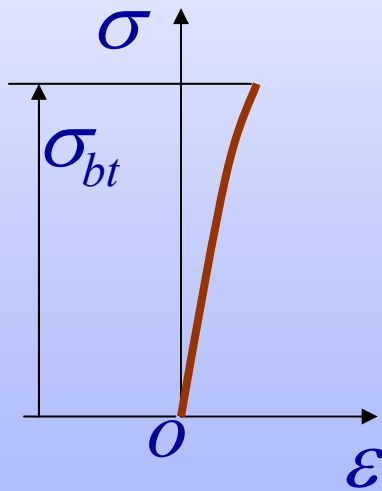


对于没有明显屈服阶段的塑性材料，用名义屈服极限 $\sigma_{p0.2}$ 来表示，即塑性变形为2%时的正应力。



● § 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质

对于脆性材料（铸铁），拉伸时的应力应变曲线为微弯的曲线，没有屈服和颈缩现象，试件突然拉断。断后伸长率约为0.5%。为典型的脆性材料。



σ_{bt} —拉伸强度极限（约为140MPa）。它是衡量脆性材料（铸铁）拉伸的唯一强度指标。

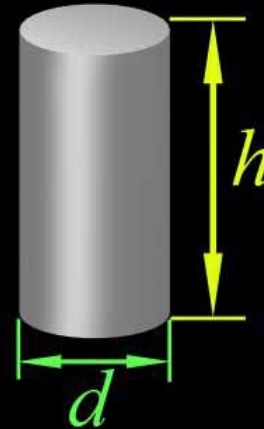


● § 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质

二、材料在压缩时的力学性能

1. 试件和实验 条件

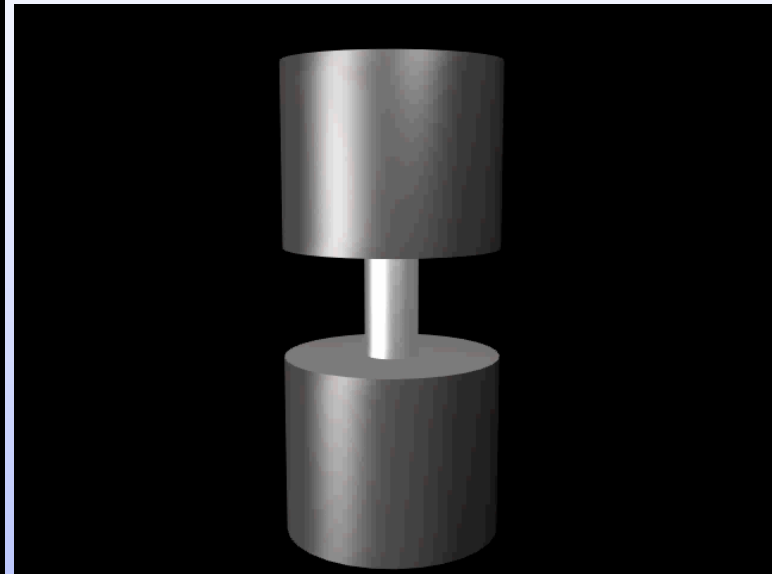
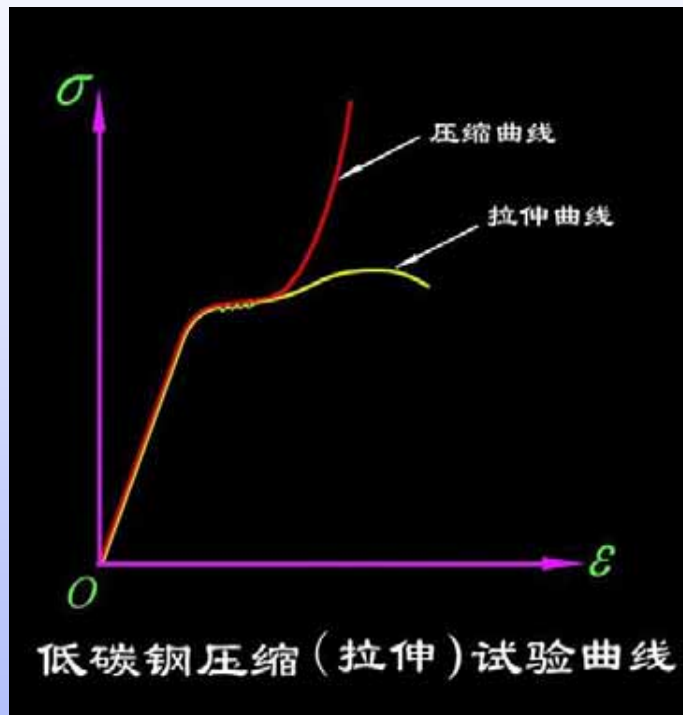
常温、静载



压缩试样： $\frac{h}{d} \approx 1.5 \sim 3$

● § 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质

2. 塑性材料（低碳钢）的压缩



σ_S — 屈服极限

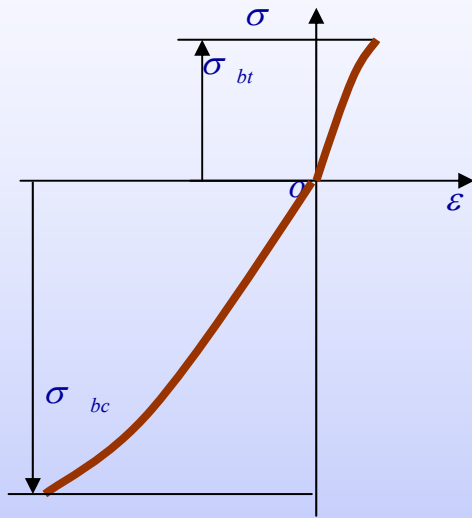
E --- 弹性模量

拉伸与压缩在屈服阶段以前完全相同。



● § 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质

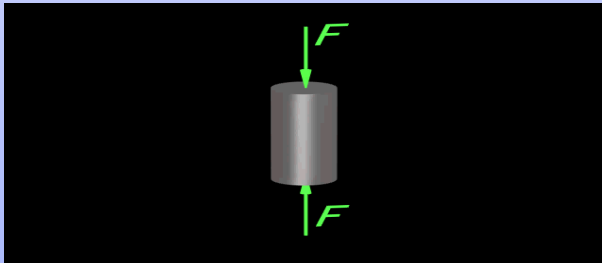
3. 脆性材料（铸铁）的压缩



脆性材料的抗拉与抗压
性质不完全相同

压缩时的强度极限远大于
拉伸时的强度极限

$$\sigma_{bc} \gg \sigma_{bt}$$

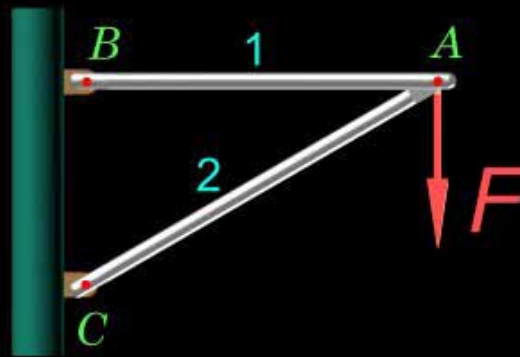


● § 2-6 材料拉伸和压缩时的力学性质

讨论题

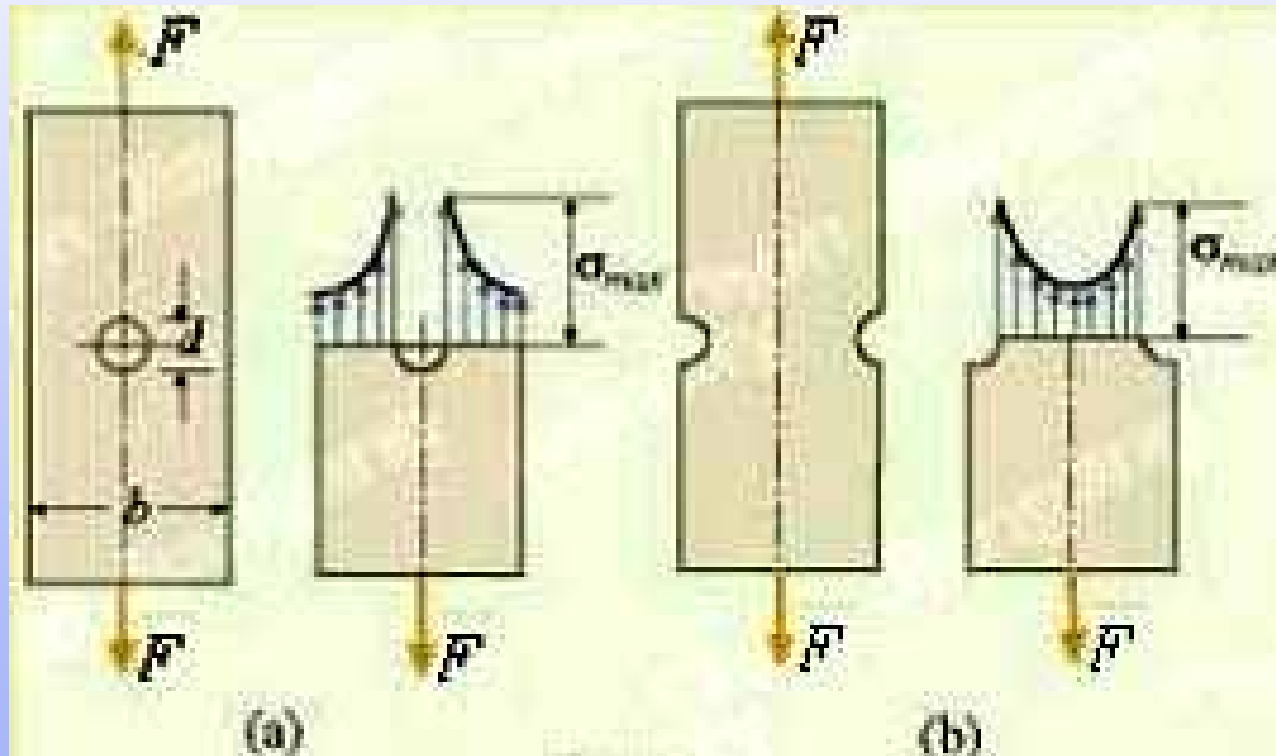
现有钢、铸铁两种棒材，其直径相同，从承载能力和经济效益两方面考虑，图示结构两杆的合理选材方案是 _____。

- (A) 1杆为钢，2杆为铸铁； (C) 两杆均为钢；
(B) 1杆为铸铁，2杆为钢； (D) 两杆均为铸铁。



§ 2-8 应力集中的概念

应力集中 由于杆件横截面突然变化而引起的应力局部骤然增大的现象。



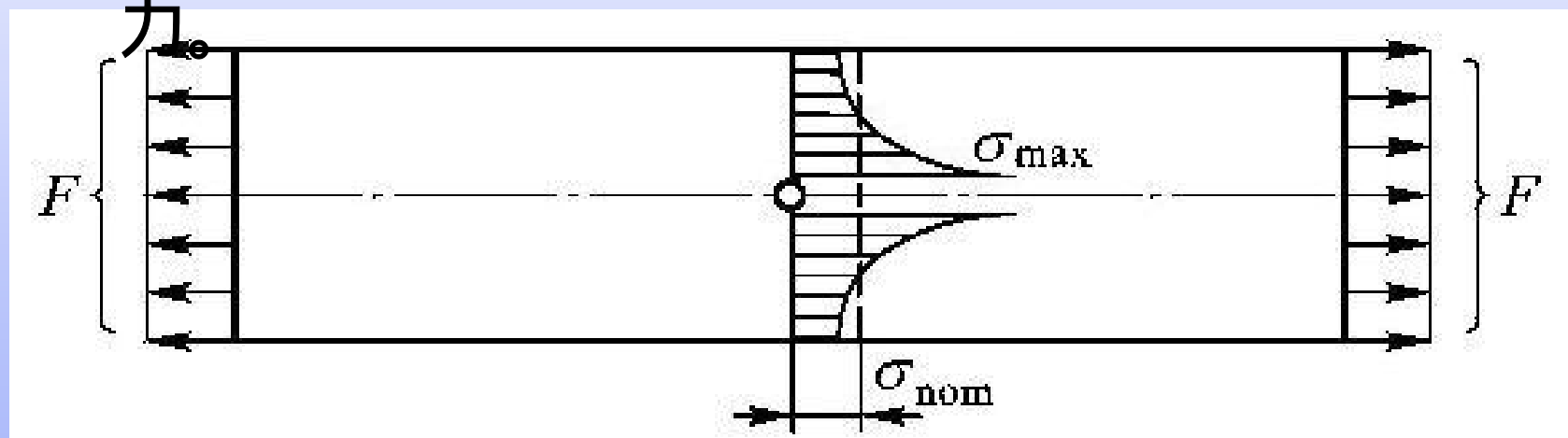
截面尺寸变化越剧烈，应力集中就越严重。

理论应力集中因数：

$$K_{t\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}}$$

下标 $t\sigma$ 表示是对应于正应力的理论应力集中因数

σ_{nom} —— 截面突变的横截面上 σ_{\max} 作用点处的名义应力；轴向拉压时为横截面上的平均应力



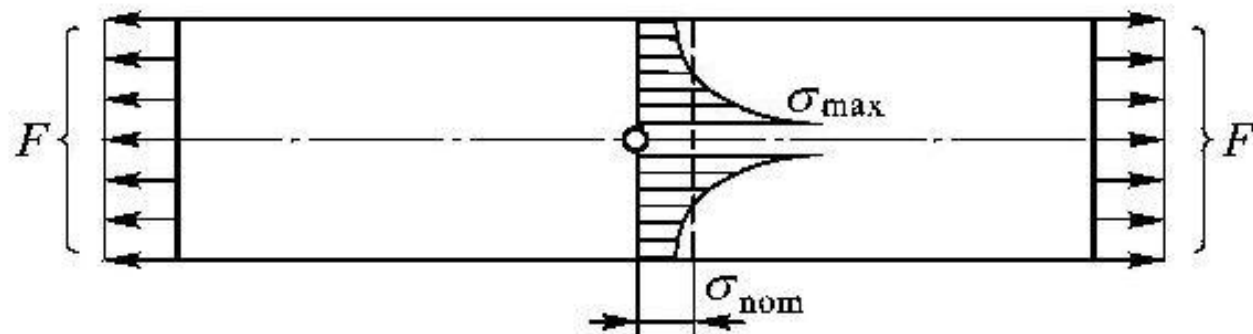
具有小孔的均匀受拉平板

$$K_{t\sigma} \approx 3$$

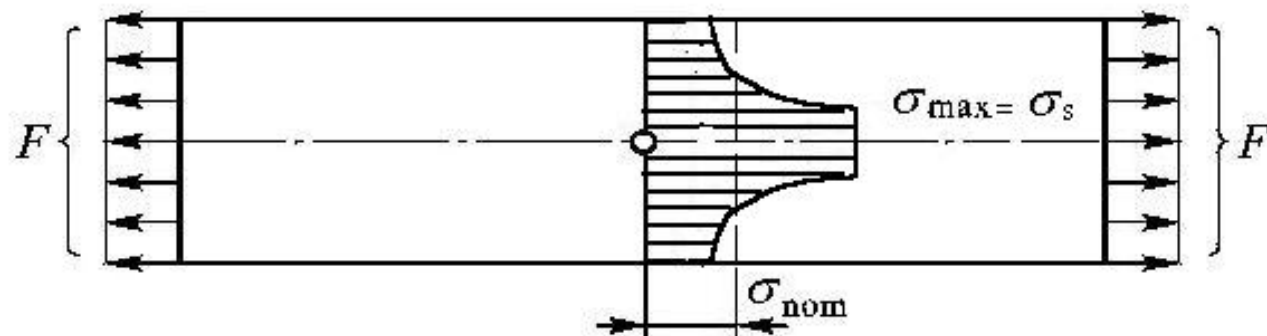
应力集中对强度的影响

理想弹塑性材料制成的杆件受静荷载时

弹性阶段

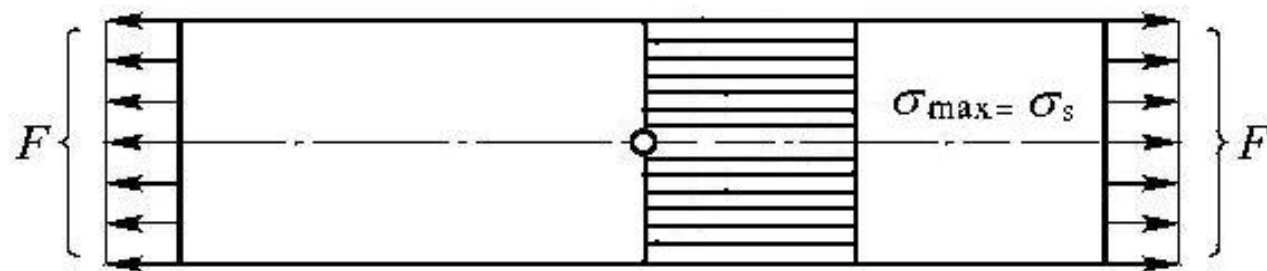


荷载增大进入弹塑性



极限荷载

$$F = \sigma_s \cdot A_j$$



塑性材料、静荷载

不考虑应力集中的影响

均匀的脆性材料
或塑性差的材料

要考虑应力集中的影响

非均匀的脆性材料，如铸铁

动荷载

课外作业

- P₅₅ 2-13、2-14、2-15

再见!