高等数学 I

第四章 不定积分

微分法：已知 $F(x)$，求 $F'(x)=?$

积分法：已知 $F'(x)$，求 $F(x)=?$

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

第四章
不定积分

第一节
不定积分的概念与性质

主要内容

一、 原函数与不定积分的概念

二、 基本积分表

三、不定积分的性质

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

一、 原函数与不定积分的概念

引例: 一个质量为 m 的质点, 在变力 $F = A\sin t$ 的作下沿直线运动, 试求质点的运动速度 $v(t)$.

根据牛顿第二定律, 加速度 $a(t) = \frac{F}{m} = \frac{A}{m}\sin t$,

因此问题转化为: 已知 $v'(t) = \frac{A}{m}\sin t$, 求 $v(t) = ?$

定义1. 若在区间 I 上定义的两个函数 $F(x)$ 及 $f(x)$, 满足 $F'(x) = f(x)$, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

如引例中, $\frac{A}{m}\sin t$ 的一个原函数为 $-\frac{A}{m}\cos t$.

问题:

1. 在什么条件下，一个函数的原函数存在?

2. 若原函数存在, 它是否唯一, 如何表示?

定理 1 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，

则 $f(x)$ 在 I 上的原函数存在.

(以后证明)

注 因为初等函数在定义区间上连续,

所以初等函数在定义区间上有原函数.

定理 2 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的任意一个原函数都可记为 $F(x)+C$ (C 为任意常数).

证 设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数，

即 $\Phi'(x)=f(x)$,

又知 $F'(x)=f(x)$,

$$\therefore [\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)$$
$$=f(x)-f(x)=0,$$

故 $\Phi(x)-F(x)=C$,

即 $\Phi(x)=F(x)+C$ (C 为某个常数).

定义 2　$f(x)$在区间 I 上的原函数全体称为 $f(x)$在 I 上的不定积分，记作$\int f(x)\mathrm{d}x$.

$\int$ — 积分号；　　$f(x)$ — 被积函数；

x — 积分变量；　$f(x)\mathrm{d}x$ — 被积表达式.

注　若$F'(x)=f(x)$，

则$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$　(C为任意常数).

C 又称为积分常数

不可丢！

例如，$\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$;

$$\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C;$$

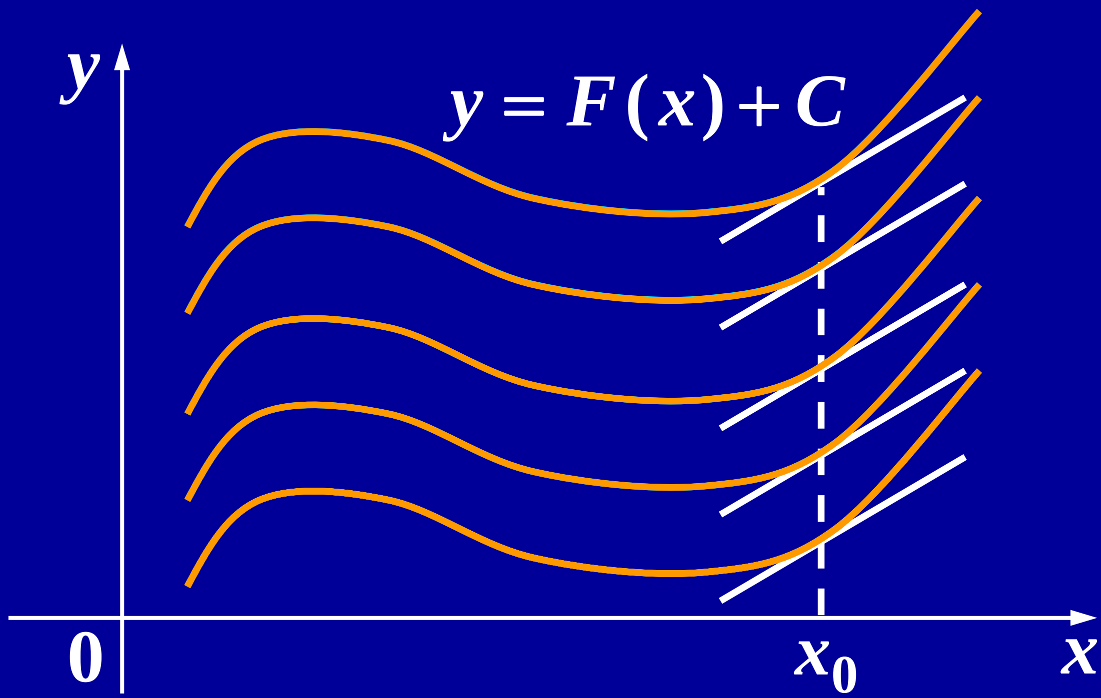
$$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C.$$

不定积分的几何意义:

$f(x)$的原函数的图形称为$f(x)$的积分曲线.

$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ 的图形

—— $f(x)$的所有积分曲线组成的平行曲线族.



例 1 设曲线通过点(1, 2), 其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的两倍, 求此曲线的方程.

解 设曲线方程为 $y = f(x)$.

$\because \quad y' = 2x,$

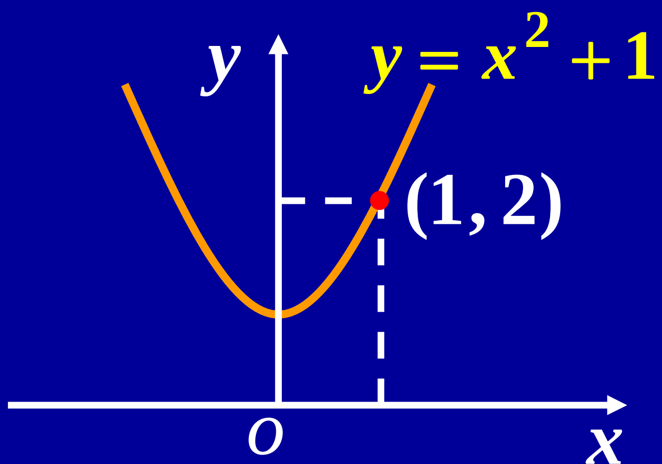
$\therefore \quad y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C,$

所求曲线过点(1, 2),

故有 $\quad 2 = 1^2 + C,$

$\therefore \quad C = 1,$

因此所求曲线为 $y = x^2 + 1.$



注 从不定积分定义可知:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$.

二、 基本积分表

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ (k 为常数)

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C$ (常数 $\mu \neq -1$)

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

$x < 0$时

$(\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$ 或 $-\operatorname{arccot} x + C$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 或 $-\arccos x + C$

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

(8) $$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$$

(9) $$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$$

(10) $$\int \sec x \tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$$

(11) $$\int \csc x \cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$$

(12) $$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$$

(13) $$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

例2 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x}}$.

解 原式 $= \int x^{-\frac{4}{3}}\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C$

$= -3x^{-\frac{1}{3}} + C.$

例3 求 $\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

解 原式 $= \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$

三、不定积分的性质

1. $\int k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad (k \neq 0);$

2. $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.$

推论 $\int \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)\,\mathrm{d}x,$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 不全为 0.

例4 求 $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$.

解 原式 $= \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$

$$= \int \sec^2 x\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x$$

$$= \tan x - x + C.$$

例5 求 $\int 2^x(e^x-5)\,\mathrm{d}x$.

解 (自算)

$$\text{原式}=\int[(2e)^x-5\cdot 2^x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(2e)^x}{\ln(2e)}-5\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

$$=2^x\left[\frac{e^x}{\ln(2e)}-\frac{5}{\ln 2}\right]+C.$$

例6 求 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x$.

解 (自算)

$$原式 = \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$= \arctan x + \ln|x| + C.$$

第二节
换元积分法(一)

主要内容

一、第一类换元法

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

一、第一类换元法

定理3 设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$，且 $u=\varphi(x)$ 可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = F[\varphi(x)]+C$$

(也称配元法, 凑微分法)

证 $\because \{F[\varphi(x)]\}' = F'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$,

$\therefore \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = F[\varphi(x)]+C.$ 证毕

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$$

想到公式

$$\int u^m \mathrm{d}u = \frac{1}{m+1}u^{m+1} + C$$

例7 求 $\int (ax+b)^m \mathrm{d}x \ (m \neq -1)$.

解 $$\int (ax+b)^m \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int (ax+b)^m \mathrm{d}(ax+b)$$

$$= \frac{1}{a(m+1)}(ax+b)^{m+1} + C.$$

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$$

例8 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + (\frac{x}{a})^2}$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{1 + (\frac{x}{a})^2}$$

$$= \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C.$$

想到公式:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = \arctan u + C$$

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$$

例9 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0).$

解 (自算) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}}$

$$= \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

想到公式 $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C$

例10 求 $\int \tan x \, dx$.

解 $$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x}$$

$$= -\ln|\cos x| + C.$$

类似可得

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \int \frac{d\sin x}{\sin x}$$

$$= \ln|\sin x| + C.$$

例11 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$.

解 $\because \frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$

$$\therefore \text{原式}=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x+a}\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a}-\int\frac{\mathrm{d}(x+a)}{x+a}\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\ln|x-a|-\ln|x+a|\right]+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

常用的几种凑微分形式:

$$(1)\ \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b)$$

$$(2)\ \int f(x^n)x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\,\mathrm{d}x^n$$

$$(3)\ \int f(x^n)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x^n$$

$$(4)\ \int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\,\mathrm{d}\sin x$$

$$(5)\ \int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\,\mathrm{d}\cos x$$

$$(6)\ \int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\,\mathrm{d}\tan x$$

$$(7)\ \int f(e^x)e^x\mathrm{d}x = \int f(e^x)\,\mathrm{d}e^x$$

$$(8)\ \int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\,\mathrm{d}\ln x$$

例12 求$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)}$.

解 原式$\displaystyle=\int\frac{\mathrm{d}\ln x}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+2\ln x)}{1+2\ln x}$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|1+2\ln x\right|+C.$$

例13 求$\int \frac{\cos(5\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 (自算)

$$\text{原式} = 2\int \cos(5\sqrt{x}+4)\,\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$= \frac{2}{5}\int \cos(5\sqrt{x}+4)\,\mathrm{d}(5\sqrt{x}+4)$$

$$= \frac{2}{5}\sin(5\sqrt{x}+4)+C.$$

例14 求$\int \sec^6 x\,\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\int (\tan^2 x+1)^2\,\mathrm{d}\tan x$

$$=\int (\tan^4 x+2\tan^2 x+1)\,\mathrm{d}\tan x$$

$$=\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\tan x+C.$$

例15 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$.

解 (自算)

法1 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} = \int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}(1+e^x)}{1+e^x}$

$= x - \ln(1+e^x) + C.$

法2 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}$

$= -\ln(1+e^{-x}) + C.$

作 业

习题4-1 2(3,5,13,14,16,18,20,21,23,24,25,26); 5; 7.

习题4-2 1(2,4,6,8,10,11,13,14);

2(2,6,8,9,11,13,14,16,18).

下次课内容

第四章 不定积分 第二节 第一类换元法(续)

第五章 定积分 第一节 定积分的概念与性质

内容小结

一、原函数的概念

定义1. 若在区间 I 上定义的两个函数 $F(x)$ 及 $f(x)$, 满足 $F'(x)=f(x)$, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

二、不定积分的概念

定义2. $f(x)$在区间 I 上的原函数全体称为 $f(x)$在 I 上的不定积分, 记作$\int f(x)\mathrm{d}x$.

三、不定积分的性质

1. $\int k f(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k \neq 0);$

2. $\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.$

推论 $\int \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)\mathrm{d}x,$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 不全为 0.

四、 基本积分表

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ (k 为常数)

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C$ (常数 $\mu \neq -1$)

(3) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

(4) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$ 或 $-\operatorname{arccot} x + C$

(5) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 或 $-\arccos x + C$

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

$$(8)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$(9)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$(10)\quad \int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$(11)\quad \int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$$(12)\quad \int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$$

$$(13)\quad \int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

五、第一类换元法

定理 设 $f(u)$有原函数 $F(u)$, 且 $u=\varphi(x)$可导, 则有换元公式:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\,\mathrm{d}\varphi(x)$$

$$= F[\varphi(x)] + C$$

(也称**配元法**, **凑微分法**)

常用的几种凑微分形式:

(1) $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b)$

(2) $\int f(x^n)x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\,\mathrm{d}x^n$

(3) $\int f(x^n)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x^n$

(4) $\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\,\mathrm{d}\sin x$

(5) $\int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\,\mathrm{d}\cos x$

$$(6)\ \int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\,\mathrm{d}\tan x$$

$$(7)\ \int f(e^x)e^x\mathrm{d}x=\int f(e^x)\,\mathrm{d}e^x$$

$$(8)\ \int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\,\mathrm{d}\ln x$$

练 习

1 若 $f(x)$ 是 e^{-x} 的原函数，则

$$\int \frac{f(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}\,x = \underline{\frac{1}{x} + C\ln|x| + C_1}$$

提示 已知 $f'(x) = e^{-x}$

所以 $f(x) = \int e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = -e^{-x} + C$

$$f(\ln x) = -\frac{1}{x} + C$$

$$\frac{f(\ln x)}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{C}{x}$$

2 若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数是 (**B**).

$(A)\quad 1+\sin x$;　　　　$(B)\quad 1-\sin x$;

$(C)\quad 1+\cos x$;　　　　$(D)\quad 1-\cos x$.

提示 由题意 $f(x)=\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C_1$,

其原函数为 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\sin x+C_1x+C_2$

注意 也可求二阶导数.

3 已知 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = Ax\sqrt{1-x^2} + B\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, 求 A, B.

解 等式两边对 x 求导, 得

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = A\sqrt{1-x^2} - \frac{Ax^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{B}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{(A+B) - 2Ax^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\therefore \quad \begin{cases} A + B = 0, \\ -2A = 1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2}, \\ B = \frac{1}{2}. \end{cases}$$