第四章 不定积分
第五章 定积分

第二类换元法

主要内容

一、不定积分的第二类换元法
二、定积分的第二类换元法

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

第二节

不定积分的第二类换元法

定理 设 $x=\varphi(t)$ 是单调可导函数，且 $\varphi'(t)\neq 0$，

$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

其中 $t=\varphi^{-1}(x)$ 是 $x=\varphi(t)$ 的反函数.

证 略

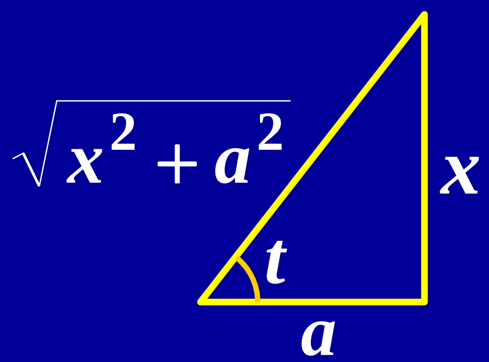
例1 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad (a>0)$.

解 令 $x = a\tan t$,

则 $\mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$,

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\tan^2 t + a^2} = a\sec t,$$

$$原式 = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t$$



$$= \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C_1$$

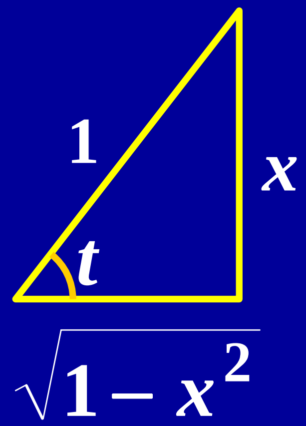
$$= \ln\left[\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right] + C_1$$

$$= \ln\left[x + \sqrt{x^2+a^2}\right] + C \quad (C = C_1 - \ln a,\ 公式)$$

例2 求 $\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \mathrm{d}x.$

解 令 $x=\sin t$, 则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$$



$$\text{原式}=\int \frac{\sin^4 t}{\cos^3 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=\int \frac{(1-\cos^2 t)^2}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\int \frac{1-2\cos^2 t+\cos^4 t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\tan t-2t+\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin 2t=2\sin t\cos t\\&=2\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{1}\end{aligned}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

例3 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}\ (a>0)$.

解 令 $x=a\sec t$, 则 $\mathrm{d}x=a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$,

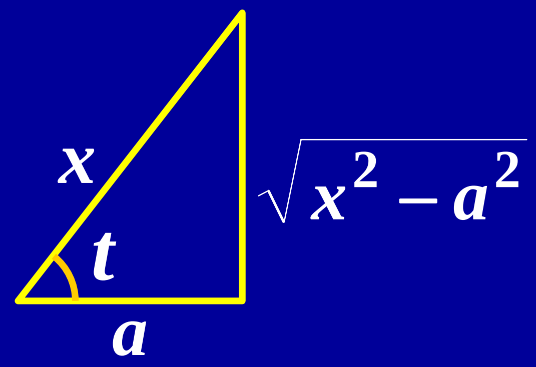
$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}=a\tan t,$$

$$原式=\int\frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t=\int\sec t\,\mathrm{d}t$$

$$=\ln\left|\sec t+\tan t\right|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.\ (C=C_1-\ln a,\ 公式)$$



例4 求$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x \ (a, x>0).$

解 令$x=\frac{1}{t}$, 则$\mathrm{d}x=\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=\int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{a^2+\frac{1}{t^2}}}\cdot\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{a^2t^2+1}}\mathrm{d}(at)$$

$$=-\frac{1}{a}\ln(at+\sqrt{a^2t^2+1})+C$$

$$=-\frac{1}{a}\ln(\frac{a}{x}+\sqrt{\frac{a^2}{x^2}+1})+C.$$

例5 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解　令 $u=\sqrt[3]{x+2}$, 则 $x=u^3-2$, $\mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$,

$$\text{原式}=\int \frac{3u^2}{1+u}\mathrm{d}u=3\int \frac{(u^2-1)+1}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$=3\int\left(u-1+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$=3\left[\tfrac{1}{2}u^2-u+\ln|1+u|\right]+C$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right|+C.$$

注: 第二类换元法常见类型:

(1) $\int f(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x$, 令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$

(2) $\int f(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,\mathrm{d}x$, 令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

(3) $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,\mathrm{d}x$, 令 $x = a\sin t$

(4) $\int f(x, \sqrt{a^2 + x^2})\,\mathrm{d}x$, 令 $x = a\tan t$

(5) $\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,\mathrm{d}x$, 令 $x = a\sec t$

(6) $\int f(a^x)\,\mathrm{d}x$, 令 $t = a^x$

(7) 分母中因子次数较高时, 可试用倒代换 $x = \frac{1}{t}$

例6 求 $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}\mathrm{d}x.$

解 原式 $= \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}(3x^2+4)}{\sqrt{3x^2+4}} = \frac{1}{3}\sqrt{3x^2+4}+C.$

例7 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+9}}.$

解 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2x)}{\sqrt{(2x)^2+3^2}}$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+9}\right|+C.$$

例8 求$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

解 原式$\displaystyle=\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}}=\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$

例9 求$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

解 原式$\displaystyle=\int\frac{e^{-x}\,\mathrm{d}x}{e^{-x}\sqrt{1-e^{2x}}}=\int\frac{-\mathrm{d}e^{-x}}{\sqrt{e^{-2x}-1}}$

$$=-\ln\left|e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}-1}\right|+C$$

内容小结

1. 第二类换元法

定理 设 $x=\varphi(t)$ 是单调可导函数，且 $\varphi'(t)\neq 0$，

$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

其中 $t=\varphi^{-1}(x)$ 是 $x=\varphi(t)$ 的反函数.

2. 常用基本积分公式的补充

(21) $$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

3. 第二类换元法常见类型:

(1) $\int f(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x$, 令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$

(2) $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$, 令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

(3) $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,\mathrm{d}x$, 令 $x = a\sin t$

(4) $\int f(x, \sqrt{a^2 + x^2})\,\mathrm{d}x$, 令 $x = a\tan t$

(5) $\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,\mathrm{d}x$, 令 $x = a\sec t$

(6) $\int f(a^x)\,\mathrm{d}x$, 令 $t = a^x$

(7) 分母中因子次数较高时, 可试用倒代换 $x = \frac{1}{t}$

第三节 定积分的换元法

定理 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, 单值函数 $x=\varphi(t)$ 满足:

1) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数, $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$;

2) 在 $[\alpha,\beta]$ 上 $a\le\varphi(t)\le b$,

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$. (换元要换限)

证 略

例1 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0)$.

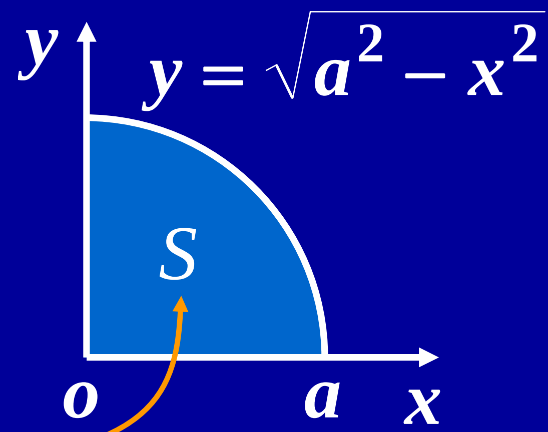
解 令 $x = a\sin t$，则 $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$，且

当 $x = 0$ 时，$t = 0$； $x = a$ 时，$t = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\therefore \quad 原式 = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$



例2 计算$\int_{1/2}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$

解 令$\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$,

$$x:\frac{1}{2}\to 1;\quad t:\frac{1}{\sqrt{2}}\to 1;$$

$$原式=2\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\arcsin t\,\mathrm{d}\arcsin t$$

$$=\arcsin^2 t\Big|_{1/\sqrt{2}}^{1}=\frac{3\pi^2}{16}.$$

例3 设 $f(x)\in C[-a,a]$,

对称积分
偶倍奇零

(1) 若 $f(-x)=f(x)$, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) 若 $f(-x)=-f(x)$, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

证 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x} + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

令 $x=-t$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} [f(-x)+f(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{当 } f(-x)=f(x) \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } f(-x)=-f(x) \text{ 时}. \end{cases}$$

例4 填空

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 5x \cos 7x \, \mathrm{d}x = \underline{\quad 0 \quad}$$

例5 填空

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = \underline{\sin^{100} x}$$

分析 令 $u = x - t$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$,

$t: 0 \to x$, $u: x \to 0$,

$$\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 \sin^{100} u \,\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^x \sin^{100} u \,\mathrm{d}u,$$ 求导即得.

例6 证明 $\int_x^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_1^{1/x} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

证 $\because$ 左端 $= \int_x^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$

令 $t = \frac{1}{u}$, $\mathrm{d}t = -\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$, $t: x \to 1$; $u: \frac{1}{x} \to 1$;

$\therefore$ 左端 $= \int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+(1/u)^2}\cdot(-\frac{1}{u^2})\mathrm{d}u$

$= \int_1^{1/x} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \int_1^{1/x} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x =$ 右端.

例7 证明 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x$ 是以 π 为周期的函数.

证 $\because\ f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u,$

$\therefore\ f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u,$

令 $u=t+\pi$, $\mathrm{d}u=\mathrm{d}t,$

$u:\ x+\pi\to x+\pi+\frac{\pi}{2}$, $t:\ x\to x+\frac{\pi}{2}$,

$$\therefore\ f(x+\pi)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(t+\pi)|\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x$$

$$=f(x),$$

$\therefore\ f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

内容小结

定理 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, 单值函数 $x=\varphi(t)$ 满足:

1) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数, $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$;

2) 在 $[\alpha,\beta]$ 上 $a\le\varphi(t)\le b$,

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$

换元要换限
不换元不换限

注 设 $f(x)\in C[-a,a]$,

(1) 若 $f(-x)=f(x)$, 则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;

(2) 若 $f(-x)=-f(x)$, 则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0.$

对称积分, 偶倍奇零

作 业

习题4-2　2(34,35,36,37,38,40,41,42*)

习题5-3　1(3,6,10,11,13,16,17,19,20,22,24);
2; 4; 6*

下次课内容

第四章第三节　　分部积分法

第五章第三节(二)　定积分的分部积分法

部分习题解答

T1. 求下列函数的极值：$y = x + \tan x$.

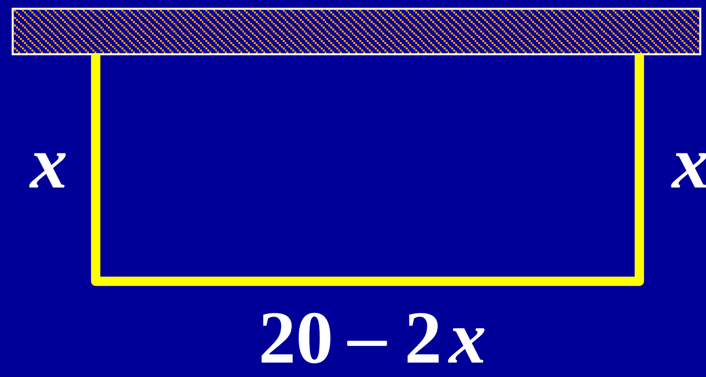
解 因为在函数 $y = x + \tan x$ 的定义域

$$D = \left\{ x \,\middle|\, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, x \in \mathrm{R} \right\}$$

内恒有 $y' = 1 + \sec^2 x > 0$,

所以该函数没有极值.

T2. 某个车间靠墙壁要盖一间长方形的小屋，现有存砖只够砌 20m 长的墙壁，问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?



解 如图. 小屋的面积

$$y = x(20-2x),\ 0 < x < 10.$$

$$y' = (20-2x) + x(-2) = 20-4x,$$

令 $y' = 20-4x = 0 \Rightarrow x = 5$,

由右表可知，$x = 5$ 时函数取得最大值，即当 $x = 5$ 时能使这间小屋的面积最大.

x	$(0,5)$	5	$(5,10)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	连续	$\searrow$

T3. 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=k$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$.

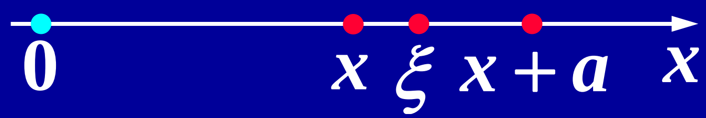
解 (1) 当 $a=0$ 时，显然有 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=0$.

(2) 当 $a\neq 0$ 时，不妨设 $a>0$ ($a<0$ 时可类似计算).

根据题意，当 $|x|$ 充分大时，$f'(x)$ 存在，所以 $f(x)$ 在 $[x, x+a]$ 满足拉格朗日中值定理条件，从而至少存在一点 $\xi\in(x, x+a)$，使 $f(x+a)-f(x)=f'(\xi)a$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=\lim\limits_{x\to\infty} f'(\xi)a$

$$=\lim_{\xi\to\infty} f'(\xi)a=ka.$$



T4. 设 $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，证明多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

证 令 $F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，$x\in[0,1]$.

显然，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，

$$F'(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=f(x),\ x\in(0,1)$$

且 $F(0)=F(1)=0$，由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点. 证毕

T5. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$. $\boxed{1^\infty 型}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\frac{2}{\pi}\arctan x}$,

$$\because\ \lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{2}{\pi}\arctan x \ (\boxed{\infty\cdot 0\ 型}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arctan x}{1/x}\ \boxed{\frac{0}{0}\ 型}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\arctan x}\frac{x^2}{1+x^2} = -\frac{2}{\pi},$$

$\therefore$ 原式 $=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

T6. 求极限 $\boxed{1^{\infty} \text{ 型}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{a_1^{1/x}+a_2^{1/x}+\cdots+a_n^{1/x}}{n}\right]^{nx} \quad (a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n>0).$$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty} e^{nx[\ln(a_1^{1/x}+a_2^{1/x}+\cdots+a_n^{1/x})-\ln n]}$

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{n[\ln(a_1^{1/x}+a_2^{1/x}+\cdots+a_n^{1/x})-\ln n]}{1/x} \quad \boxed{\frac{0}{0}\text{ 型}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{n\cdot\dfrac{(a_1^{1/x}\ln a_1+a_2^{1/x}\ln a_2+\cdots+a_n^{1/x}\ln a_n)\cdot(-1/x^2)}{a_1^{1/x}+a_2^{1/x}+\cdots+a_n^{1/x}}}{-1/x^2}$$

$$=\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n=\ln(a_1a_2\cdots a_n),$$

$$\therefore \text{原式}=e^{\ln(a_1a_2\cdots a_n)}=a_1a_2\cdots a_n.$$