第四章

第二节 第一类换元法（续）

第五章

第一节 定积分的概念

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

复 习

一、原函数的概念

定义1 若在区间 I 上定义的两个函数 $F(x)$ 及 $f(x)$, 满足 $F'(x)=f(x)$, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

二、不定积分的概念

定义 2 $f(x)$在区间 I 上的原函数全体称为 $f(x)$在I上的不定积分, 记作$\int f(x)\mathrm{d}x$.

三、不定积分的性质

1. $\int k\,f(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k \neq 0)$

2. $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}\,x$

推论 $$\int \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)\mathrm{d}x$$

$(k_1, k_2, \cdots, k_n$不全为 $0)$

四、 基本积分表

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ （k 为常数）

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C$ (常数 $\mu \neq -1$)

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$ 或 $-\mathrm{arccot}\, x + C$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 或 $-\arccos x + C$

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

$$(8)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$(9)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$(10)\quad \int \sec x \tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$(11)\quad \int \csc x \cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$$(12)\quad \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$$

$$(13)\quad \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

常用基本积分公式的补充:

(14) $\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

(15) $\int \cot x \, \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

(16) $\int \sec x \, \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(17) $\int \csc x \, \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$

(18) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

(19) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(20) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C$

五、第一类换元法(凑微分法)

定理1 设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$，且 $u=\varphi(x)$ 可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\,\mathrm{d}\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$$

常用的几种凑微分形式:

(1) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b)$

(2) $\int f(x^n)x^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int f(x^n)\,\mathrm{d}x^n$

(3) $\int f(x^n)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int f(x^n)\frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x^n$

(4) $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\,\mathrm{d}\sin x$

(5) $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\,\mathrm{d}\cos x$

$$(6)\ \int f(\tan x)\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\,\mathrm{d}\tan x$$

$$(7)\ \int f(e^x)e^x\,\mathrm{d}x = \int f(e^x)\,\mathrm{d}e^x$$

$$(8)\ \int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\,\mathrm{d}\ln x$$

例1 求 $\int \frac{x^3}{(x^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

解 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x^2$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}(x^2+a^2)$$

$$- \frac{a^2}{2}\int (x^2+a^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}(x^2+a^2)$$

$$= \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

例2 求 $\int \cos^4 x \, dx$.

解 $\because \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (\frac{1+\cos 2x}{2})^2$

$$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2})$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x),$$

$$\therefore \int \cos^4 x \, dx = \frac{1}{4}\int (\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}[\frac{3}{2}\int dx + \int \cos 2x \, d(2x) + \frac{1}{8}\int \cos 4x \, d(4x)]$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

例3 求 $\int \sin^2 x \cos^2 3x \, dx$.

解 $\because \sin^2 x \cos^2 3x = [\frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)]^2$

$$= \frac{1}{4}\sin^2 4x - \frac{1}{4}\cdot 2\sin 4x \sin 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

$$= \frac{1}{8}(1 - \cos 8x) - \sin^2 2x \cos 2x + \frac{1}{8}(1 - \cos 4x),$$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{64}\int \cos 8x \, d(8x)$

$$- \frac{1}{2}\int \sin^2 2x \, d(\sin 2x) - \frac{1}{32}\int \cos 4x \, d(4x)$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}\sin 8x - \frac{1}{6}\sin^3 2x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

例4 求 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

解 (自算)

$$\text{原式} = 2\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$= 2\int \arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\arcsin\sqrt{x}$$

$$= (\arcsin\sqrt{x})^2 + C.$$

例5 求 $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin x + \cos x}$.

解 (自算)

$$原式 = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{2}(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{2}(\sin x \cos(\pi/4) + \cos x \sin(\pi/4))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{d}(x+\pi/4)}{\sin(x+\pi/4)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\csc(x+\pi/4) - \cot(x+\pi/4)\right| + C.$$

小 结

(1) 熟记并灵活运用基本积分公式（20）

(2) 熟记并灵活运用换元法

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\,\mathrm{d}\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$$

(3) 记住并会迅速算出一些基本例题

(4) 多做题积累经验

练　习

例1 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)}$.

解

法1 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)} = \int \frac{(x^{10}+1)-x^{10}}{x(x^{10}+1)}\mathrm{d}x = \cdots$

法2 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)} = \frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}x^{10}}{x^{10}(x^{10}+1)} = \cdots$

法3 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^{11}(1+x^{-10})} = \frac{-1}{10}\int \frac{\mathrm{d}x^{-10}}{1+x^{-10}} = \cdots$

例2 求 $\int \frac{(2+\ln\ln x)^4}{x\ln x}\,\mathrm{d}x.$

解 (自算)

$$\int \frac{(2+\ln\ln x)^4}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{(2+\ln\ln x)^4}{\ln x}\,\mathrm{d}\ln x$$

$$=\int (2+\ln\ln x)^4\,\mathrm{d}(2+\ln\ln x)$$

$$=\frac{1}{5}(2+\ln\ln x)^5+C.$$

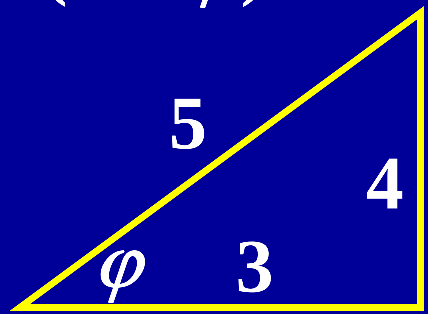
例3 求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{3\sin x + 4\cos x}$.

解 (自算)

$$\text{原式} = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{5(\sin x \cdot \frac{3}{5} + \cos x \cdot \frac{4}{5})}$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}\,x}{(\sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi)} = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}(x+\varphi)}{\sin(x+\varphi)}$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\csc(x+\varphi) - \cot(x+\varphi)\right| + C.$$



其中 $\varphi = \arctan(4/3)$.

注 此方法可推广到计算$\displaystyle\int \frac{1}{a\sin x + b\cos x}\mathrm{d}\,x$.

第一节
定积分的概念及性质

主要内容

一、定积分问题举例

二、定积分的定义

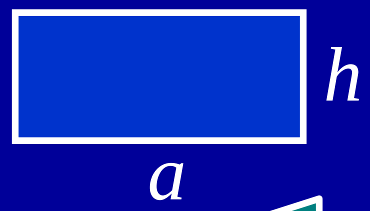
三、定积分的几何意义

四、定积分的性质

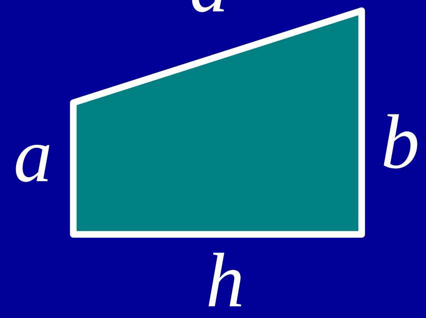
暨南大学电气信息学院苏保河主讲

一、定积分问题举例

矩形面积 $A = ah$

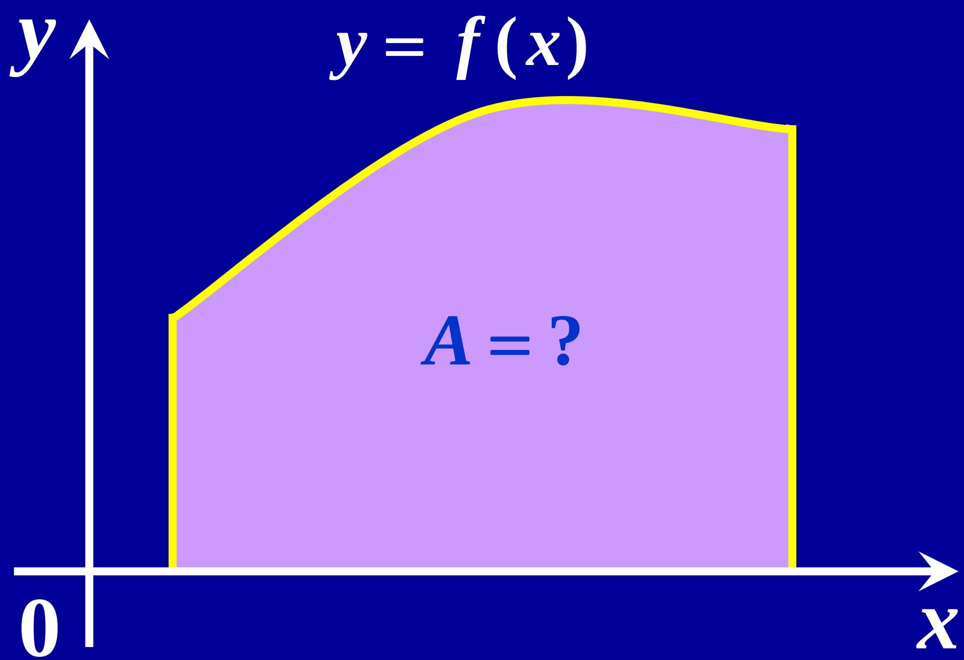


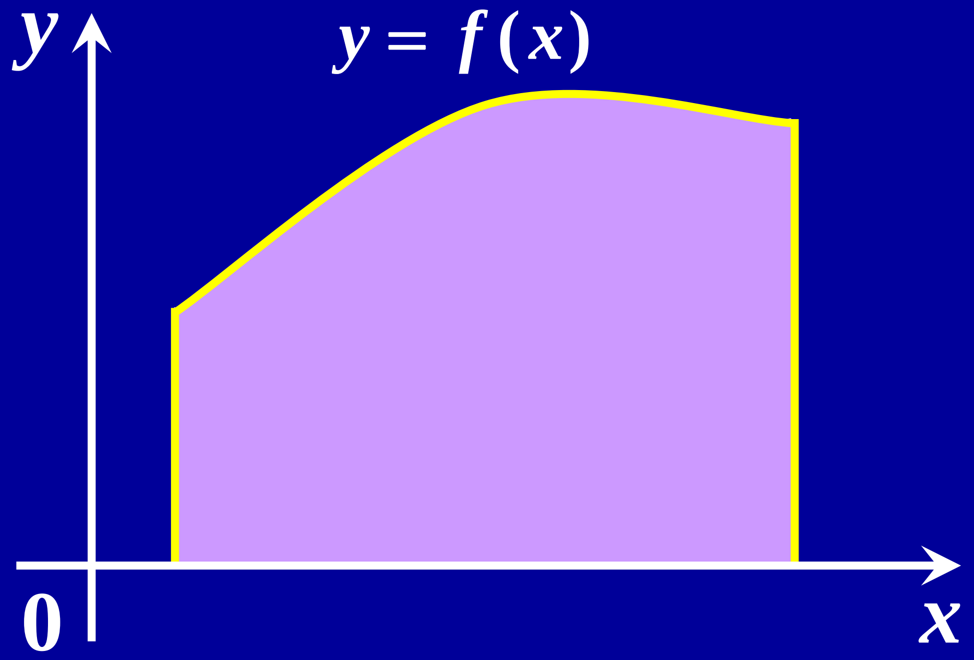
梯形面积 $A = \frac{h}{2}(a+b)$



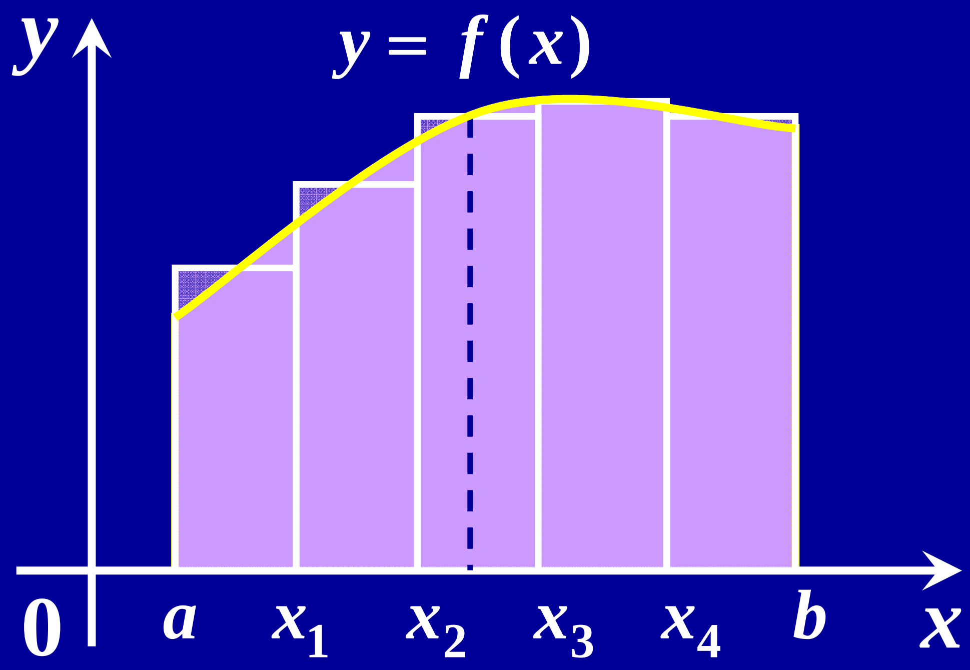
引例:

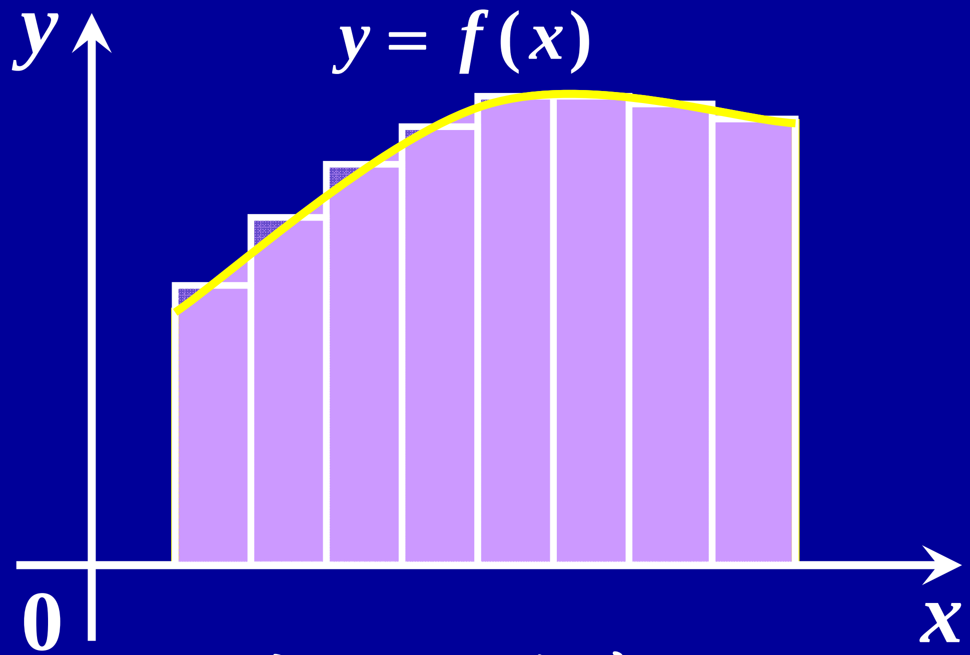
设曲边梯形是由曲线 $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$ 及 x 轴, 以及两直线 $x = a$, $x = b$ 所围成, 求其面积 A.



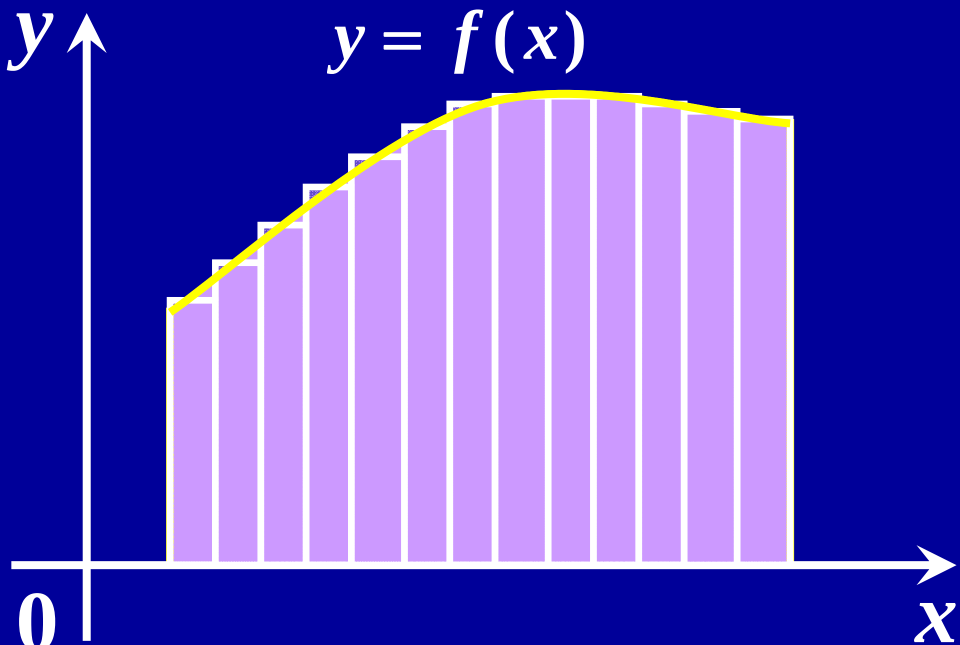


求曲边梯形的面积A

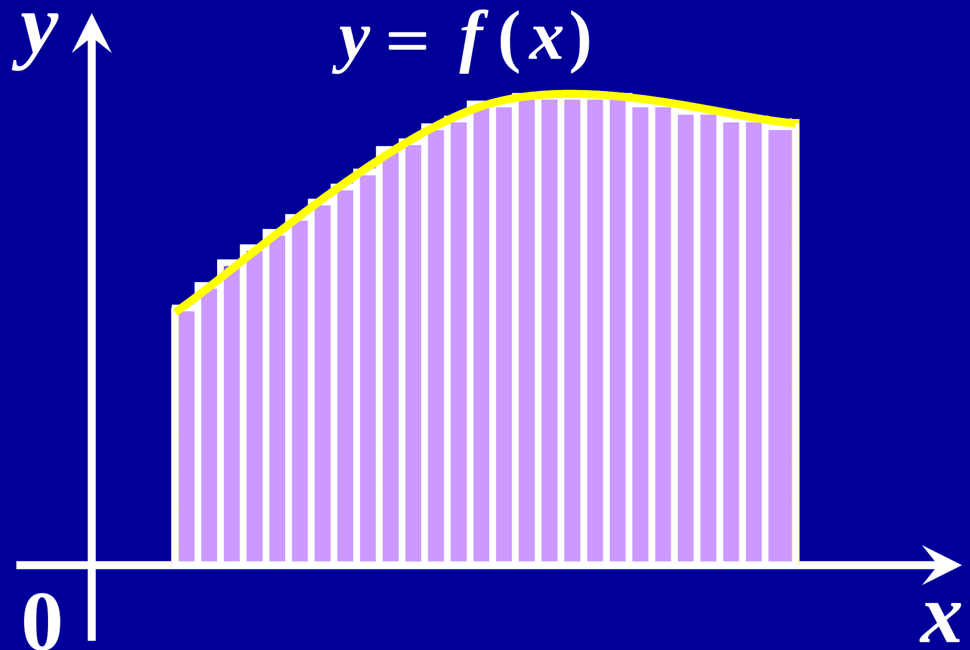

y
y = f(x)
0
a
x1
x2
x3
x4
b
x



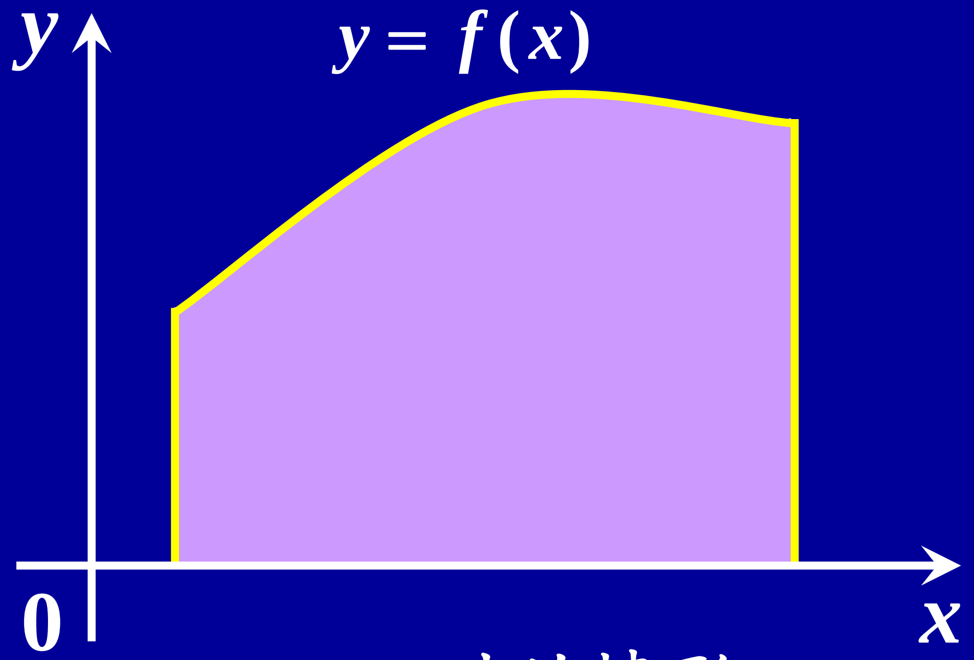
分成 $n = 8$ 个窄矩形



分成 $n = 13$ 个窄矩形



分成 $n = 27$ 个窄矩形



$n \to \infty$时的情形

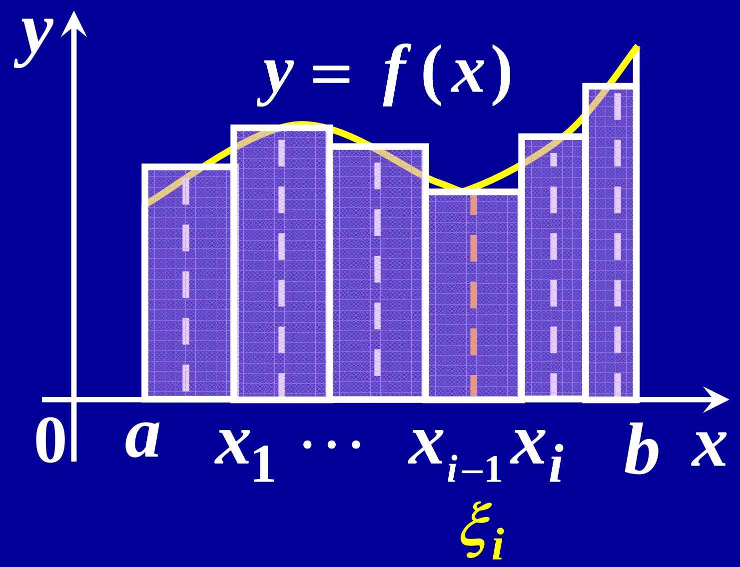
求曲边梯形面积的步骤:

1) 大化小. 在区间 $[a, b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

用直线 $x = x_i$ 将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形;

2) 常代变. $\forall\, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 在第 i 个窄曲边梯形上作以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底, $f(\xi_i)$ 为高的小矩形, 并以此小矩形面积近似代替相应窄曲边梯形面积 ΔA_i, 得



$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \;(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})\; (i = 1, 2, \cdots, n).$$

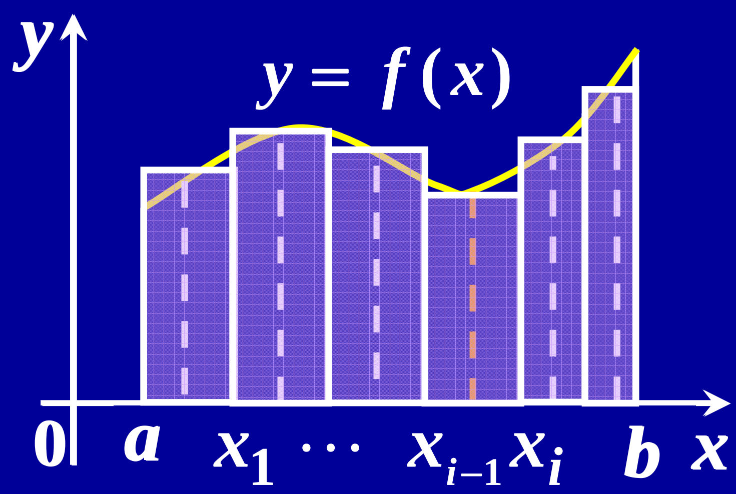
3) 近似和.

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

4) 取极限. 令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$, 则曲边梯形面积

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



此类问题的共性

- 解决问题的方法步骤相同：

  “大化小，常代变，近似和，取极限”

- 所求量极限结构式相同：特殊乘积和式的极限

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

二、定积分的定义

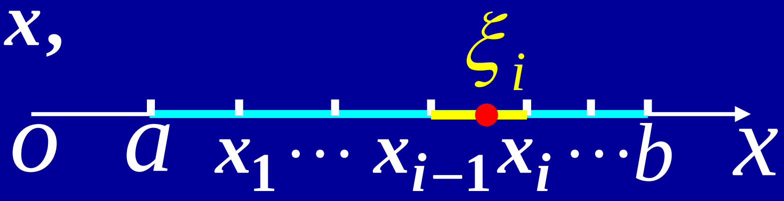
设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，若对 $[a,b]$ 的任一种分法

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，任取

$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，只要 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

总趋于确定的极限 I，则称此极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间

$[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，



即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，

此时称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

$[a,b]$ 称为积分区间

积分上限

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

积分和

注1 定积分的几何意义

$f(x)>0$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$表示曲边梯形面积.

$f(x)<0$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$表示曲边梯形面积的负值.

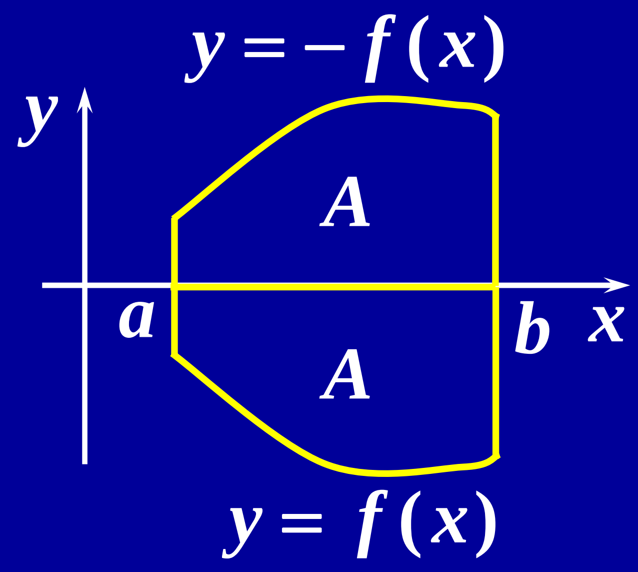
证 曲边梯形的面积

$$A=\int_a^b[-f(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[-f(\xi_i)\Delta x_i]$$

$$=-\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)\Delta x_i]$$

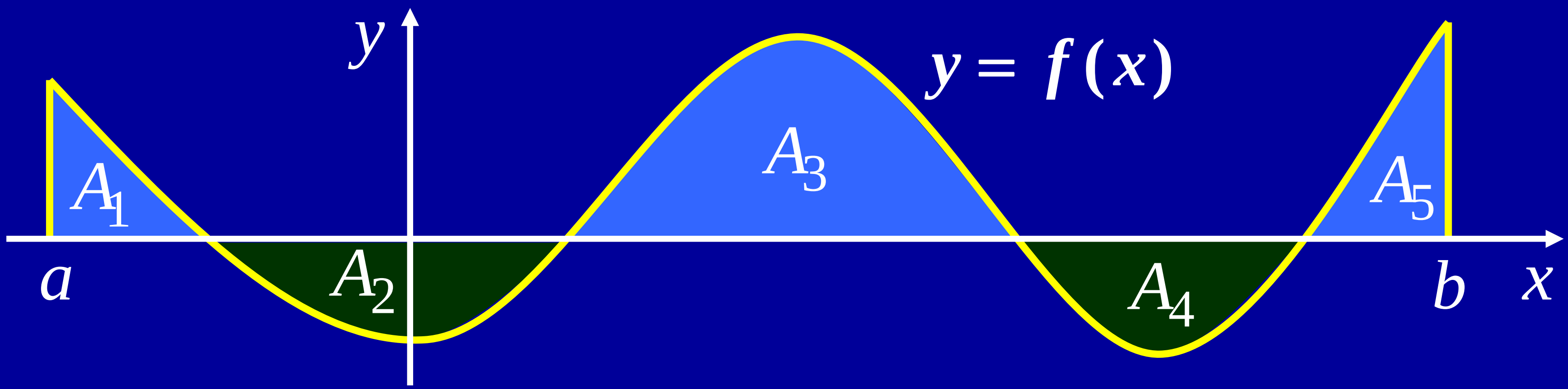
$$=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$, 所以$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-A$.



注1 定积分的几何意义

$f(x)>0$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$ 表示曲边梯形面积.

$f(x)<0$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$ 表示曲边梯形面积的负值.



一般地, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$

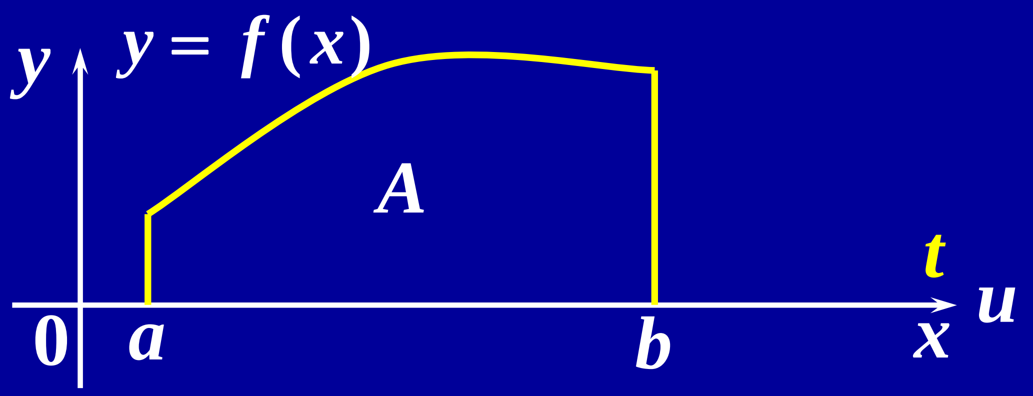
表示由曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围成的若干个平面图形面积的代数和.

定积分的几何意义:

$$f(x)>0,\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A\text{ 曲边梯形面积}$$

注 2 定积分是一个数, 仅与被积函数及积分区间有关, 而与积分变量用什么字母表示无关, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$



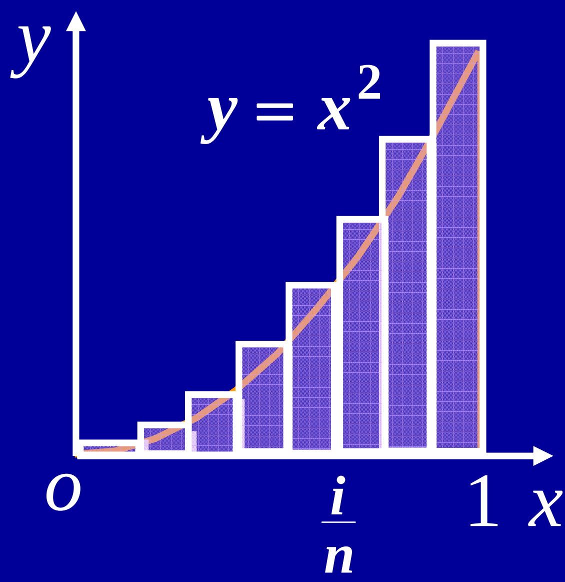
注3 可积的充分条件:

定理1 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Longrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

定理2 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点 $\Longrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

(证明略)

例1 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$.



解 将 $[0,1]$ n 等分, 分点为 $x_i = \frac{i}{n}$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$.

取 $\xi_i = \frac{i}{n}$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$,

则 $f(\xi_i)\Delta x_i = \xi_i^2 \Delta x_i = \dfrac{i^2}{n^3}$,

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

三、定积分的性质 (设所列定积分都存在)

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ (规定)

2. $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$

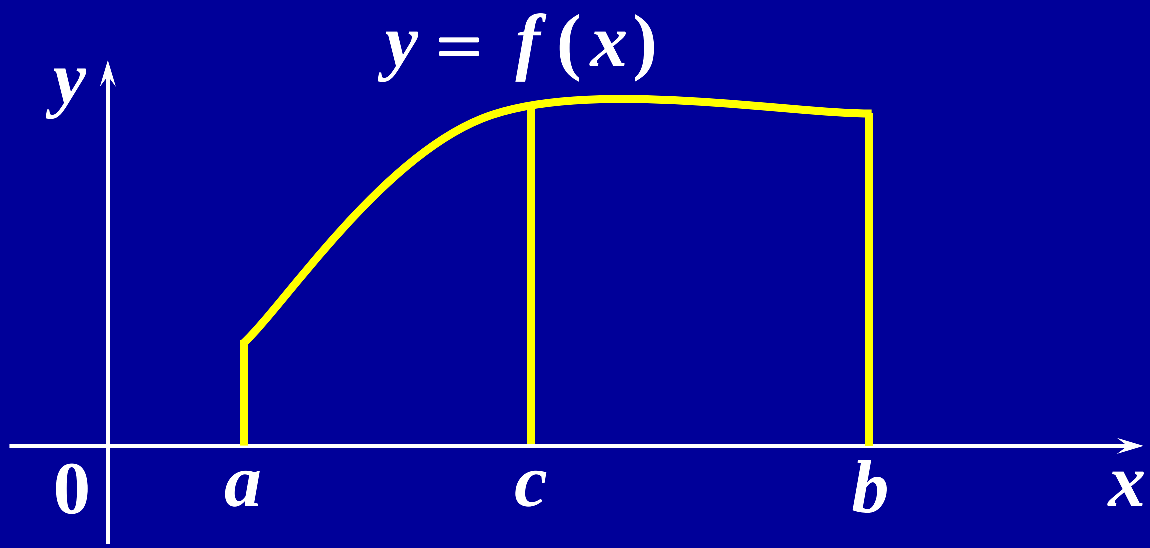
3. $\int_a^b k f(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k 为常数)

4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

证 左端 $= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$

$= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i =$ 右端

5. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$



6. 若在$[a, b]$上 $f(x) \geq 0$, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

$(\leq)$ $(\leq)$

证 $\because$ $f(x) \geq 0$

$$\therefore \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$$

推论 若在$[a, b]$上 $f(x) \leq g(x)$,

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

例2 比较$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$和$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$的大小.

解 因为在$[0, 1]$上$x \geq x^2$,

所以$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

推论1 若在$[a, b]$上$f(x) \leq g(x)$,

则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

7. 设 $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$，$m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$，

(证明看书)

则 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le M(b-a)\ (a<b)$

例3 试证 $\dfrac{\pi-2}{\pi}\le\int_1^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\le\dfrac{\pi-2}{2}\sin 1.$

证 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，则 $f(x)$在$[1,\dfrac{\pi}{2}]$上连续，且导数

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)<0,\ \ x\in(1,\frac{\pi}{2}),$$

所以，$f(x)$在$[1,\dfrac{\pi}{2}]$上单减，从而 $\dfrac{2}{\pi}\le f(x)\le\sin 1$，

故 $\dfrac{2}{\pi}\cdot(\dfrac{\pi}{2}-1)\le\int_1^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x\le\sin 1\cdot(\dfrac{\pi}{2}-1)$，

即 $\dfrac{\pi-2}{\pi}\le\int_1^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\le\dfrac{\pi-2}{2}\sin 1.$ 证毕

8. 积分中值定理

若 $f(x)\in C[a,b]$，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值分别为 m, M，则由性质 7 可得

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M,$$

根据介值定理，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，

$$\text{使 } f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{即 } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证毕

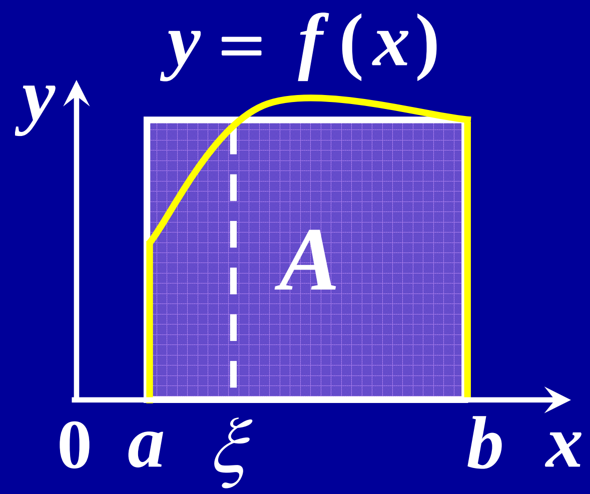
说明 积分中值定理的几何意义

积分中值定理:

若 $f(x)\in C[a,b]$,

则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,

使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.



$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值.

作 业

习题4-2 **2(19,20,21,24,25,27,29,30,32,33).**

习题5-1 **2(1*); 3(2,3); 4; 7(1,3*); 10(1,3); 13(1,3).**

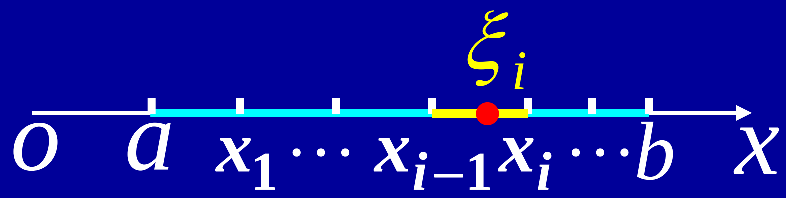
下次课内容

第五章 第二节 微积分基本公式

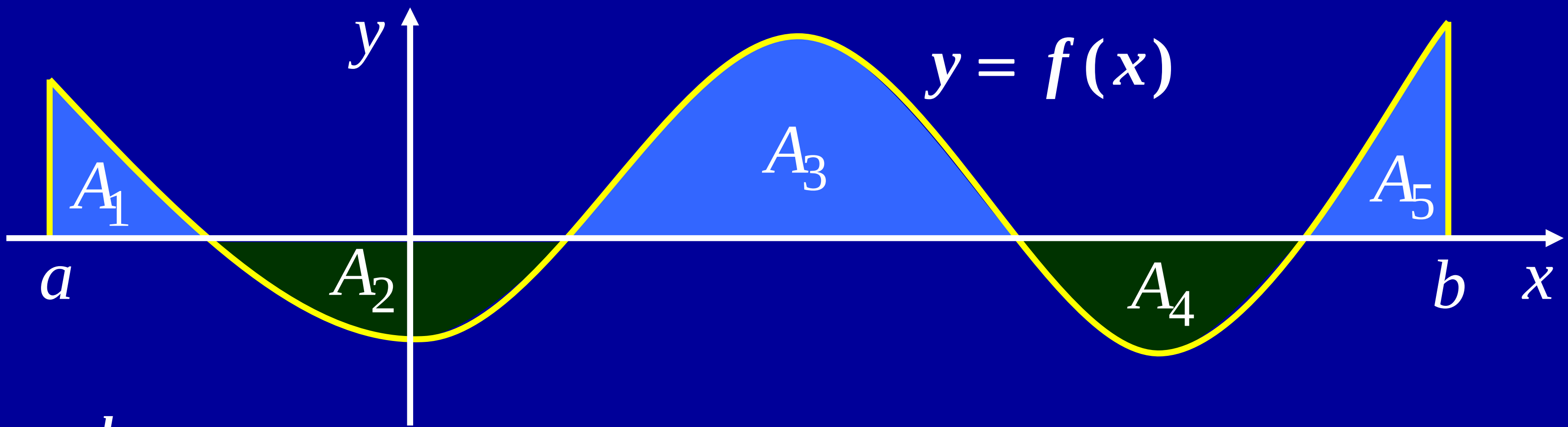
内容小结

一、定积分的定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



二、定积分的几何意义



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

表示: 由曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围成的若干个平面图形面积的代数和.

注意 定积分是一个数, 与被积函数及积分区间有关, 与积分变量用什么字母表示无关.

三、定积分的性质 (设所列定积分都存在)

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ (规定)

2. $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$

3. $\int_a^b k f(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k 为常数)

4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

5. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

6. 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \underset{(\le)}{\ge} 0$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \underset{(\le)}{\ge} 0$.

三、定积分的性质 (设所列定积分都存在)

7. 设 $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$,

则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$ $(a < b)$

8. 积分中值定理

若 $f(x) \in C[a,b]$, 则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

思 考 题

例1 下列各题求积分方法有何不同?

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x} = \int \frac{\mathrm{d}(4+x)}{4+x}$

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2})}{1+(\frac{x}{2})^2}$

(3) $\int \frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(4+x^2)}{4+x^2}$

(4) $\int \frac{x^2}{4+x^2}\mathrm{d}x = \int [1-\frac{4}{4+x^2}]\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4-x^2} = \frac{1}{4}\int [\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}]\mathrm{d}x$

(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}(x-2)}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$

例2 求 $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x.$

解 $$\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{-(2-2x)+5}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}(1+2x-x^2)}{\sqrt{1+2x-x^2}} + 5\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}}$$

$$= -2\sqrt{1+2x-x^2} + 5\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

例3 求 $\int \frac{x+1}{x(1+xe^{x})}\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\int \frac{(x+1)e^{x}}{xe^{x}(1+xe^{x})}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{xe^{x}}-\frac{1}{1+xe^{x}}\right)\mathrm{d}(xe^{x})$

$$=\ln\left|xe^{x}\right|-\ln\left|1+xe^{x}\right|+C$$

分析 $\frac{1}{xe^{x}(1+xe^{x})}=\frac{1+xe^{x}-xe^{x}}{xe^{x}(1+xe^{x})}=\frac{1}{xe^{x}}-\frac{1}{1+xe^{x}}$

$$(x+1)e^{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(xe^{x})$$

例4 求 $\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f''(x)f^2(x)}{f'^3(x)}\right]\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\left[1-\frac{f''(x)f(x)}{f'^2(x)}\right]\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\underline{\frac{f'^2(x)-f''(x)f(x)}{f'^2(x)}\mathrm{d}x}$$

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\mathrm{d}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+C$$

注1 $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ 的证明:

由 $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, 得

$$\begin{cases} (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \\ n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \end{cases}$$

两端分别相加, 得

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n$$

即 $$n^3 + 3n^2 + 3n = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

注2 变速直线运动的路程

设某物体作直线运动, 已知速度 $v = v(t) \in C[T_1, T_2]$, 且 $v(t) \geq 0$, 求在运动时间内物体所经过的路程 s.

解决步骤:

1) 大化小. 在 $[T_1, T_2]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点, 将它分成 n 个小段 $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 在每个小段上物体经过的路程为 Δs_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$

2) 常代变. 任取 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, 以 $v(\xi_i)$ 代替变速, 得

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

3) 近似和. $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$

4) 取极限. $s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i \quad (\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta t_i)$