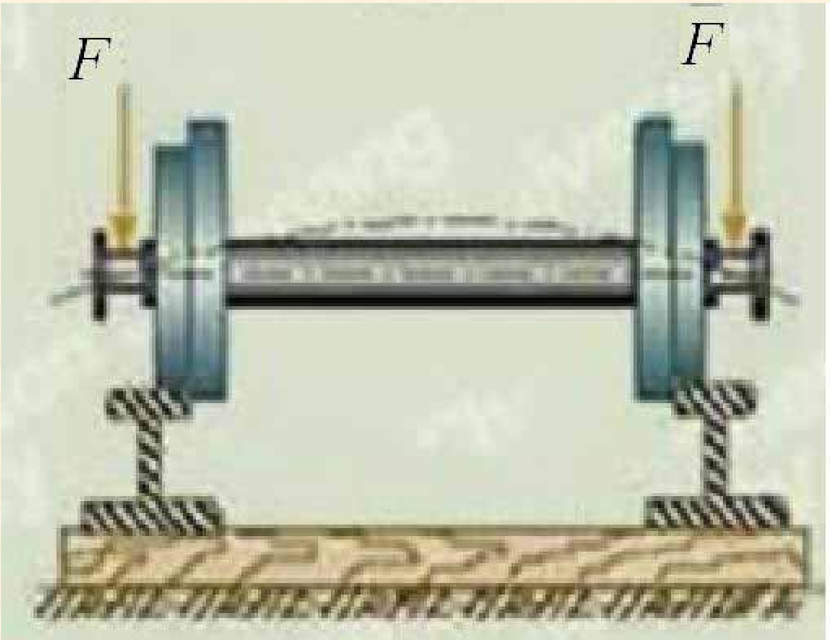
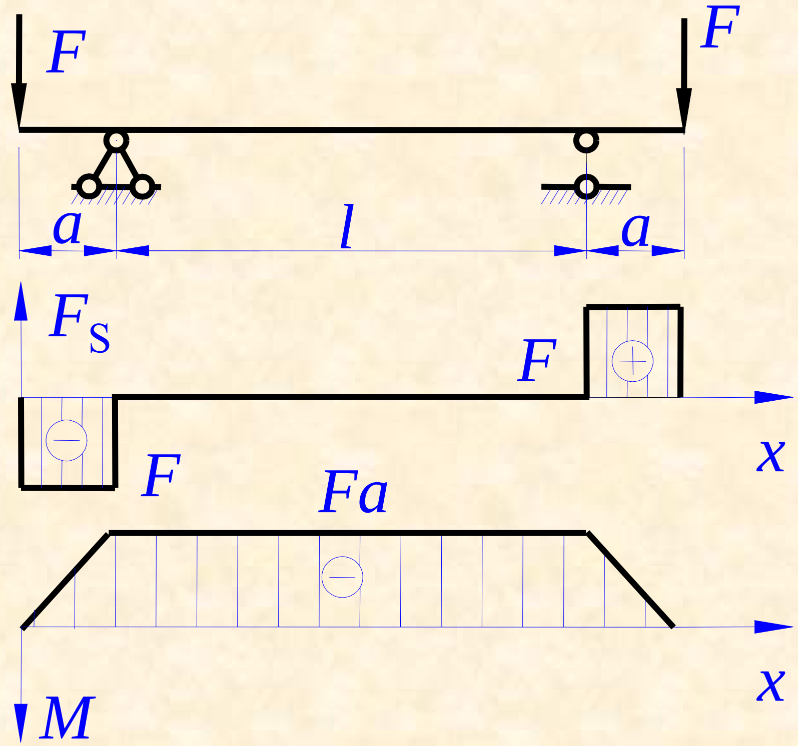
§4-4 梁横截面上的正应力•梁的正应力强度条件





纯弯曲

$F_S = 0 \Rightarrow \tau = 0$

$M =$ 常量 $\quad \sigma \neq 0$

横力弯曲

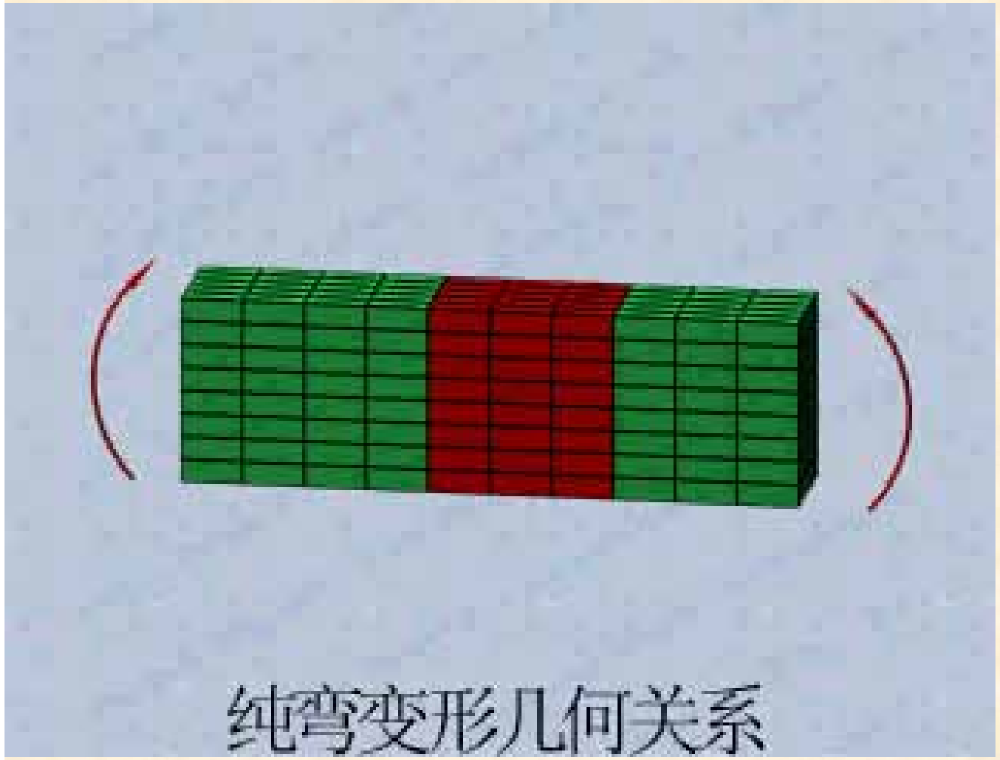
$F_S \neq 0 \Rightarrow \tau \neq 0$

$M = M(x) \quad \sigma \neq 0$

贵州大学土建学院

Ⅰ．纯弯曲时梁横截面上的正应力

（一）几何方面



表面变形情况

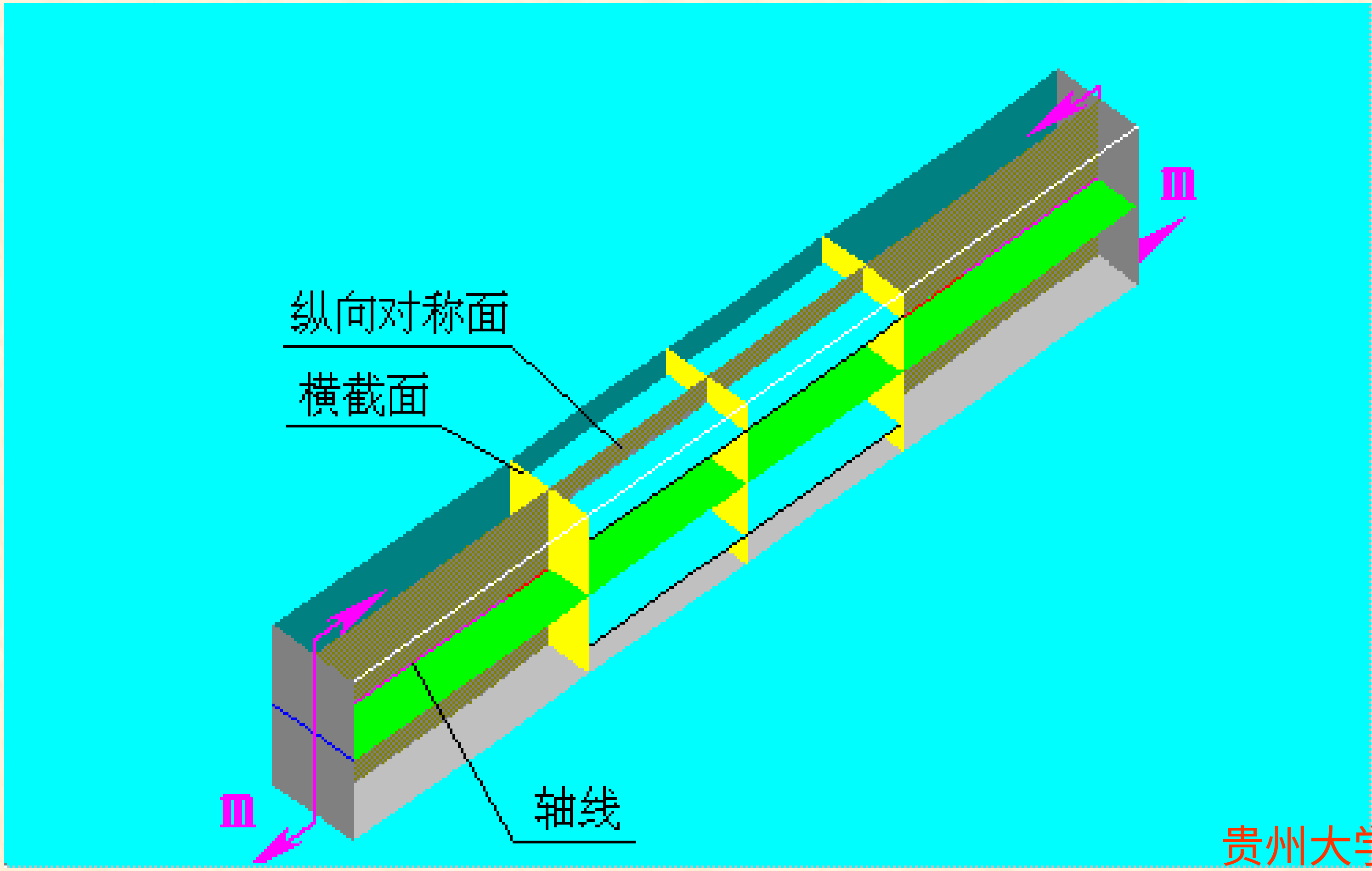
(1)纵线弯成弧线，靠近顶面的纵线缩短，而靠近底面的纵线则伸长；

(2)横线仍为直线，并与变形后的纵线保持正交，只是横线间相对转动。

平面假设

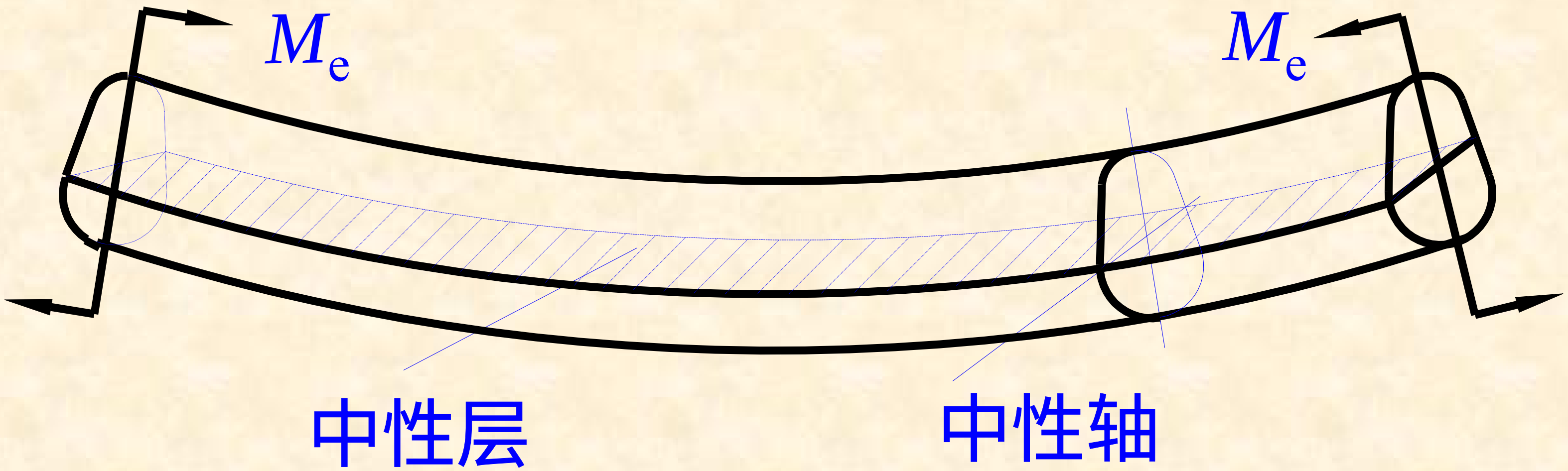
梁在纯弯曲时，横截面仍保持为平面，且与梁变形后的轴线仍保持正交，只是绕垂直于纵对称轴的某一轴转动。

中性轴

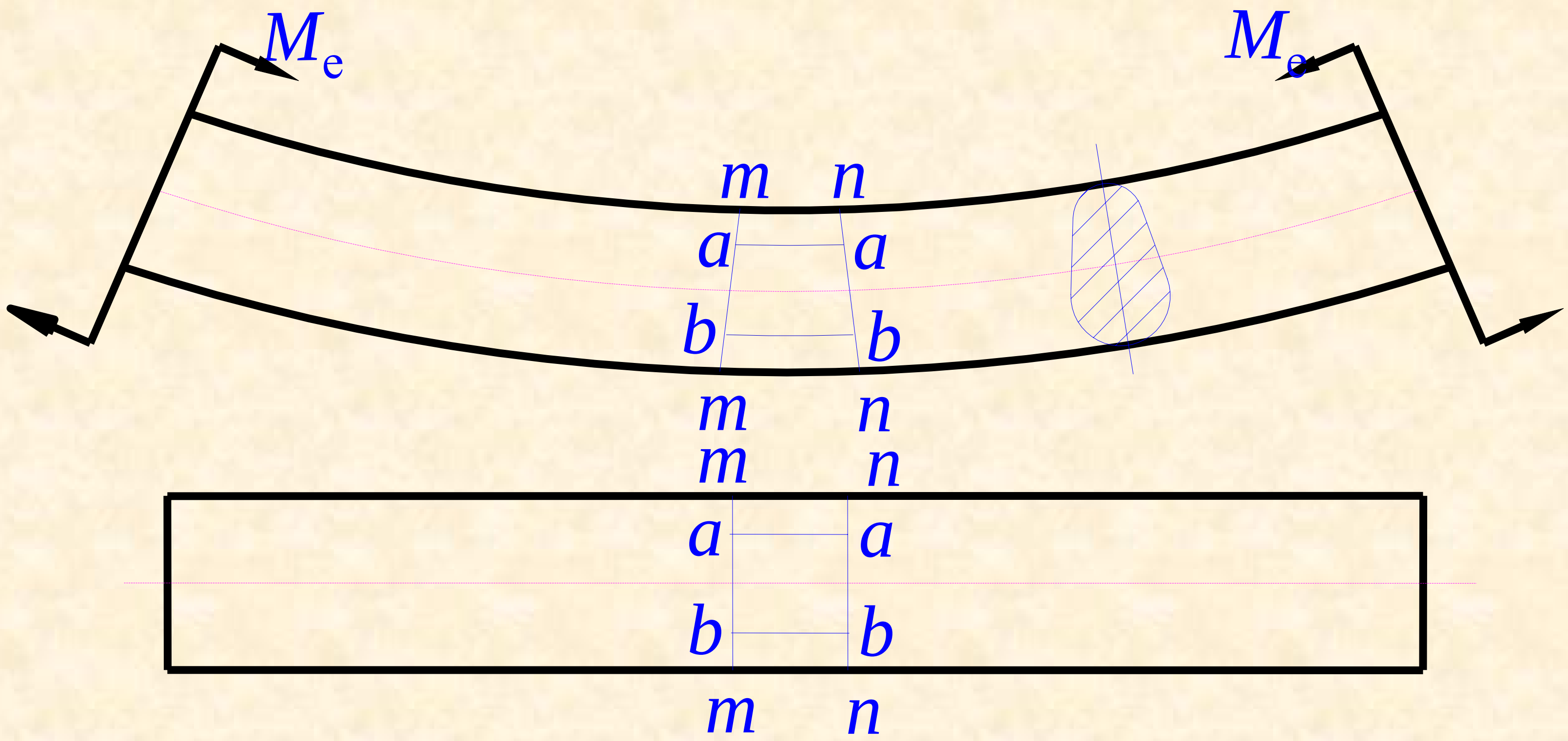


中性层

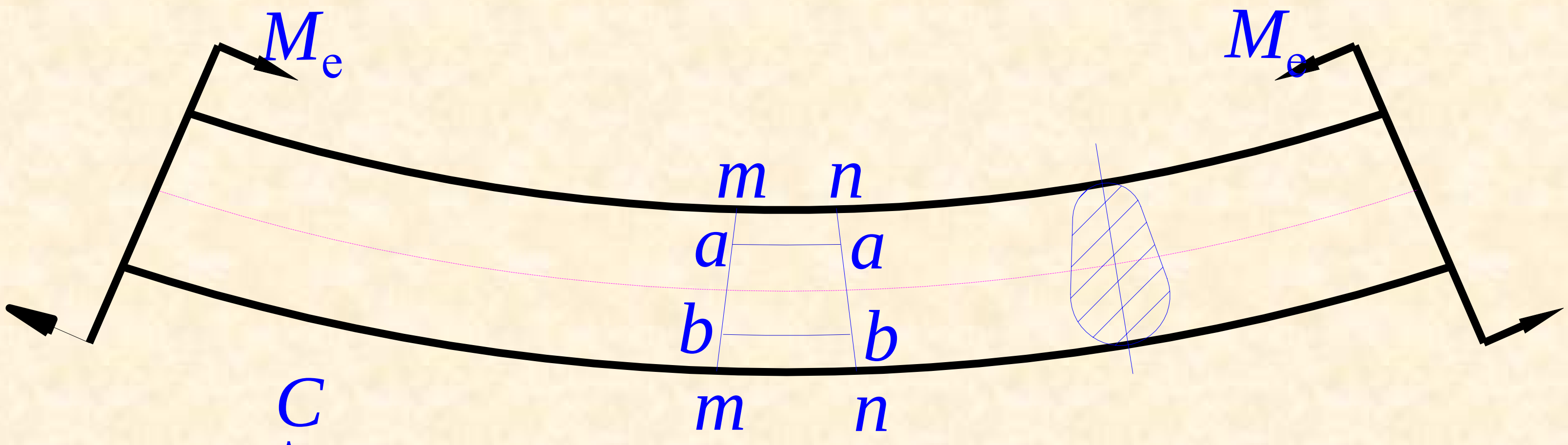
根据变形的连续性可知，梁弯曲时从其凹入一侧的纵向线缩短区到其凸出一侧的纵向线伸长区，中间必有一层纵向无长度改变的过渡层，称为中性层 。

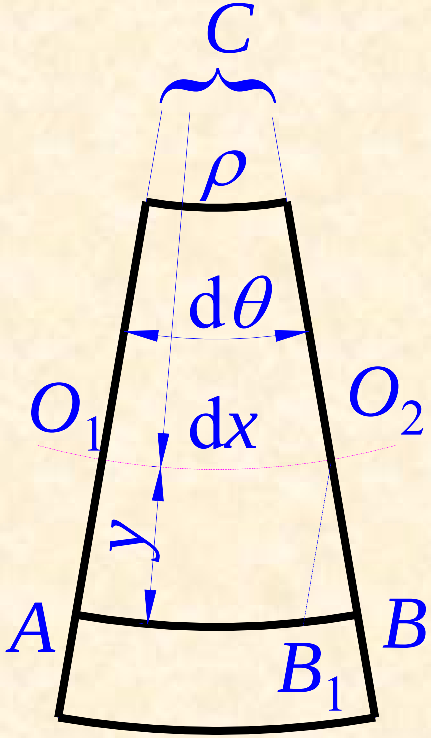


中性轴　中性层与横截面的交线就是中性轴。



M_e
M_e
m
n
a
a
b
b
m
n
m
n
a
a
b
b
m
n





$$O_1O_2 = \mathrm{d}\,x = \rho\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$AB = (\rho + y)\,\mathrm{d}\,\theta$$

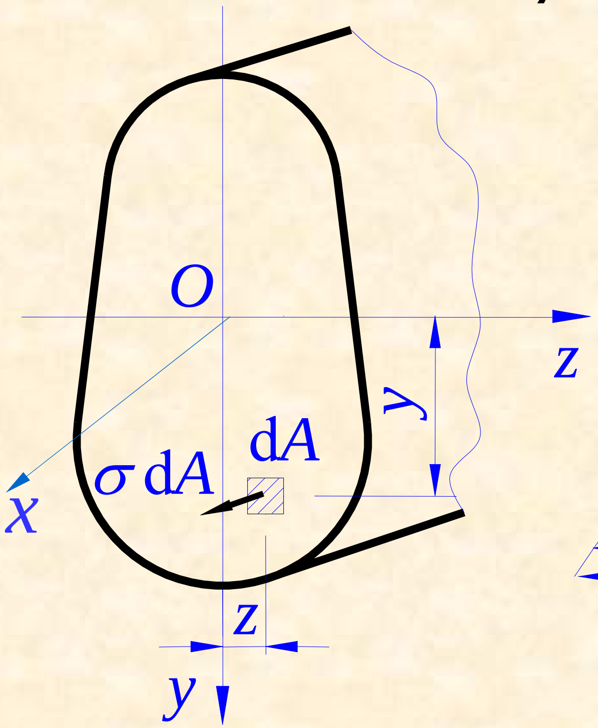
$$\varepsilon = \frac{B_1B}{AB_1} = \frac{B_1B}{O_1O_2} = \frac{y}{\rho}$$

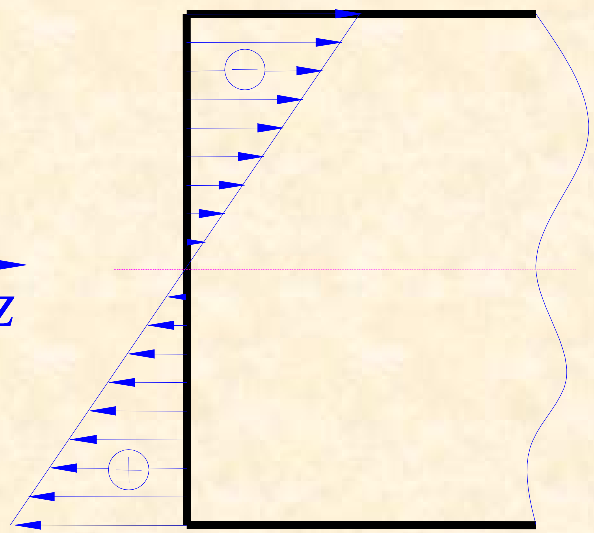
ρ——中性层的曲率半径

（二）物理方面——单轴应力状态下的胡克定律

不计挤压，即认为梁内各点均处于单轴应力状态。当$\sigma<\sigma_p$，且拉、压弹性模量相同时，有

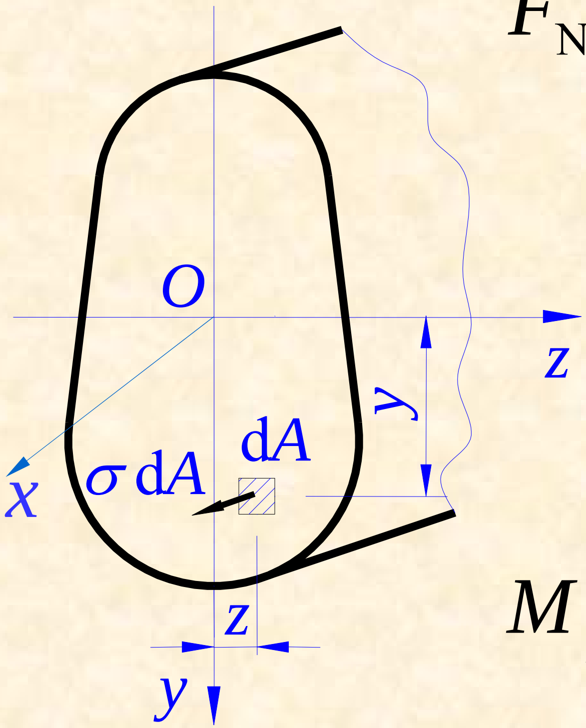
$$\varepsilon=\frac{y}{\rho} \qquad \sigma=E\varepsilon=E\frac{y}{\rho}$$





即直梁的横截面上的正应力沿垂直于中性轴的方向按直线规律变化。

（三）静力学方面



$$F_{\mathrm{N}} = \int_A \sigma \,\mathrm{d}A = 0$$

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}$$

$$\frac{E}{\rho}\int_A y \,\mathrm{d}A = \frac{ES_z}{\rho} = 0$$

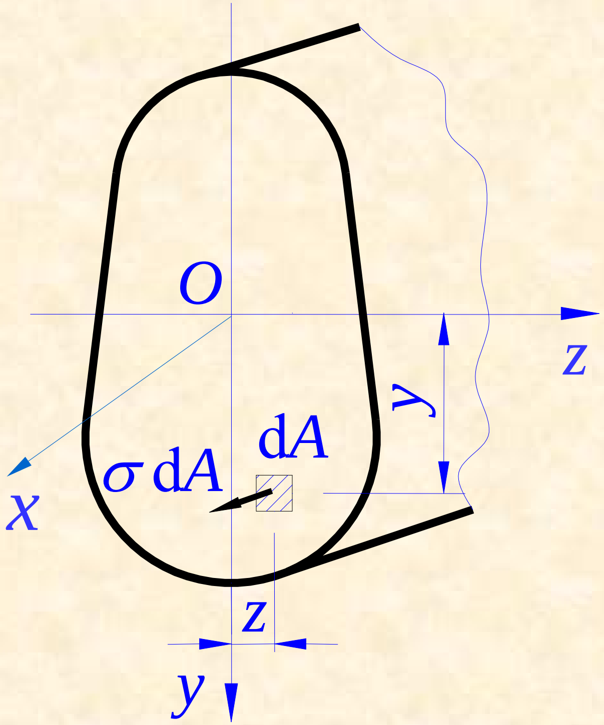
得 $S_z = 0$　即中性轴 z是形心轴。

$$M_y = \int_A z\sigma \,\mathrm{d}A = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{E}{\rho}\int_A yz \,\mathrm{d}A = \frac{EI_{yz}}{\rho} = 0 \Rightarrow I_{yz} = 0$$

对称弯曲时此条件将自动满足。



$$\left.\begin{aligned} M_z &= \int_A y\sigma \, \mathrm{d}A = M \\ \sigma &= E\varepsilon = E\frac{y}{\rho} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E}{\rho}\int_A y^2 \, \mathrm{d}A = \frac{EI_z}{\rho} = M$$

得 $$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

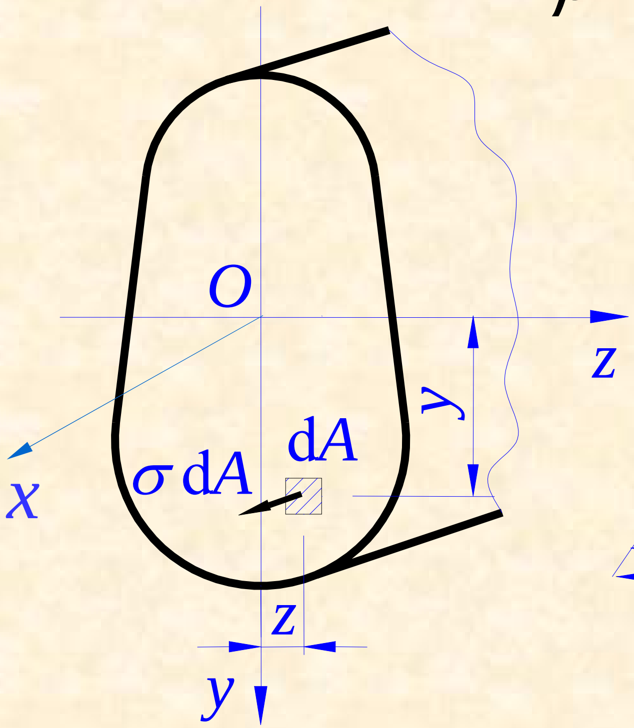
这是纯弯梁变形时中性层曲率的表达式。EI_z称为梁的弯曲刚度。

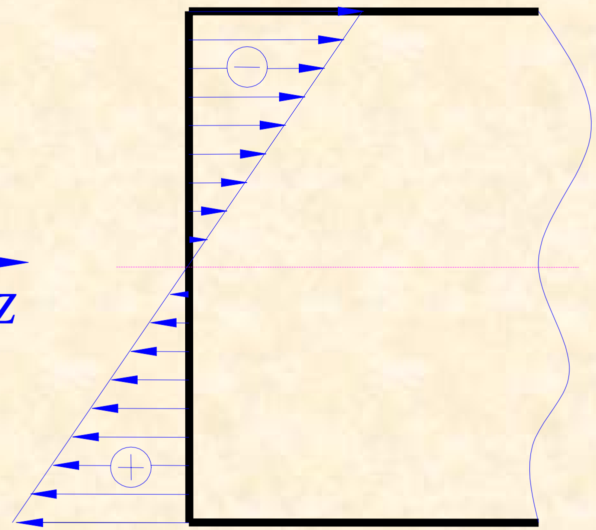
思考：

发生纯弯曲变形的等直梁其轴线将弯成什么曲线？

弯曲正应力计算公式

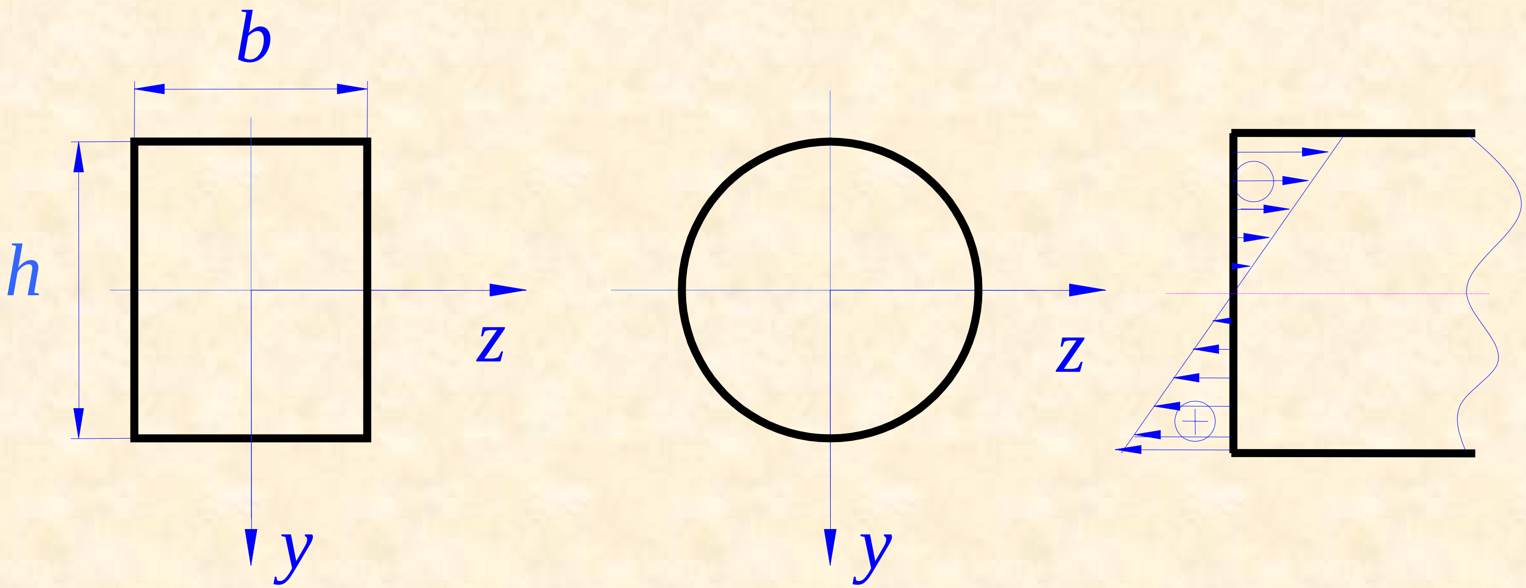
$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\rho}&=\frac{M}{EI_z}\\ \sigma=E\varepsilon&=E\frac{y}{\rho}\end{aligned}\right\}\quad \sigma=\frac{My}{I_z}$$





贵州大学土建学院

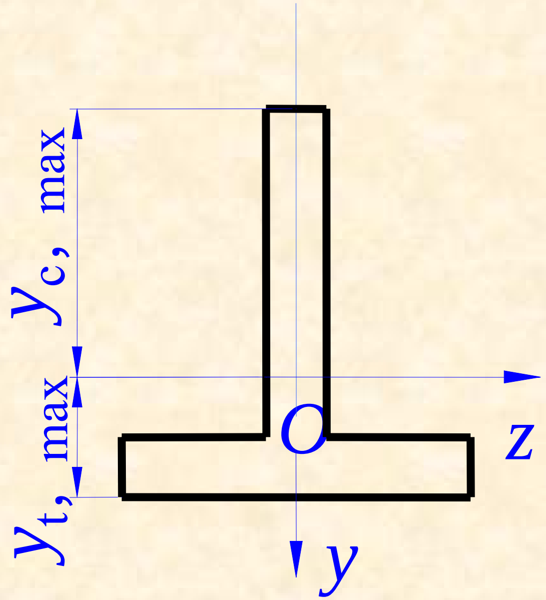
中性轴 z 为横截面的对称轴时

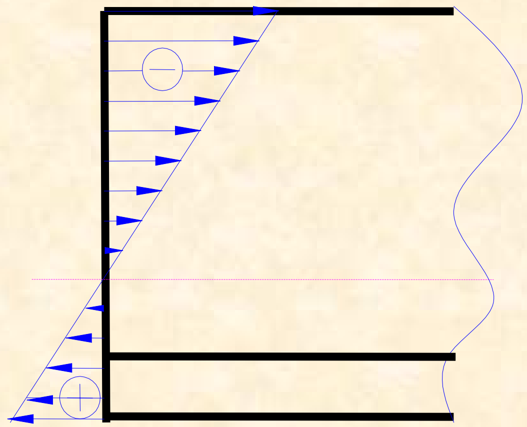


$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} = \frac{M}{\left(\dfrac{I_z}{y_{\max}}\right)} = \frac{M}{W_z}$$

称为弯曲截面系数

中性轴 z 不是横截面的对称轴时

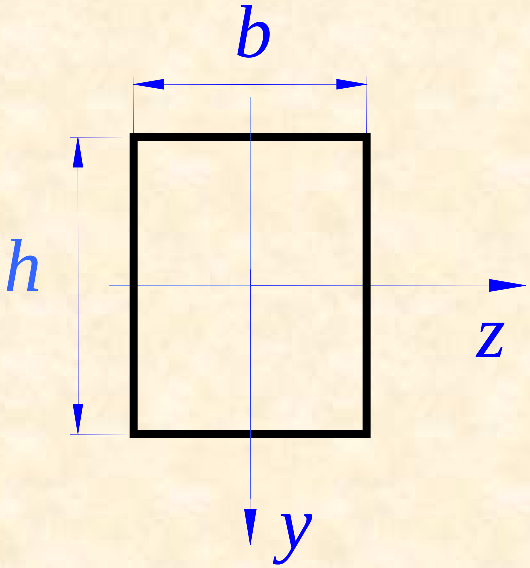




$$\sigma_{t,max} = \frac{My_{t,max}}{I_z}$$

$$\sigma_{c,max} = \frac{My_{c,max}}{I_z}$$

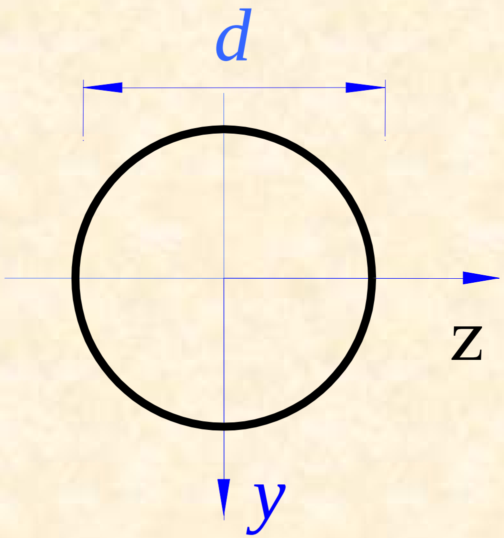
简单截面的弯曲截面系数



(1) 矩形截面

$$I_z = \frac{bh^3}{12} \qquad W_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12} \qquad W_y = \frac{I_y}{b/2} = \frac{b^2h}{6}$$

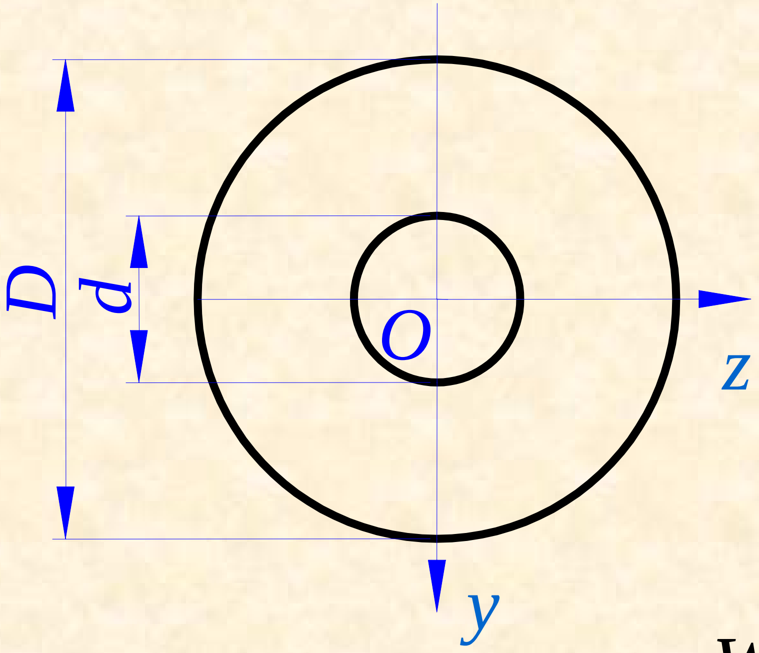


(2) 圆形截面

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$W_z = W_y = \frac{I_z}{d/2} = \frac{I_y}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$$

(3) 空心圆截面



$$I_z = I_y = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)$$

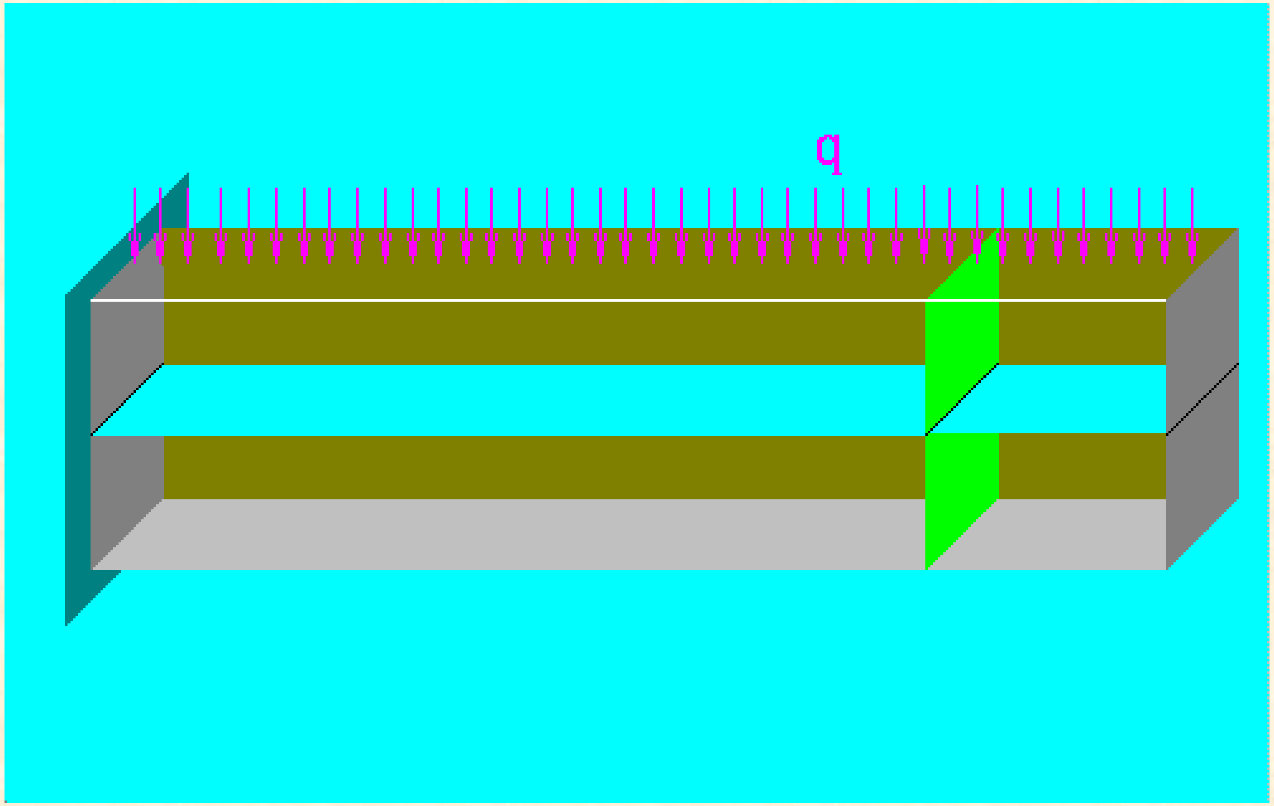
$$= \frac{\pi D^4}{64}\left(1-\alpha^4\right)$$

式中 $\alpha = d/D$

$$W_z = \frac{I_z}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32}\left(1-\alpha^4\right) = W_y$$

(4) 型钢截面：参见型钢表

Ⅱ .纯弯曲理论的推广



横力弯曲时：

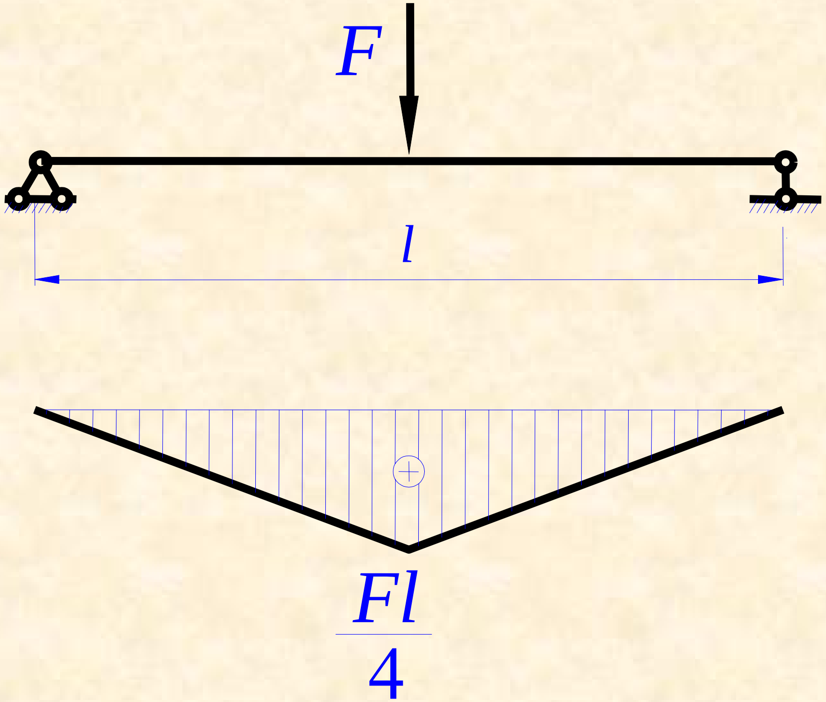
1、由于切应力的存在梁的横截面发生翘曲；

2、横向力还使各纵向线之间发生挤压。

平面假设和纵向线之间无挤压的假设实际上都不再成立。

弹性力学的分析结果：

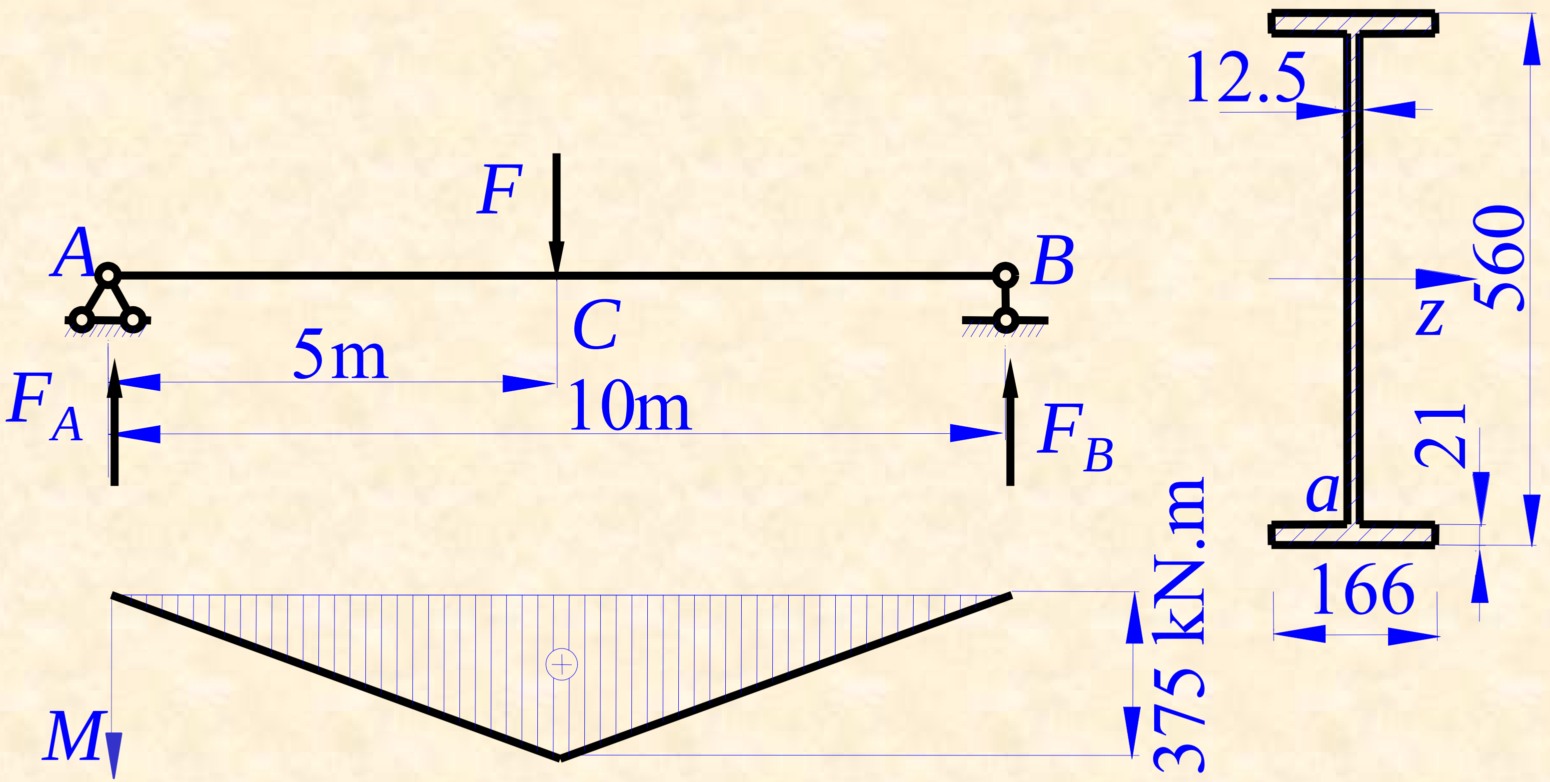
对于细长梁（$l/h > 5$），纯弯曲时的正应力计算公式用于横力弯曲情况，其结果仍足够精确。



$$\sigma = \frac{M(x)y}{I_z}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W_z}$$

例4-14　图示简支梁由56a号工字钢制成，已知F=150kN。试求危险截面上的最大正应力σ_{max}和同一横截面上翼缘与腹板交界处a点处的正应力σ_a。



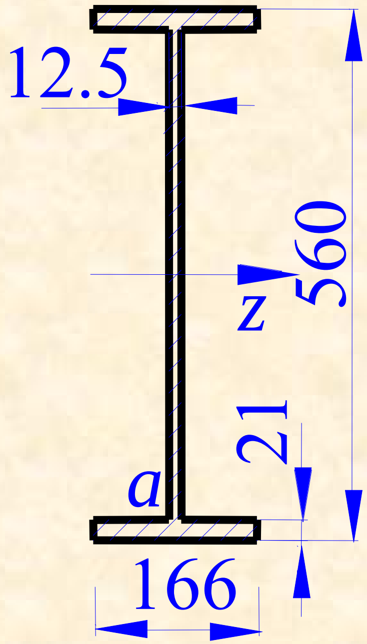
解：1、作弯矩图如上，　$M_{max}=\frac{Fl}{4}=375\ \text{kN}\cdot\text{m}$

2、查型钢表得

56号工字钢 $I_z = 65586\ \text{cm}^4$ $W_z = 2342\ \text{cm}^3$

3、求正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{375\times10^6\ \text{N}\cdot\text{mm}}{2342\times10^3\ \text{mm}^3} = 160\ \text{MPa}$$



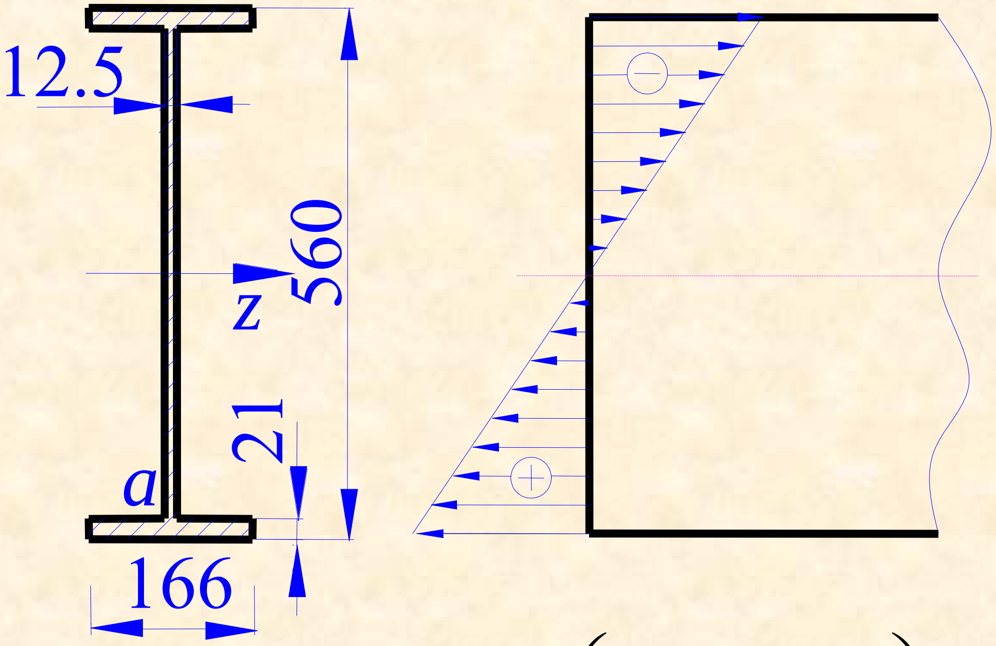
$$\sigma_a = \frac{M_{\max}y_a}{I_z}$$

$$= \frac{\left(375\times10^6\ \text{N}\cdot\text{mm}\right)\left(\frac{560}{2}-21\right)\text{mm}}{65586\times10^4\ \text{mm}^4}$$

$$= 148\ \text{MPa}$$

贵州大学土建学院

或根据正应力沿梁高的线性分布关系的



$$\sigma_{\max} = 160\text{MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{y_a}{y_{\max}}\sigma_{\max} = \frac{\left(\frac{560}{2} - 21\right)}{\left(\frac{560}{2}\right)} \times 160\ \text{MPa} = 148\ \text{MPa}$$

III　梁的正应力强度条件

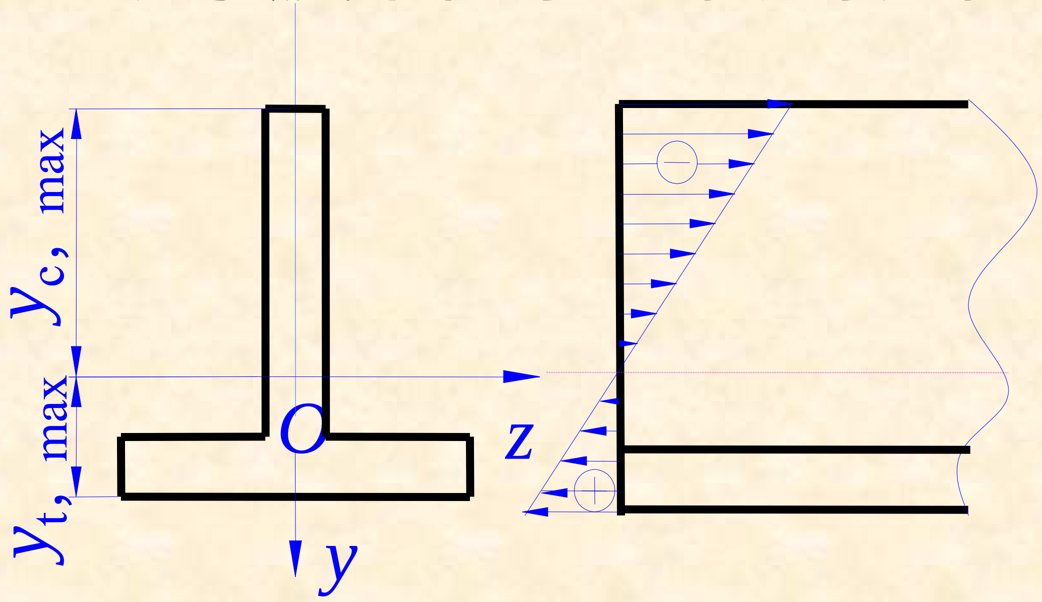
由于σ_{max}处$\tau=0$或极小，并且不计由横向力引起的挤压应力，因此梁的正应力强度条件可按单向应力状态来建立：

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \Longrightarrow$$ 材料的许用弯曲正应力

中性轴为横截面对称轴的等直梁

$$\frac{M_{max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

拉、压强度不相等的铸铁等脆性材料制成的梁



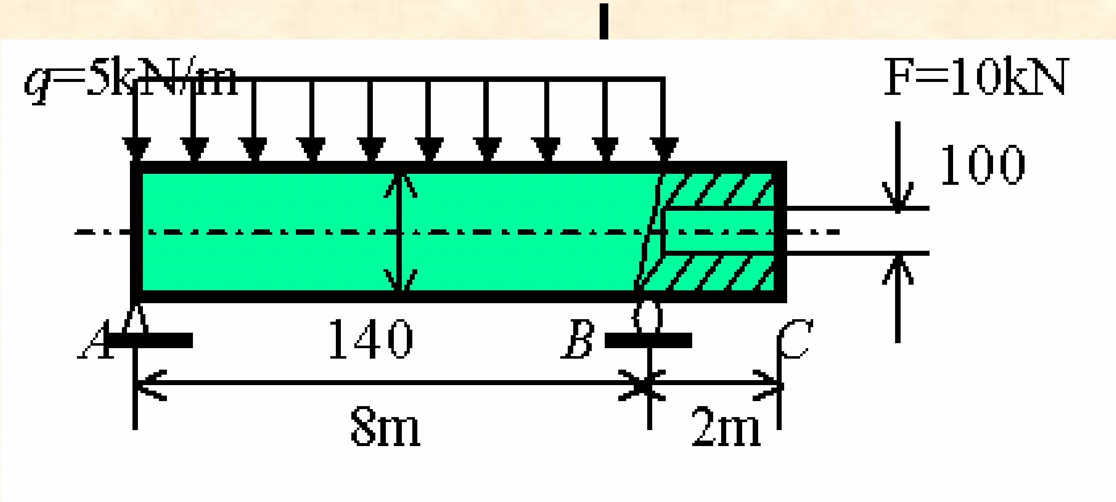
$$\sigma_{t,max} \le [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c,max} \le [\sigma_c]$$

为充分发挥材料的强度，最合理的设计为

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{t,max} = \dfrac{M_{max} y_{t,max}}{I_z} \le [\sigma_t] \\ \sigma_{c,max} = \dfrac{M_{max} y_{c,max}}{I_z} \le [\sigma_c] \end{array}\right\} \quad \frac{y_{t,max}}{y_{c,max}} = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}$$

例4-15 图示外伸梁，材料的许用应力 $[\sigma]=120\text{Mpa}$。试校核梁正应力强度。



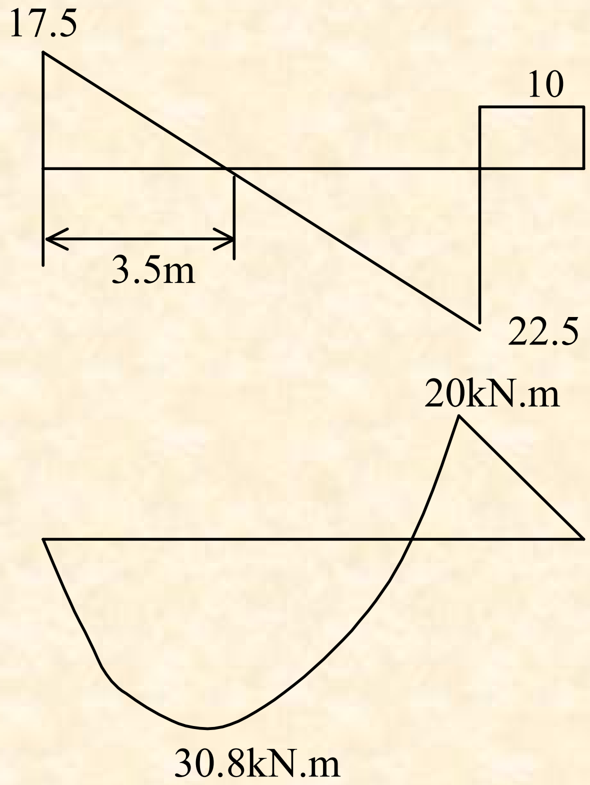
解：（1）求支反力

$F_A=17.5\text{kN}$

$F_B=32.5\text{kN}$

（2）作弯矩图： 确定危险截面

（3）强度校核



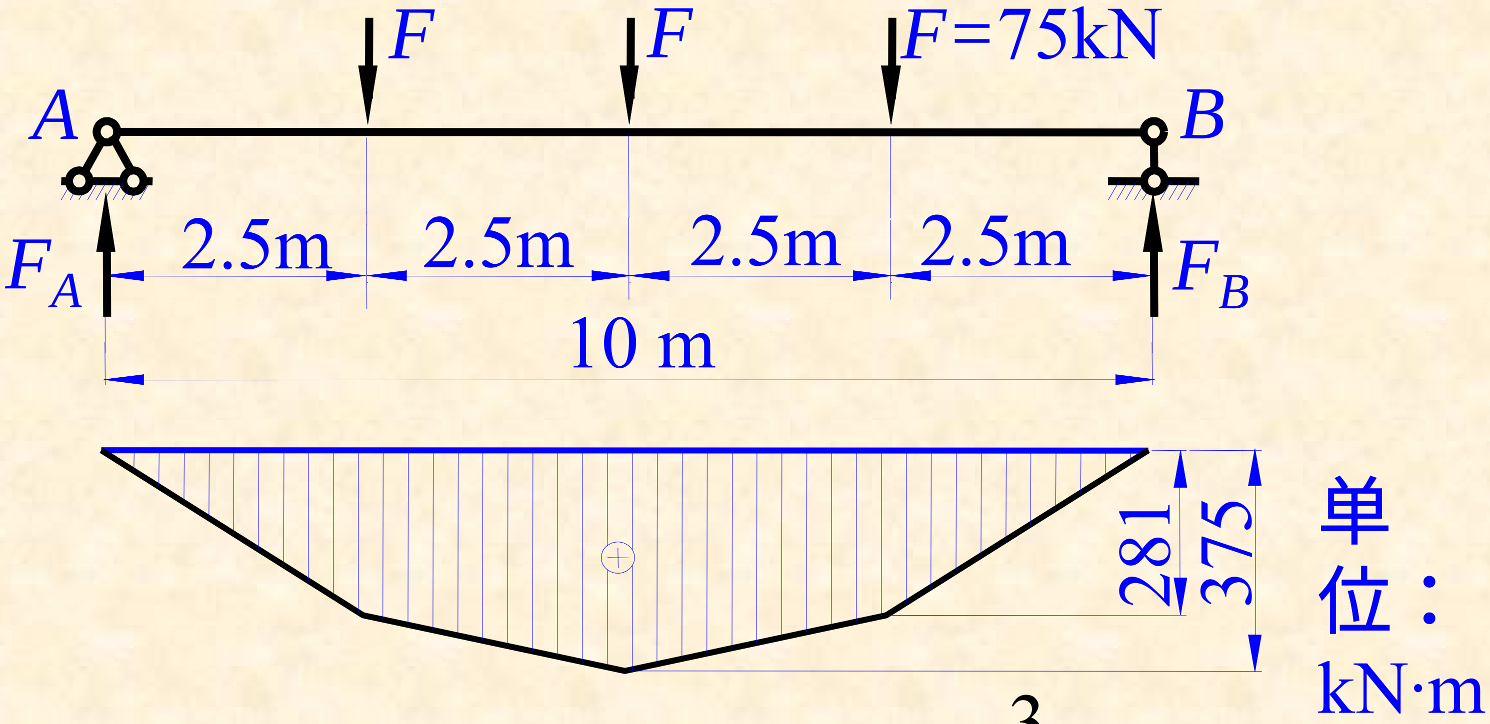
$$\sigma_{E\max} = \frac{M_E}{W_{Ez}}$$

$$= \frac{32\times 30.8\times 10^6}{\pi\times 140^3} = 114MPa < [\sigma]$$

$$\sigma_{B\max} = \frac{M_B}{W_{Bz}}$$

$$= \frac{32\times 20\times 10^6}{\pi\times 140^3\times[1-\left(\frac{100}{140}\right)^4]} = 100MPa < [\sigma]$$

例4-16 图示为由工字钢制成的楼板主梁的计算简图。钢的许用弯曲正应力$[\sigma]$=152 MPa 。试选择工字钢的号码。



解：1、支反力为 $F_A = F_B = \frac{3}{2}F = 102.5\ \text{kN}$

作弯矩图如上。

$$M_{\max} = 375\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

2、根据强度条件确定截面尺寸

$$\frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

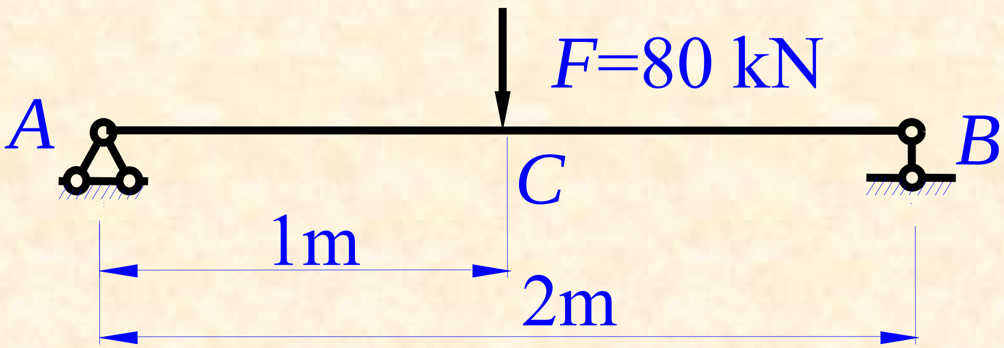
$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{375 \times 10^6\ \text{N} \cdot \text{mm}}{152\ \text{MPa}} = 2460 \times 10^3\ \text{mm}^3$$

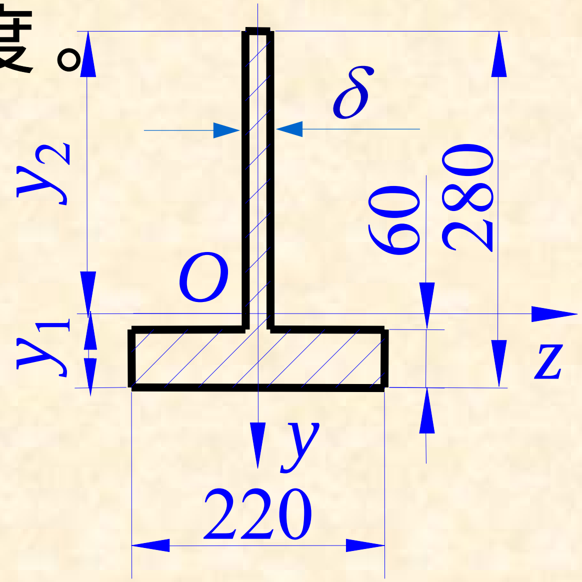
查型钢表得56b号工字钢的W_z比较接近要求值

$$W_z = 2447\ \text{cm}^3 = 2447 \times 10^3\ \text{mm}^3$$

与要求的W_z相差不到1%，可以选用。

例4-17 跨长 l= 2m 的铸铁梁受力如图，已知铸铁的许用拉应力$[\sigma_t]$=30 MPa，许用压应力$[\sigma_c]$ =90 MPa。试根据截面最为合理的要求，确定T字形梁横截面的尺寸δ，并校核梁的强度 。





解：　根据截面最为合理的要求

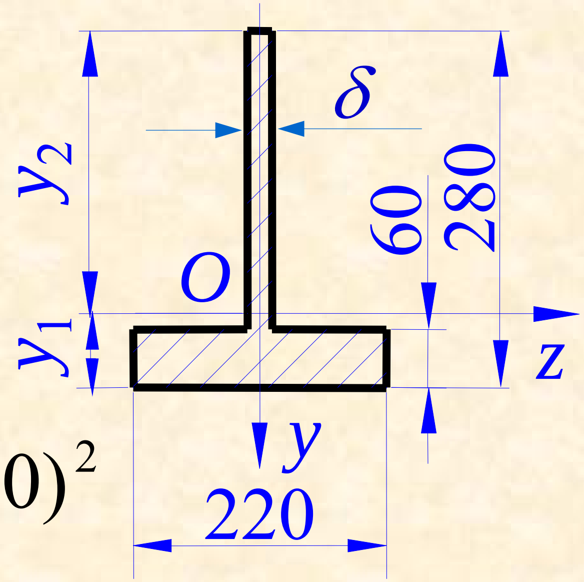
$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3} \Longrightarrow \bar{y}=y_1=70\ \text{mm}$$

即

$$\bar{y} = \frac{220\times 60\times 30+(280-60)\times\delta\times(60+110)}{(280-60)\delta+220\times 60} = 70$$

得

$$\delta = 24\ \text{mm}$$



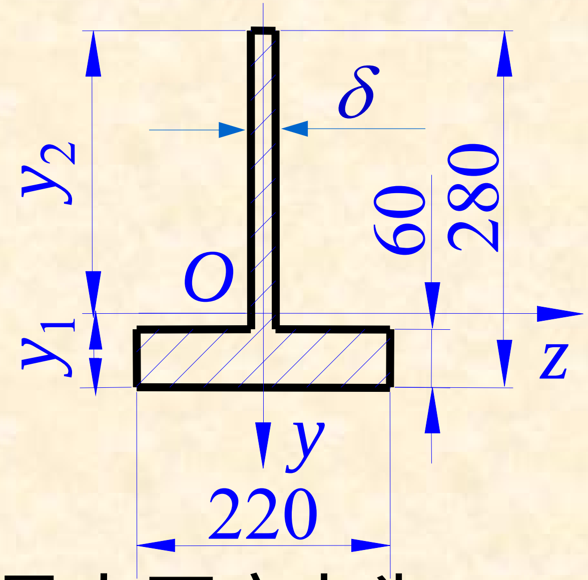
截面对中性轴的惯性矩为

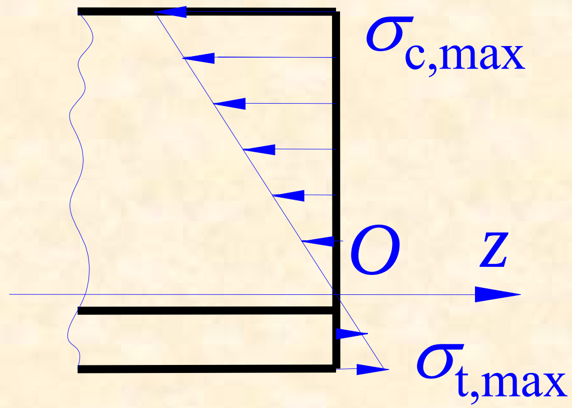
$$I_z = \frac{24\times 220^3}{12} + 24\times 220\times(210-110)^2$$

$$+\frac{220\times 60^3}{12} + 60\times 220\times(280-210-30)^2$$

$$= 99.2\times 10^6\ \text{mm}^4$$

梁上的最大弯矩 $M_{\max}=\dfrac{Fl}{4}=\dfrac{80\times 2}{4}=40\ \mathrm{kN\cdot m}$



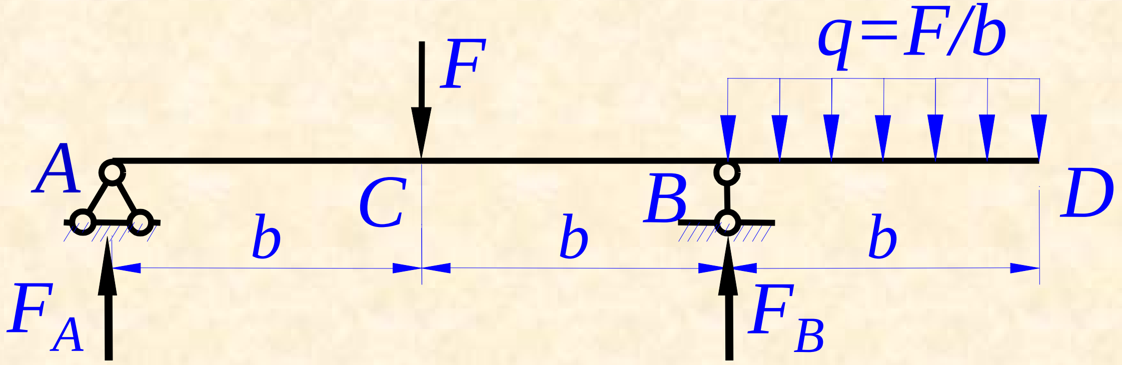


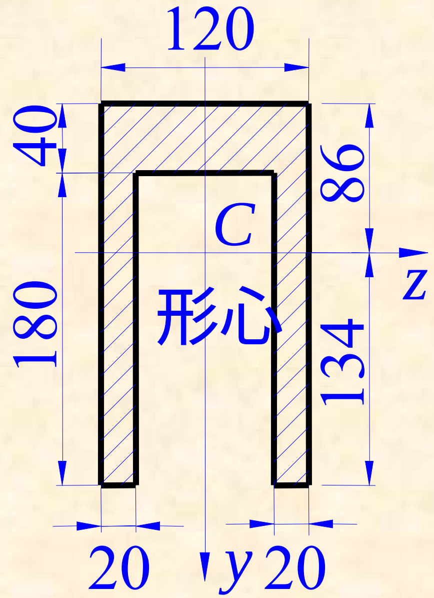
于是最大压应力为

$$\sigma_{\mathrm{c,\,max}}=\frac{M_{\max}y_2}{I_z}=\frac{40\times10^6\ \mathrm{N\cdot mm}\times 210\ \mathrm{mm}}{99.2\times10^6\ \mathrm{mm}^4}$$

$=84.7\ \mathrm{MPa}<[\sigma_{\mathrm{c}}]$ 即梁满足强度要求。

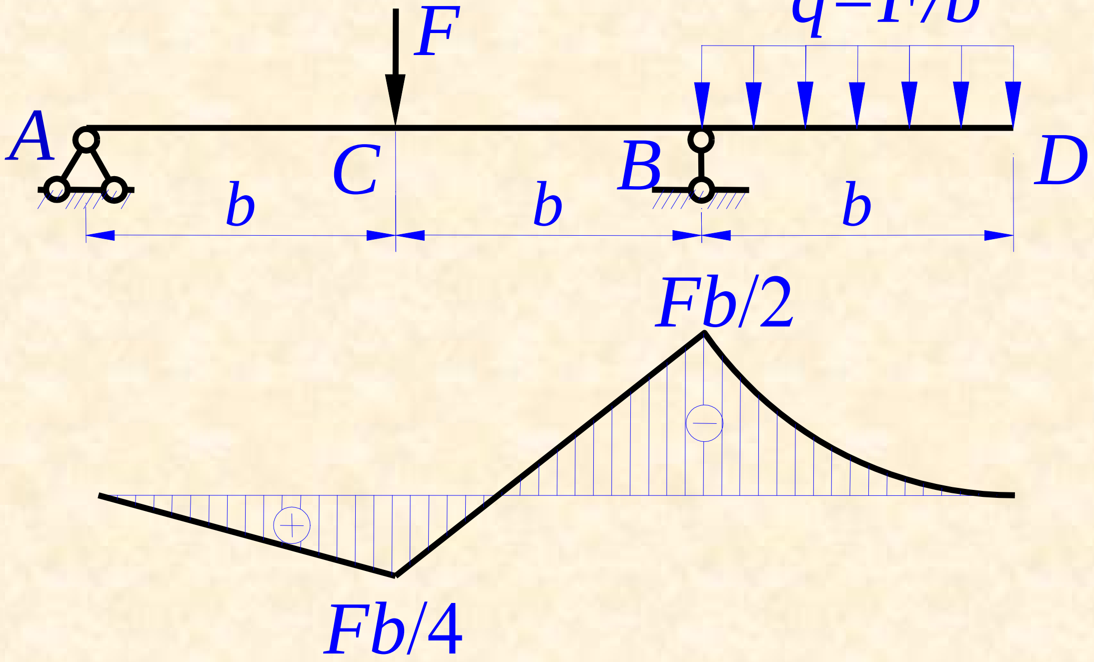
例**4-18** 图示槽形截面铸铁梁，已知：$b = 2\text{m}$，截面对中性轴的惯性矩 $I_z=5493\times10^4\text{mm}^4$， 铸铁的许用拉应力$[\sigma_t]=30$ MPa，许用压应力$[\sigma_c]=90$ MPa。试求梁的许可荷载$[F]$。

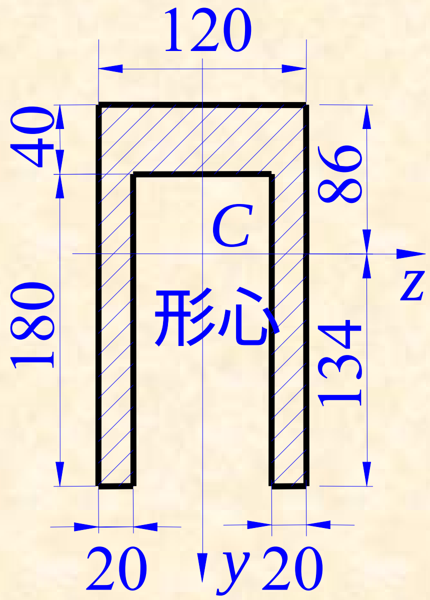




解：1、梁的支反力为 $F_A=\dfrac{F}{4}$ $F_B=\dfrac{7}{4}F$

据此作出梁的弯矩图如下

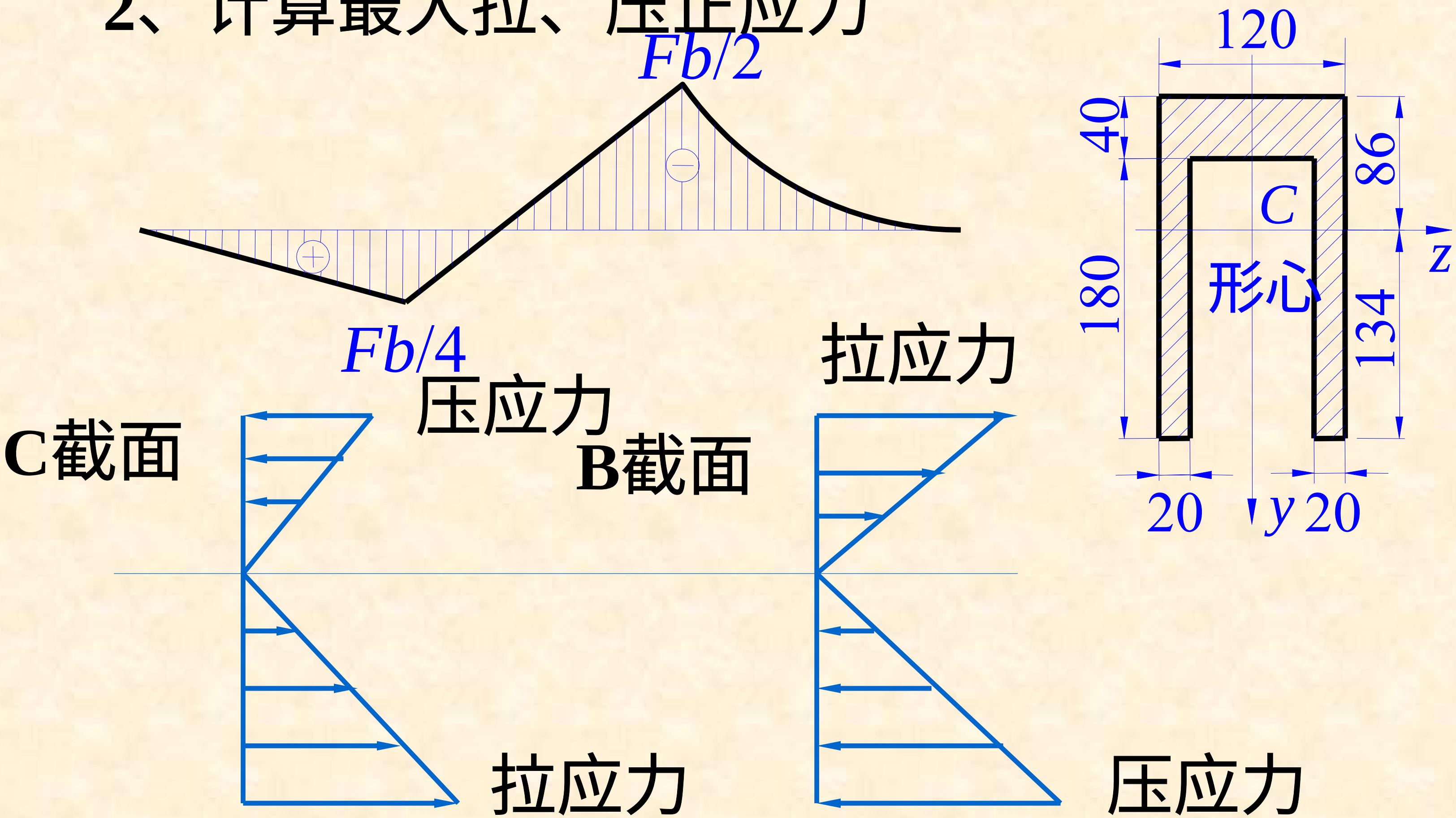




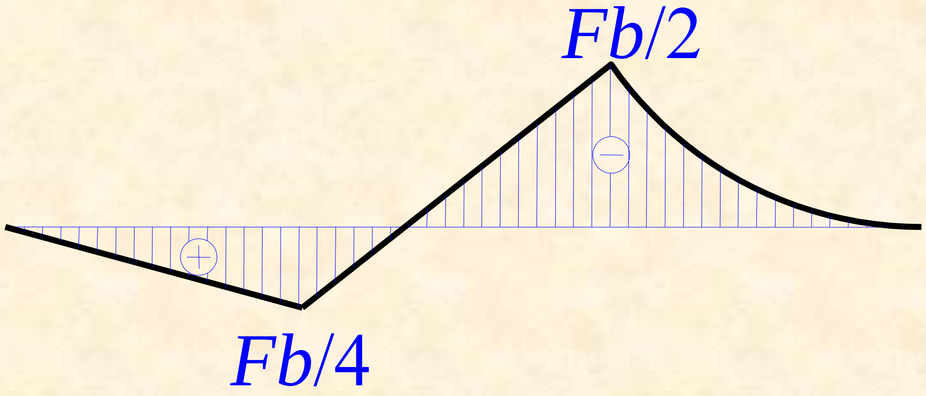
$$M_{\max}^{+}=\frac{Fb}{4}$$ 发生在截面*C*

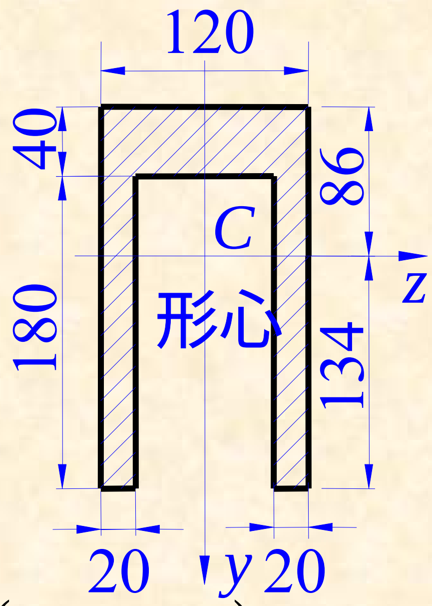
$$M_{\max}^{-}=\frac{Fb}{2}$$ 发生在截面*B*

2、计算最大拉、压正应力



可见：压应力强度条件由*B*截面控制，拉应力强度条件则*B*、*C*截面都要考虑。





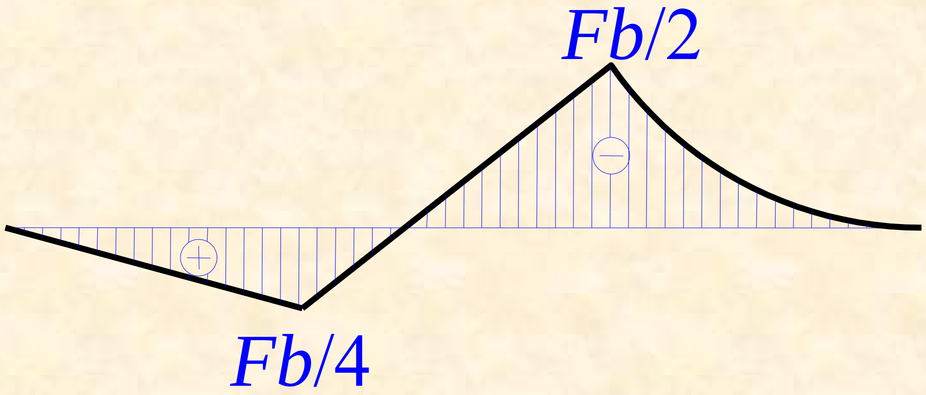
考虑截面B：

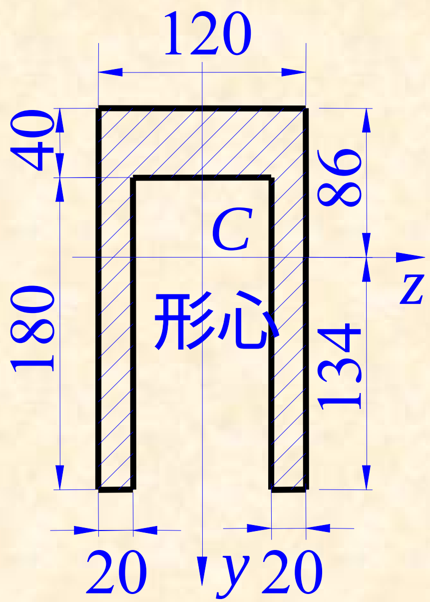
$$\sigma_{t,\max}=\frac{M_B y_2}{I_z}=\frac{\left(F/2\times 2\times 10^3\ \text{mm}\right)\left(86\ \text{mm}\right)}{5493\times\times 10^3\ \text{mm}^4}\le 30\ \text{MPa}$$

$$F\le 19.2\ \text{kN}$$

$$\sigma_{c,\max}=\frac{M_B y_1}{I_z}=\frac{\left(F/4\times 2\times 10^3\ \text{mm}\right)\left(134\ \text{mm}\right)}{5493\times 10^4\ \text{mm}^4}\le 90\ \text{MPa}$$

$$F\le 73.8\ \text{kN}$$





考虑截面C：

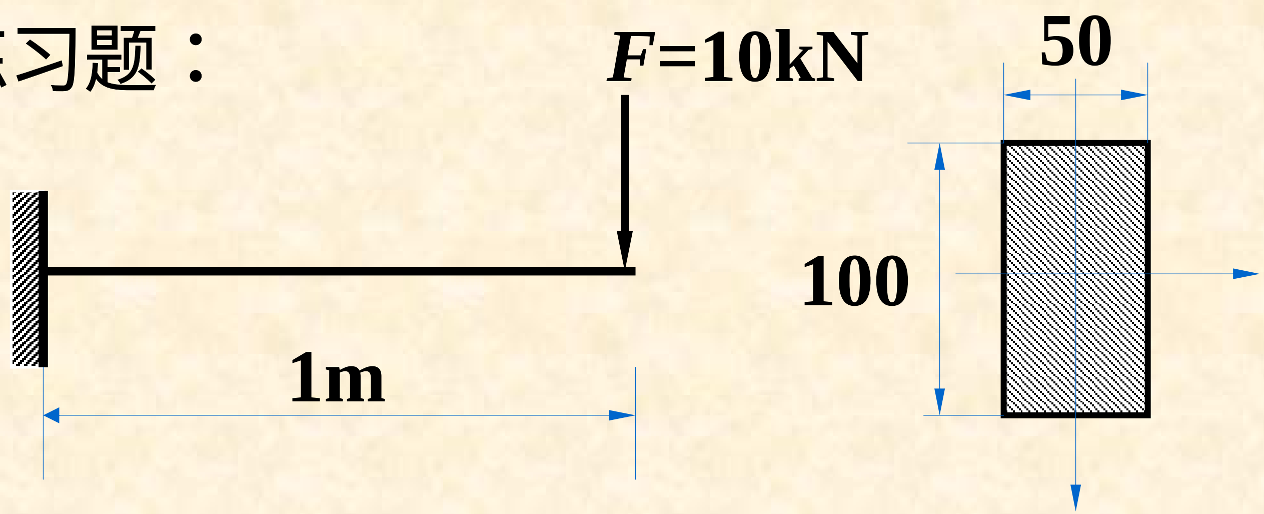
$$\sigma_{\mathrm{t,max}} = \frac{M_C y_1}{I_z} = \frac{(F/4 \times 2 \times 10^3\ \mathrm{mm})(134\ \mathrm{mm})}{5493 \times 10^4\ \mathrm{mm}^4} \leq 30\ \mathrm{MPa}$$

$$F \leq 24.6\ \mathrm{kN}$$

因此梁的强度由截面B上的最大拉应力控制

$$[F] = 19.2\ \mathrm{kN}$$

练习题：



试计算最大正应力。

作业：4-25，4-31，4-36，4-38