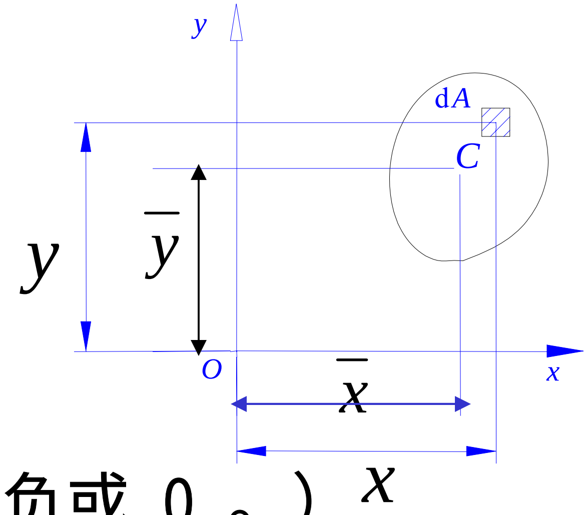
附录I　　截面的几何性质

§ I-1　截面的静矩和形心位置

设任意形状截面如图所示。



1. 静矩（或一次矩）

$$S_y = \int_A x\mathrm{d}A \qquad S_x = \int_A y\mathrm{d}A$$

（常用单位： m³ 或mm³ 。值：可为正、负或 0 。）

2.形心坐标公式（可由均质等厚薄板的重心坐标而得）

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,\mathrm{d}A}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A y\,\mathrm{d}A}{A}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_A x \, \mathrm{d} A}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A y \, \mathrm{d} A}{A}$$

3. 静矩与形心坐标的关系

$$S_y = A\bar{x} \qquad S_x = A\bar{y} \qquad \bar{x} = \frac{S_y}{A} \quad \bar{y} = \frac{S_x}{A}$$

可知：截面对形心轴的静矩恒为**0**，反之，亦然。

4. 组合截面的静矩

由静矩的定义知：整个截面对某轴的静矩应等于它的各组成部分对同一轴的静矩的代数和：

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} A_i \overline{x_i} \qquad S_x = \sum_{i=1}^{n} A_i \overline{y_i}$$

（A_i和$\bar{x}_i$，$\bar{y}_i$分别为第i个简单图形的面积及其形心坐标）

5. 组合截面的形心坐标公式

将 $S_y=\sum_{i=1}^{n}A_i\overline{x_i}$ $\quad S_x=\sum_{i=1}^{n}A_i\overline{y_i}$

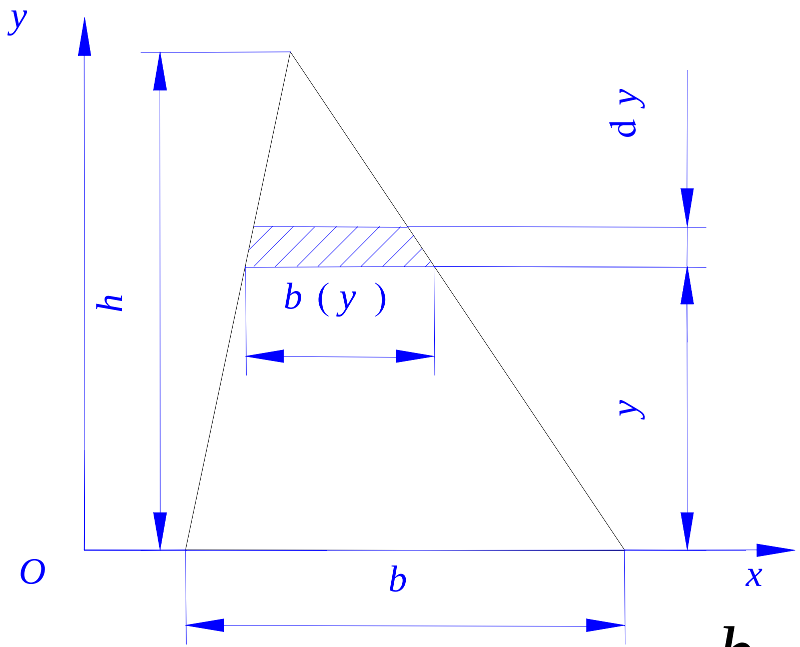
代入 $S_y=A\overline{x}$ $\quad S_x=A\overline{y}$

解得组合截面的形心坐标公式为：

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i\overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{n}A_i}\qquad \overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i\overline{y}_i}{\sum_{i=1}^{n}A_i}$$

（注：被“减去”部分图形的面积应代入负值）

例 （P_{334} I-1） 试计算图示三角形截面对于与其底边重合的x轴的静矩。

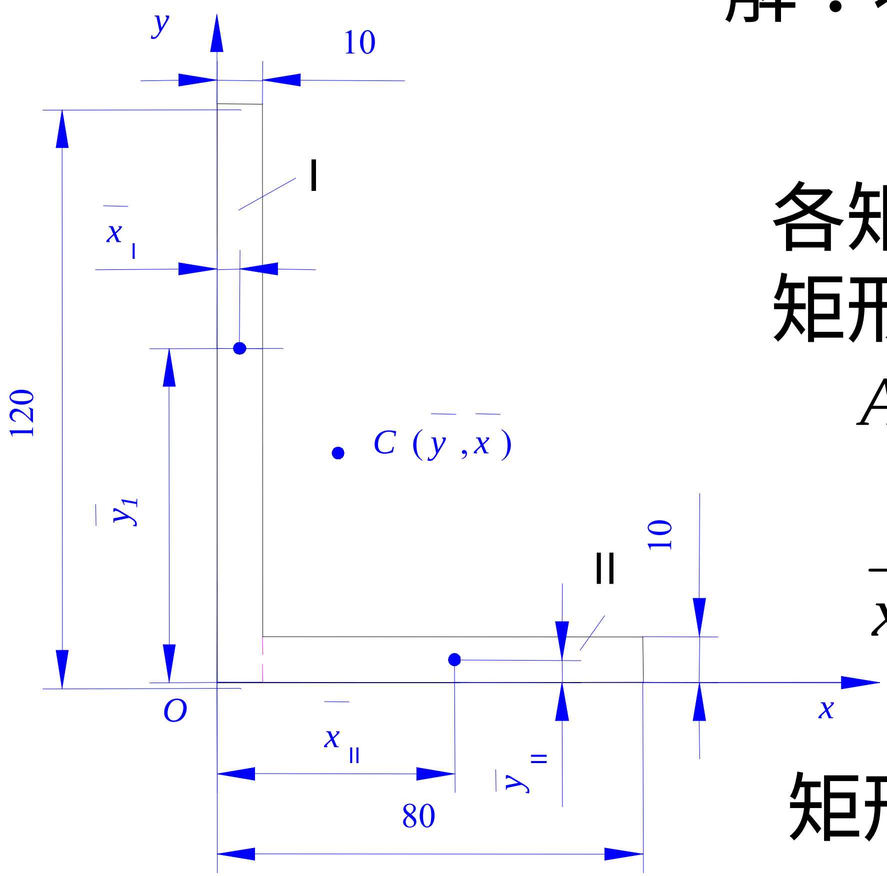


解： 取平行于x轴的狭长条， 易求 $b(y)=\dfrac{b}{h}(h-y)$

因此 $\mathrm{d}A=\dfrac{b}{h}(h-y)\mathrm{d}y$ 所以对x轴的静矩为

$$S_x=\int_A y\,\mathrm{d}A=\int_0^h \frac{b}{h}(h-y)y\,\mathrm{d}y=\frac{bh^2}{6}$$

例(P_{335} I-2) 试计算图示截面形心C的位置。



解：将截面分为1、2两个矩形。

建立坐标系如图示。

各矩形的面积和形心坐标如下：

矩形I

$$A_1 = 10 \times 120 = 1200\text{mm}^2$$

$$\bar{x}_1 = \frac{10}{2} = 5\text{mm} \quad \bar{y}_1 = \frac{120}{2} = 60\text{mm}$$

矩形II　$A_2 = 10 \times 70 = 700\text{mm}^2$

$$\bar{x}_2 = 10 + \frac{70}{2} = 45\text{mm} \quad \bar{y}_2 = \frac{10}{2} = 5\text{mm}$$

$$A_1 = 10 \times 120 = 1200\text{mm}^2$$

$$\bar{x}_1 = \frac{10}{2} = 5\text{mm} \quad \bar{y}_1 = \frac{120}{2} = 60\text{mm}$$

$$A_2 = 10 \times 70 = 700\text{mm}^2$$

$$\bar{x}_2 = 10 + \frac{70}{2} = 45\text{mm} \quad \bar{y}_2 = \frac{10}{2} = 5\text{mm}$$

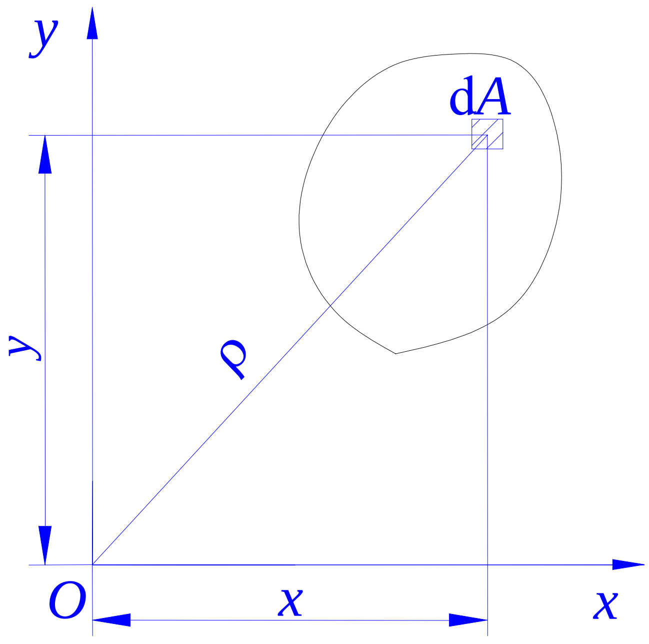
代入组合截面的形心坐标公式

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i}$$

解得： $\bar{x} \approx 20\text{mm}$ $\bar{y} \approx 40\text{mm}$

§ I－2 极惯性矩 · 惯性矩 · 惯性积

设任意形状截面如图所示。



1.极惯性矩（或截面二次极矩）

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$

2.惯性矩（或截面二次轴矩）

$$I_y = \int_A x^2 \mathrm{d}A \qquad I_x = \int_A y^2 \mathrm{d}A$$

（为正值，单位**m⁴**或**mm⁴**）

由于 $\rho^2 = y^2 + x^2$

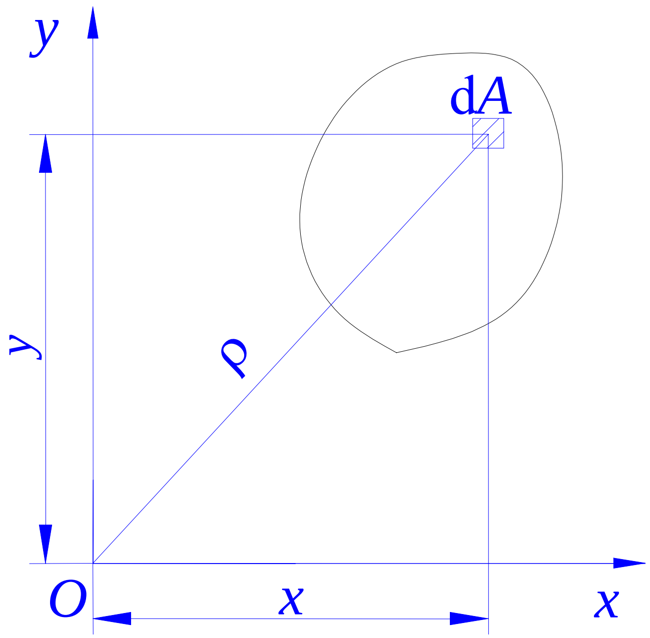
所以 $I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_A (y^2 + x^2)\ \mathrm{d}A = I_x + I_y$

（即截面对一点的极惯性矩，等于截面对以该点为原点的任意两正交坐标轴的惯性矩之和。）

3. 惯性积

$$I_{xy} = \int_A xy \, \mathrm{d}A$$

（其值可为正、负或0，单位:m⁴ 或 mm⁴)



结论：

截面对于包含对称轴在内的一对正交轴的惯性积为0。

4．惯性半径

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

（单位m 或 mm）

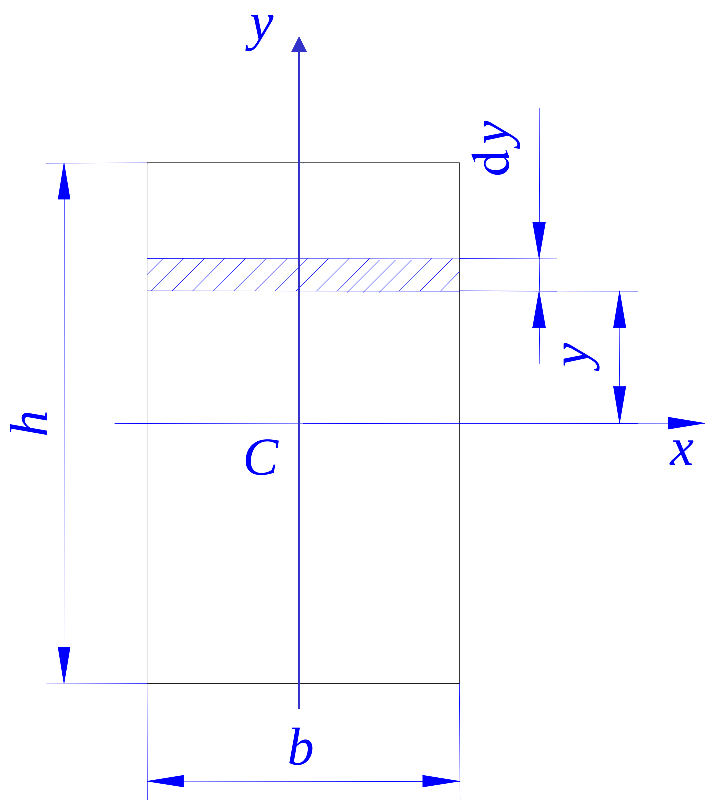
P337 例I-3 试计算图*a*所示矩形截面对于其对称轴（即形心轴）*x*和*y*的惯性矩。

解： 取平行于*x*轴的狭长条，

则 $\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}y$

$$I_x = \int_A y^2 \mathrm{d}A = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} by^2 \mathrm{d}y = \frac{bh^3}{12}$$

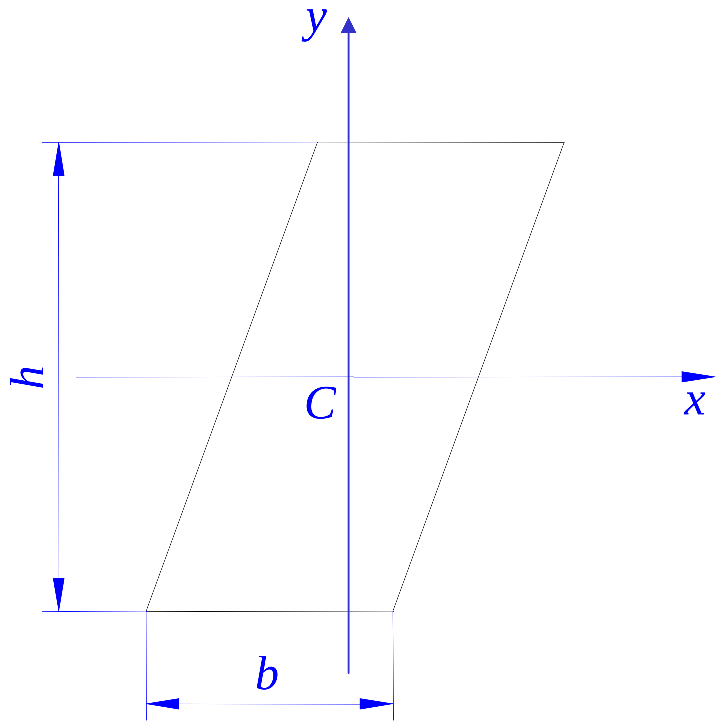
同理 $I_y = \dfrac{hb^3}{12}$



(a)

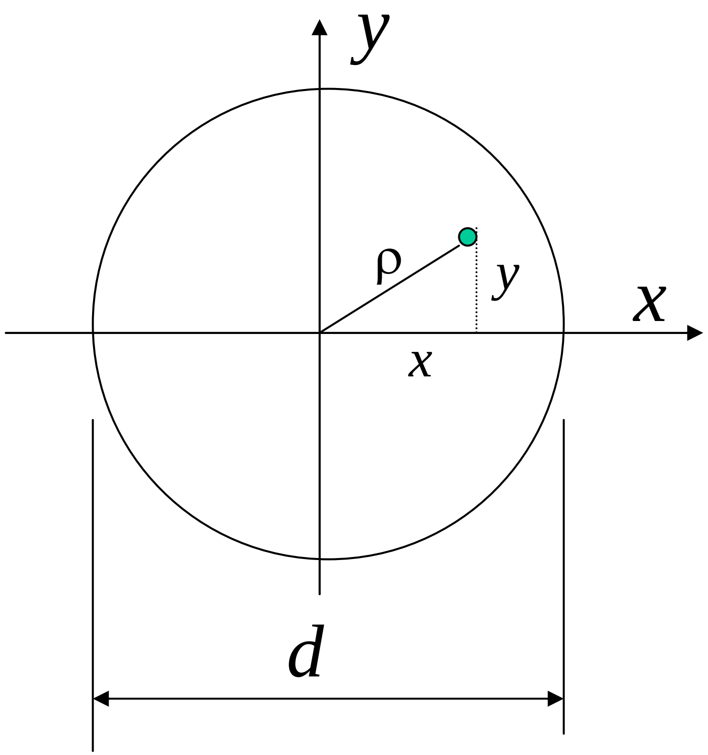
若截面是高度为h的平行四边形（图b），则其对形心轴x 的惯性矩同样为

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$



(b)

例**I-4** 试计算图示圆截面对于其形心轴（即直径轴）的惯性矩。



解：

由于圆截面有极对称性，

所以 $I_z = I_y$

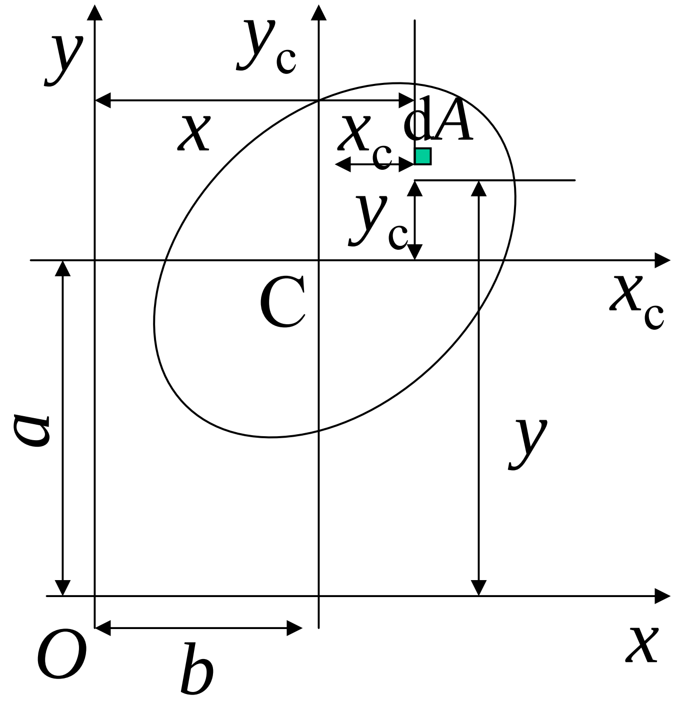
由于 $I_x + I_y = I_{\mathrm{p}}$

所以 $$I_z = I_y = \frac{I_{\mathrm{p}}}{2} = \frac{\pi d^4}{64}$$

§Ⅰ-3　惯性矩和惯性积的平行移轴公式

•组合截面的惯性矩和惯性积

1.惯性矩和惯性积的平行移轴公式



设有面积为***A***的任意形状的截面。***C***为其形心，***C$x_c$$y_c$***为形心坐标系。与该形心坐标轴分别平行的任意坐标系为***Oxy*** **,**形心***C***在在**O*xy***坐标系下的坐标为**(*a* , *b*)**

任意微面元**d*A***在两坐标系下的坐标关系为：

$$x = x_C + b \qquad y = y_C + a$$

$$I_x = \int_A y^2 \mathrm{d}A = \int_A (y_c + a)^2 \mathrm{d}A$$

$$= \int_A y_c{}^2 \mathrm{d}A + 2a \int_A y_c \ \mathrm{d}A + a^2 \int_A \ \mathrm{d}A$$

$$= I_{x_c} + 2a \cdot \left(A \cdot \overline{y_c}\right) + a^2 A$$

$$= I_{x_c} + a^2 A$$

同理，有：

$$I_x = I_{x_c} + a^2 A \qquad I_y = I_{y_c} + b^2 A \qquad I_{xy} = I_{x_c y_c} + abA$$

（此为平行移轴公式 ）

注意：•式中的***a***、***b***代表坐标值，有时可能取负值。

•等号右边各首项为相对于形心轴的量。

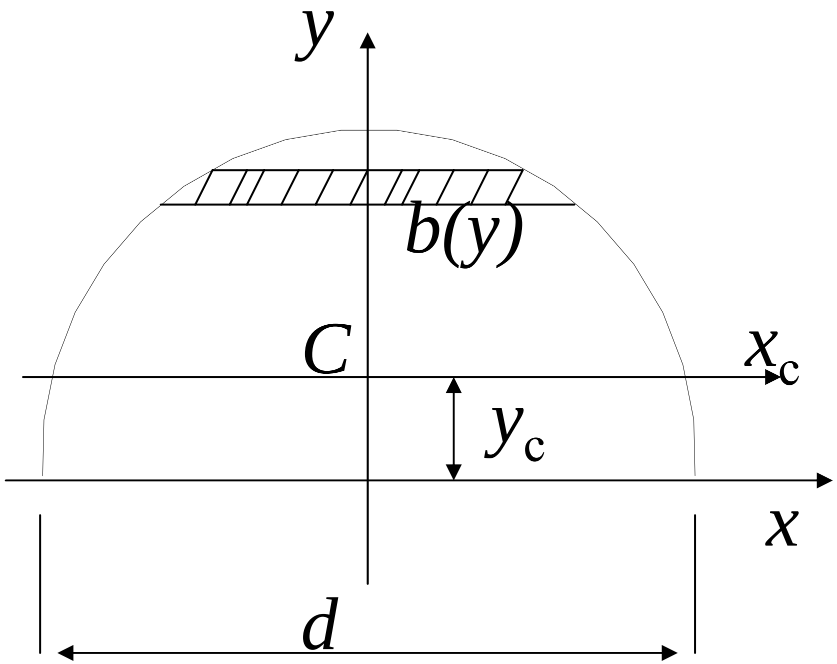
2.组合截面的惯性矩和惯性积

根据惯性矩和惯性积的定义易得组合截面对于某轴的惯性矩（或惯性积）等于其各组成部分对于同一轴的惯性矩（或惯性积）之和：

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} I_{x_i} \qquad I_y = \sum_{i=1}^{n} I_{y_i} \qquad I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} I_{xy_i}$$

例**I-5** 求图示直径为d的半圆对其自身形心轴x_c的惯性矩。

解：　　（1）求形心坐标



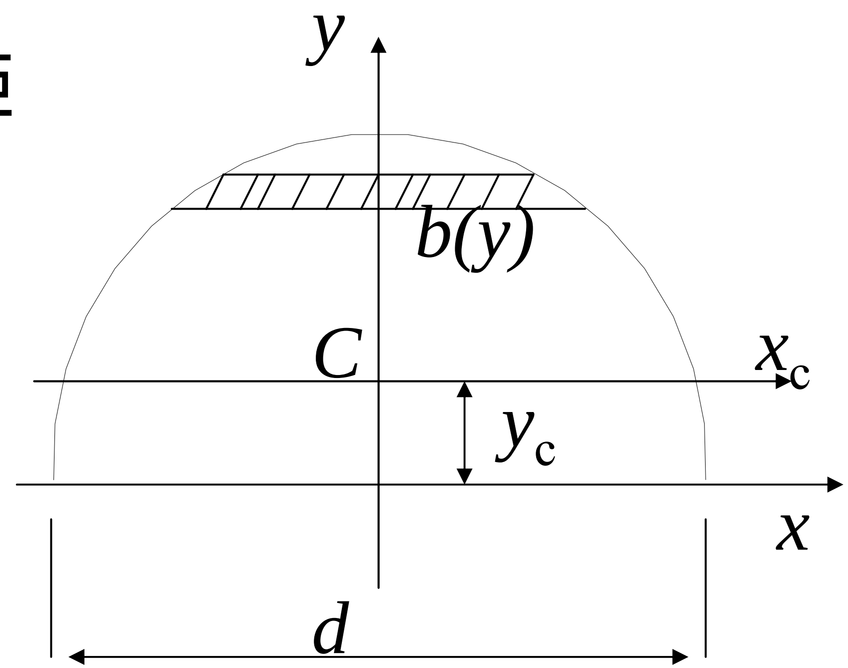
$$b(y)=2\sqrt{R^2-y^2}$$

$$S_x=\int_A y\,\mathrm{d}A=\int_0^{\frac{d}{2}} y\,b(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{d}{2}} y\cdot 2\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{d^3}{12}$$

$$y_c=\frac{S_x}{A}=\frac{d^3/12}{\pi d^2/8}=\frac{2d}{3\pi}$$

（2）求对形心轴x_c的惯性矩

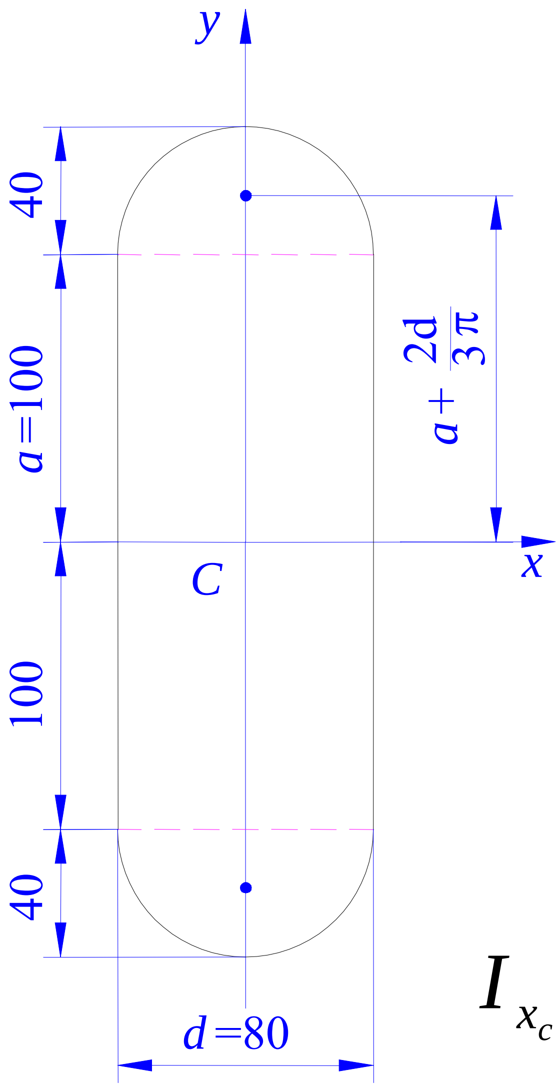


$$I_x = \frac{\pi d^4 / 64}{2} = \frac{\pi d^4}{128}$$

由平行移轴公式得：

$$I_{x_c} = I_x - (y_c)^2 \cdot \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi d^4}{128} - \frac{d^4}{18\pi}$$

例(P_{339} I-5) 试求图*a* 所示截面对于对称轴*x*的惯性矩。



(a)

解：将截面看作一个矩形和两个半圆组成。

（1）矩形对*x*的惯性矩：

$$I_{x1}=\frac{d(2a)^3}{12}=\frac{80\times 200^3}{12}$$

$$=5333\times 10^4\ \mathrm{mm}^4$$

（2）一个半圆对其自身形心轴x_c的惯性矩（见上例）

$$I_{x_c}=I_x-(y_c)^2\cdot\frac{\pi d^2}{8}=\frac{\pi d^4}{128}-\frac{d^4}{18\pi}$$

（3）一个半圆对x的惯性矩：

由平行移轴公式得：

$$I_{x2} = I_{x_c} + \left(a + \frac{2d}{3\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi d^2}{8}$$

$$= \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{d^2}{32} + \frac{a^2}{2} + \frac{2ad}{3\pi}\right) = 3467 \times 10^4\,\mathrm{mm}^4$$

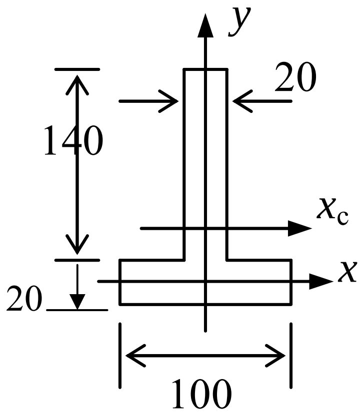
（4）整个截面对于对称轴x的惯性矩：

$$I_x = I_{x1} + 2I_{x2}$$

$$= 5333 \times 10^4 + 2 \times 3467 \times 10^4$$

$$= 12270 \times 10^4\,\mathrm{mm}^4$$

课堂练习题　试计算组合截面的$\boldsymbol{I}_{\mathbf{xc}}$.



解：（1）求截面形心位置：

$$\bar{y}=\frac{140\times20\times80+100\times20\times0}{140\times20+100\times20}=46.67mm$$

（2）求个简单截面对形心轴的惯性矩：

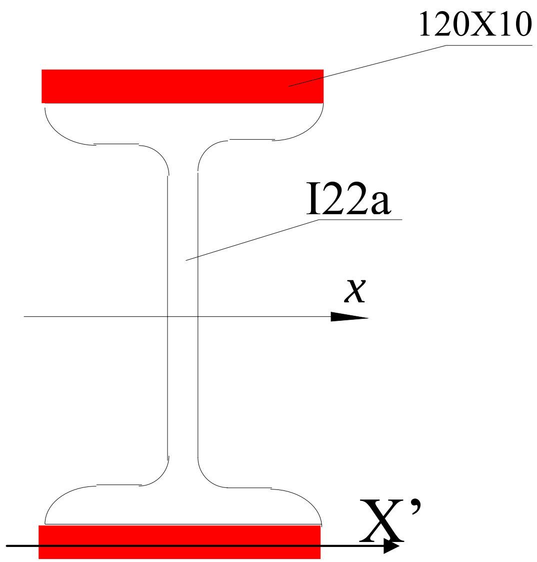
$$I_{xc1}=\frac{1}{12}\times20\times140^3+(80-46.67)^2\times20\times140=7.68\times10^6mm^4$$

$$I_{xc2}=\frac{1}{12}\times100\times20^3+46.67^2\times20\times100=4.43\times10^6mm^4$$

（3）求整个截面的惯性矩：

$$I_{xc}=I_{xc1}+I_{xc2}=7.68\times10^6+4.43\times10^6=12.11\times10^6mm^4$$

例：（P_{351} I-11(a)）求图示组合图形对其对称州x的惯性矩。



解：1)查表，I22a工字钢截面几何性质

P_{356} $A=42cm^2$

高 $h=220mm$ $I_x=3400cm^4$

2) 过矩形截面的形心作x'轴

$A=120\text{x}10=1200mm^2=12cm^2$

$$I_{x'}=\frac{bh^3}{12}=\frac{120\times10^3}{12}=1cm^4$$

3)整个截面对x轴的惯性矩为

$I_x=I_x+2(I_{x'}+Ab^{2)}$

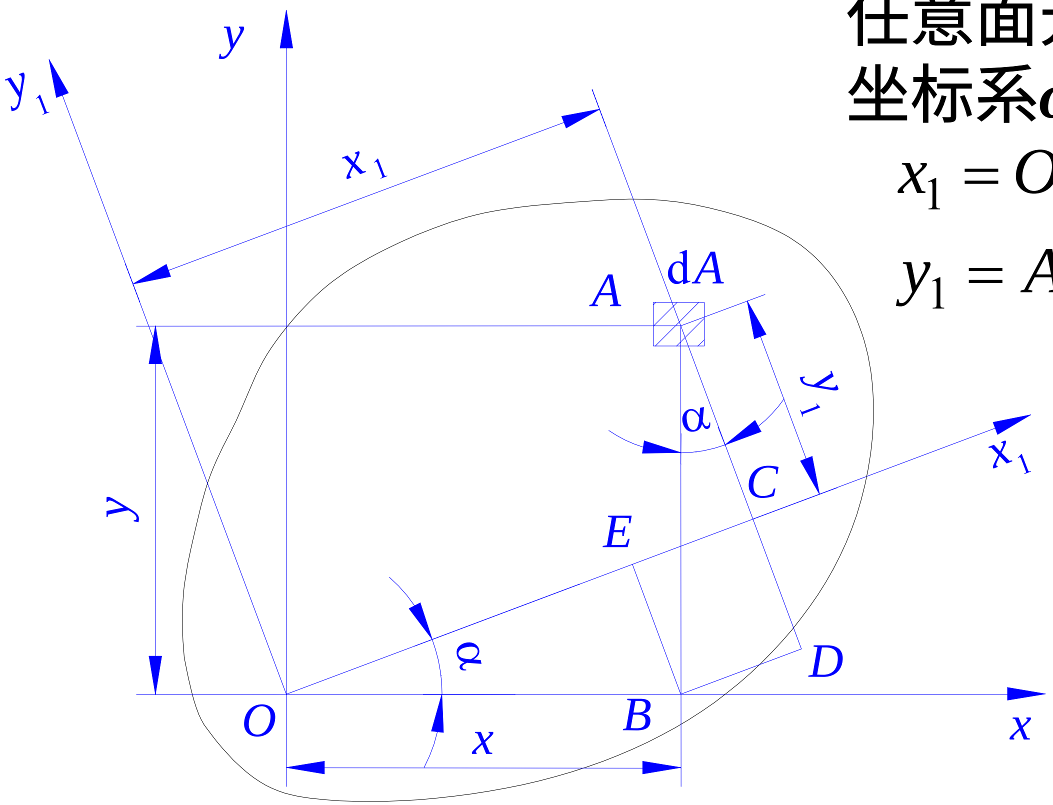
$=3400+2[1+12(11+0.5)^2]$

$=3400+3176=6576cm^4$

§I-4　惯性矩和惯性积的转轴公式

•截面的主惯性轴和主惯性矩

1.惯性矩和惯性积的转轴公式



任意面元**d*A*** 在旧坐标系***oxy***和新坐标系$\boldsymbol{ox_1y_1}$的关系为：

$$x_1 = OC = OE + BD = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

$$y_1 = AC = AD - EB = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$

代入惯性矩的定义式：

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 \,\mathrm{d}A$$

$$I_{x_1}=\int_A y_1^2\,\mathrm{d}A$$

即：

$$I_{x_1}=\cos^2\alpha\int_A y^2\,\mathrm{d}A+\sin^2\alpha\int_A x^2\,\mathrm{d}A$$

$$-2\sin\alpha\cos\alpha\int_A xy\,\mathrm{d}A$$

$$=I_x\cos^2\alpha+I_y\sin^2\alpha-2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$$

利用二倍角函数代入上式，得转轴公式 ：

$$I_{x_1}=\frac{I_x+I_y}{2}+\frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\alpha-I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$I_{y_1}=\frac{I_x+I_y}{2}-\frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\alpha+I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$I_{x_1y_1}=\frac{I_x-I_y}{2}\sin 2\alpha+I_{xy}\cos 2\alpha$$

注：

- 上式中的α的符号为：从旧轴x至新轴x_1逆时针为正，顺时针为负。

- 将前两式相加得

$$I_{x_1}+I_{y_1}=I_x+I_y$$

（上式表明，截面对于通过同一点的任意一对相互垂直的坐标轴的两惯性矩之和为一常数，并等于截面对该坐标原点的极惯性矩 ）

2.截面的主惯性轴和主惯性矩

由惯性积的转轴公式可知，当坐标轴旋转时，惯性积将随着α角作周期性变化，且有正有负。因此，必有一特定的角度α_0，使截面对于新坐标轴x_0、y_0的惯性积等于零。

(1) 主惯性轴:截面对其惯性积等于**0**的一对坐标轴。

(2) 主惯性矩:截面对于主惯性轴的惯性矩。

(3) 形心主惯性轴：当一对主惯性轴的交点与截面的形心重合时。

(4) 形心主惯性矩:截面对于形心主惯性轴的惯性矩。

(5)确定主惯性轴的位置

设α_0是旧轴x 逆时针转向主惯性轴x_0的角度，则由惯性积的转轴公式及主惯性轴的定义，得

$$\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha_0 + I_{xy}\cos 2\alpha_0 = 0$$

可改写为

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

（注：将负号置于分子上有利于确定2 α_0角的象限）

(5) 由上面$\tan 2\alpha_0$的表达式求出$\cos 2\alpha_0$、$\sin 2\alpha_0$后，再代入惯性矩的转轴公式，化简后可得主惯性矩的计算公式：

$$I_{x_0} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}$$

极大值I_{max}

$$I_{y_0} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}$$

极小值I_{min}

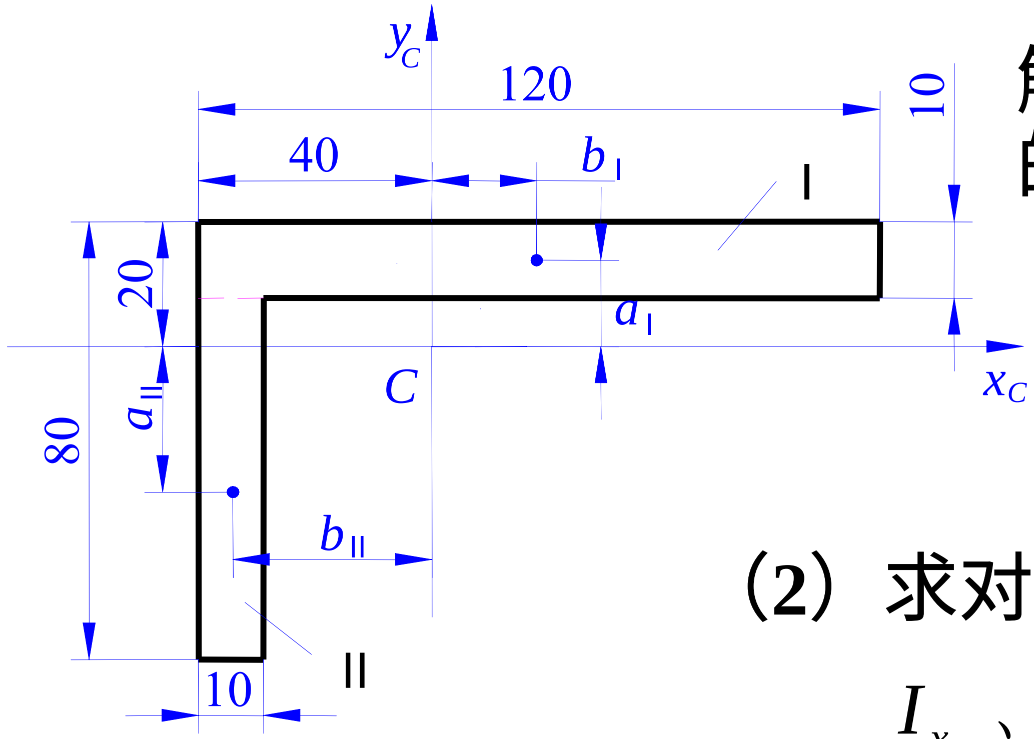
(6) 几个结论

•若截面有一根对称轴，则此轴即为形心主惯性轴之一，另一形心主惯性轴为通过形心并与对称轴垂直的轴。

•若截面有二根对称轴，则此二轴即为形心主惯性轴。

•若截面有三根对称轴，则通过形心的任一轴均为形心主惯性轴，且主惯性矩相等。

例(P_{344} I-7) 试计算截面的形心主惯性矩。



解：作与上、左边平行的形心坐标轴$x_c y_c$。

（1）求形心坐标：

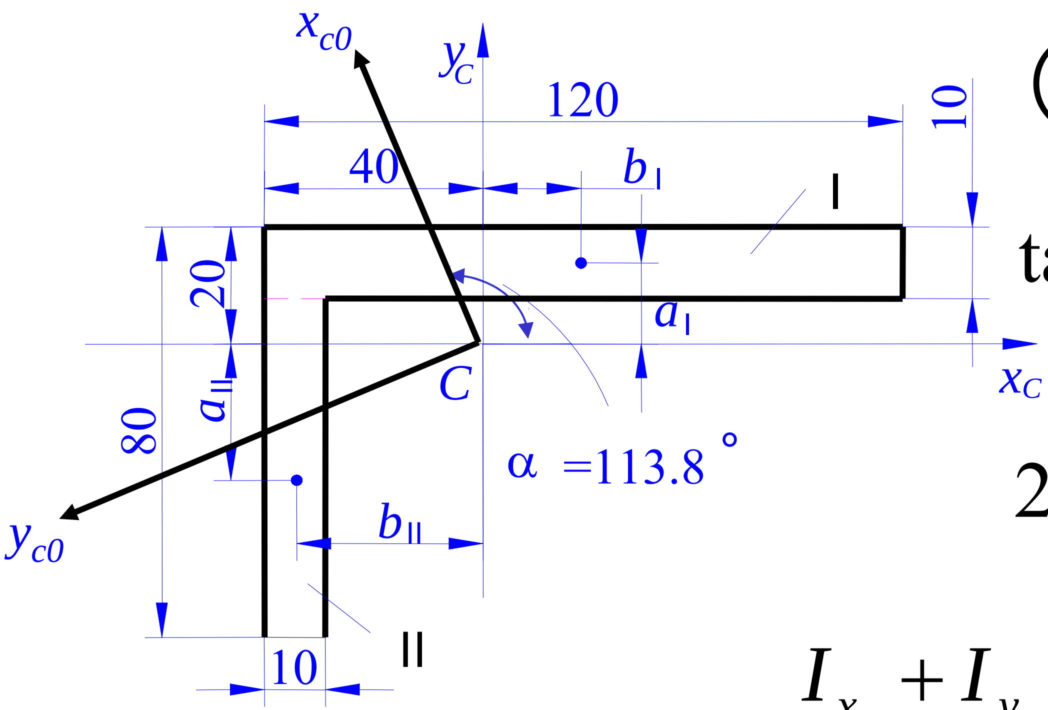
$$(a_I, b_I)、(a_{II}, b_{II})$$

（2）求对自身形心轴的惯性矩。

$$I_{x_{c1}}、I_{y_{c1}}，I_{x_{c2}}、I_{y_{c2}}$$

（3）由平行移轴公式求整个截面的

$$I_{xc}、I_{yc}、I_{x_c y_c}$$



（4）由转轴公式得

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = 1.093$$

$$2\alpha_0 = 227.6^\circ \qquad \alpha_0 = 113.8^\circ$$

$$I_{x_{c0}} = I_{\max} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{x_c} - I_{y_c}\right)^2 + 4I_{x_c y_c}^2}$$

$$= 321 \times 10^4 \, \mathrm{mm}^4$$

$$I_{y_{c0}} = I_{\min} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{x_c} - I_{y_c}\right)^2 + 4I_{x_c y_c}^2}$$

$$= 57.4 \times 10^4 \, \mathrm{mm}^4$$

作业：I-1(b), I-3(b), I-11(b), I-13