第三章
微分中值定理与导数的应用

第七节 平面曲线的曲率

主要内容

一、弧微分

二、曲率及其计算公式

三、曲率圆与曲率半径

四、第三章小结

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

一、弧微分

设 $y = f(x)$ 在(a, b)内有连续导数，其图形为 $\overset{\frown}{AB}$,

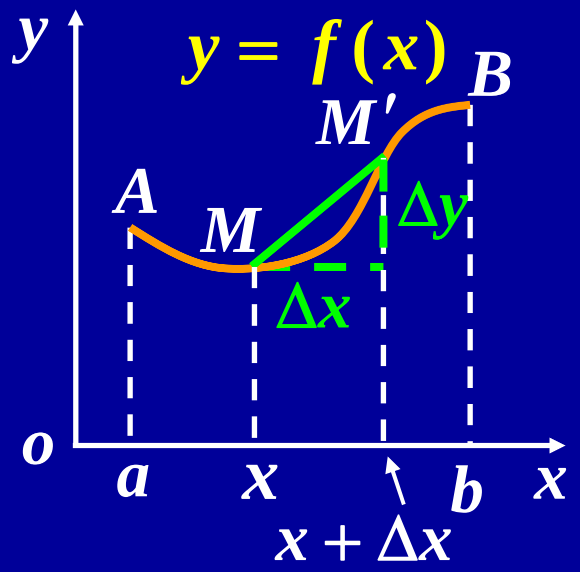
弧长 $s = \overset{\frown}{AM} = s(x)$ (正向与 x 轴同向).

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|} \cdot \frac{|MM'|}{\Delta x}$$

$$= \frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|} \cdot \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x}$$

$$= \pm \frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|} \sqrt{1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2},$$

$$\therefore\ s'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + (y')^2}.$$



$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|} = \pm 1}$$

$$s'(x) = \sqrt{1+(y')^2},$$

$$\therefore\ \mathrm{d}s = \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x,\ 或\ \mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}.$$

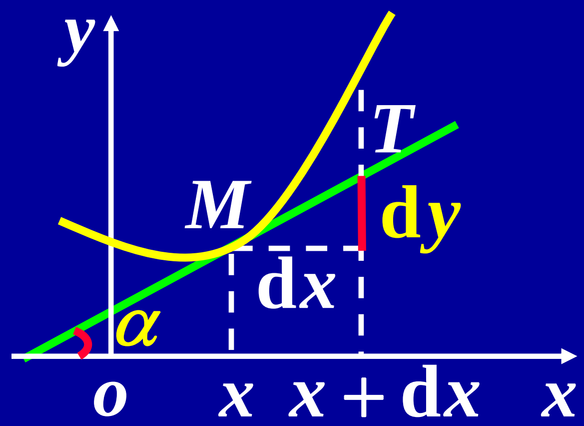
若曲线由参数方程表示: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

则弧长微分公式为 $\mathrm{d}s = \sqrt{(x')^2+(y')^2}\,\mathrm{d}t.$

几何意义: $\mathrm{d}s = |MT|,$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha.$$

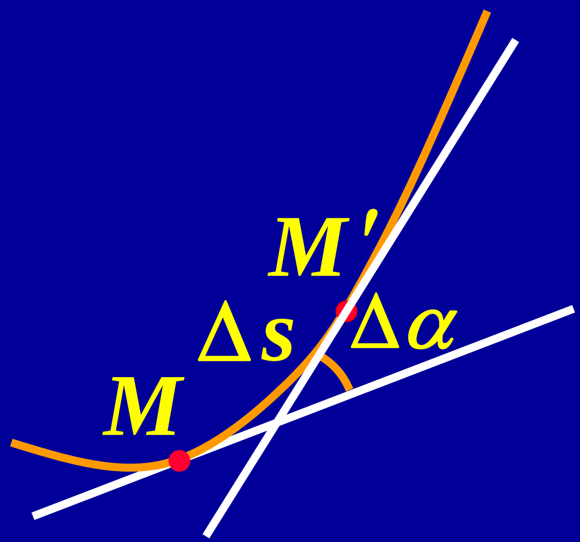


二、曲率及其计算公式

在光滑弧上自点 M 开始取弧段, 其长为 Δs, 对应的切线转角为 $\Delta\alpha$, 定义

弧段 Δs 上的平均曲率

$$\overline{K} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|,$$



点 M 处的曲率

$$K = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|.$$

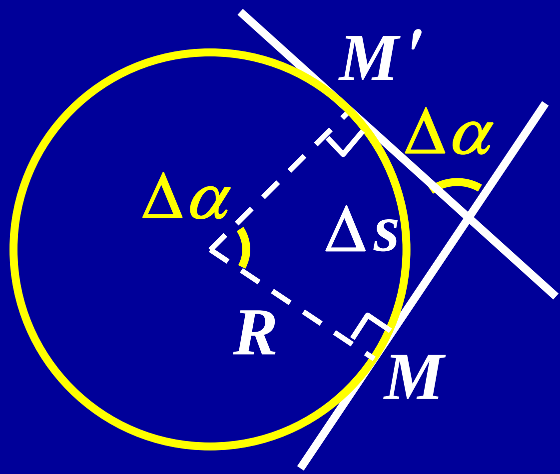
注意: 直线上任意点处的曲率为 0.

例1. 求半径为 R 的圆上任意点处的曲率 K.

解: 如图所示,

$$\Delta s = R\Delta\alpha,$$

$$K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}.$$



可见: R 愈小, 则 K 愈大, 圆弧弯曲程度愈大;

R 愈大, 则 K 愈小, 圆弧弯曲程度愈小.

曲率 K 的计算公式:

设曲线弧 $y = f(x)$ 二阶可导, 则由

$$\tan\alpha = y', \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\boxed{K = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|}$$

得 $\alpha = \arctan y'$,

$$\mathrm{d}\alpha = (\arctan y')'\,\mathrm{d}x = \frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x,$$

又 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$,

故曲率计算公式为 $K = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

若 $|y'| \ll 1$, 有曲率近似计算公式 $K \approx |y''|$.

说明: 由 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ 可得:

(1) 若曲线由参数方程 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ 给出, 则

$$K=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}.$$

(2) 若曲线方程为 $x=\varphi(y)$, 则

$$K=\frac{|x''|}{(1+x'^2)^{3/2}}.\qquad \boxed{y'=\frac{1}{x'},\ y''=-\frac{x''}{x'^3}}$$

例2. 我国铁路常用立方抛物线 $y=\dfrac{1}{6Rl}x^3$ 作缓和曲线,

其中R是圆弧弯道的半径, l 是缓和曲线的长度, 且 $l << R$.

求此缓和曲线在其两个端点 $O(0,0)$, $B(l,\dfrac{l^2}{6R})$ 处的曲率.

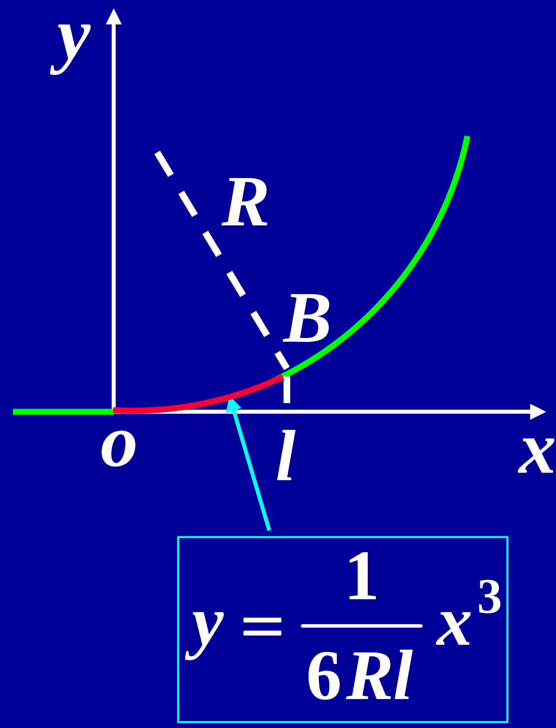
解: 若 $x\in[0,l]$,

由 $y'=\dfrac{1}{2Rl}x^2\le\dfrac{l}{2R}\approx 0$,

$y''=\dfrac{1}{Rl}x$,

得 $K\approx\left|y''\right|=\dfrac{1}{Rl}x$,

显然 $K\big|_{x=0}=0$; $K\big|_{x=l}\approx\dfrac{1}{R}$.



例3. 椭圆 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $(0 < b < a)$ 在何处曲率最大?

解: $x' = -a\sin t,\ \ x'' = -a\cos t,$

$y' = b\cos t,\ \ \ \ y'' = -b\sin t,$

故曲率为:

$$K = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}.$$

K 最大 $\rightleftarrows$ $f(t) = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$ 最小,

$f(t)$ 显然在 $[0, 2\pi]$ 连续. 求 $f(t)$ 的驻点:

$$f'(t) = 2a^2\sin t\cos t - 2b\cos t\sin t$$

$$= (a^2 - b^2)\sin 2t,\ 0 < t < 2\pi.$$

$$f'(t)=(a^2-b^2)\sin 2t,\ 0<t<2\pi.$$

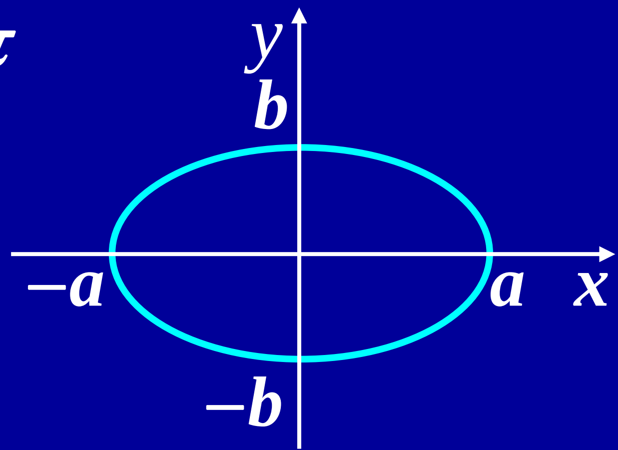
令 $f'(t)=0$, 得 $t=\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2},\ 0<t<2\pi.$

计算驻点和端点处的函数值:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t)$	b^2	a^2	b^2	a^2	b^2

由于 $0<b<a$, 所以 $t=0,\pi,2\pi$

$f(t)$ 取最小值, 从而 K 取最大值.

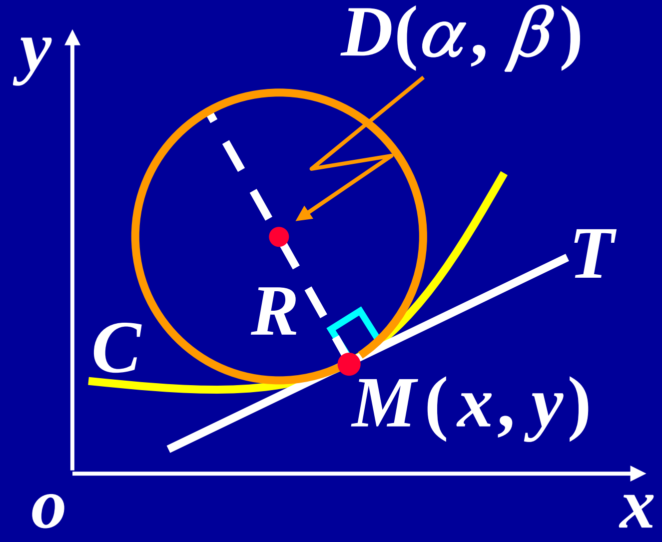


这说明椭圆在点 $(\pm a,0)$ 处曲率最大.

三、曲率圆与曲率半径

设 M 为曲线 C 上任一点, 在点 M 处作曲线的切线和法线, 在曲线的凹向一侧法线上取点 D 使

$$|DM| = R = \frac{1}{K}.$$



把以 D 为中心, R 为半径的圆叫做曲线在点 M 处的**曲率圆**(密切圆), R 叫做**曲率半径**, D 叫做**曲率中心**.

在点 M 处曲率圆与曲线 C 有下列密切关系:

(1) 有公切线; (2) 凹向一致; (3) 曲率相同.

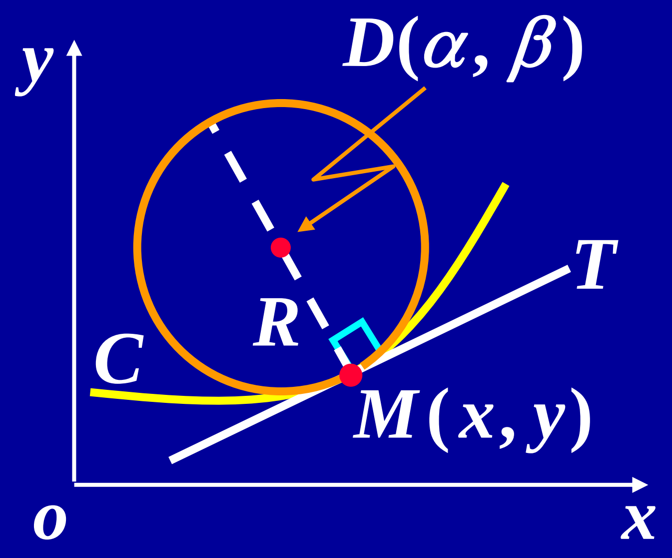
设曲线 C 的方程为 $y=f(x)$, 且 $y''\neq 0$, 求曲线上点 M 处的曲率半径及曲率中心 $D(\alpha,\beta)$ 的坐标公式.

设点 M 处的曲率圆方程为

$$(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2=R^2,$$

故曲率半径公式为

$$R=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|},$$

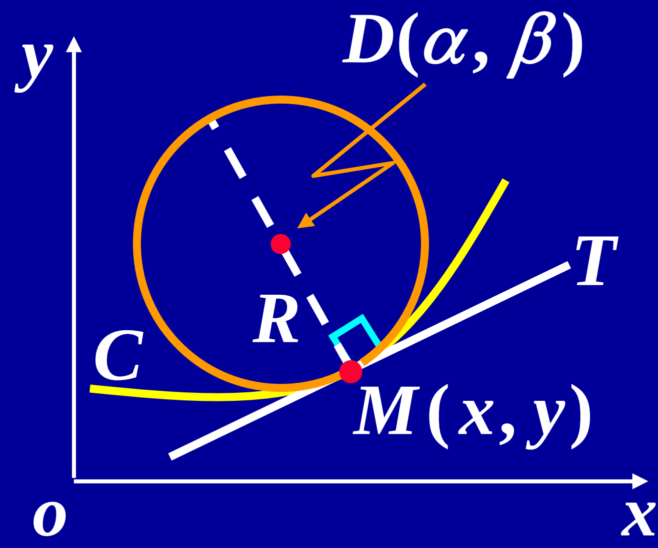


α,β 满足方程组

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2,\\ y'=-\dfrac{x-\alpha}{y-\beta}.\end{cases}$$

由此可得曲率中心公式:

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''}. \end{cases}$$



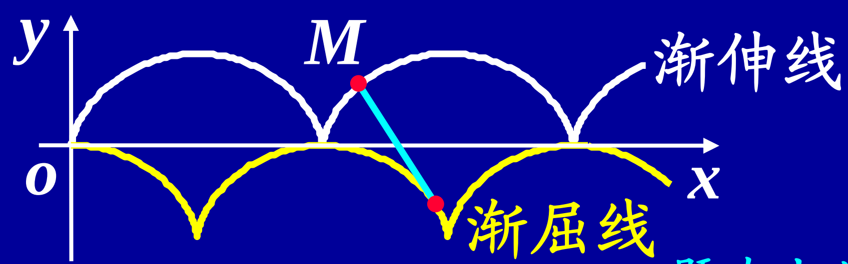
(注意 $y-\beta$ 与 y'' 异号)

当点 $M(x, y)$ 沿曲线 $y=f(x)$ 移动时,

相应的曲率中心的轨迹 G 称为曲线 C 的渐屈线,

曲线 C 称为曲线 G 的渐伸线,

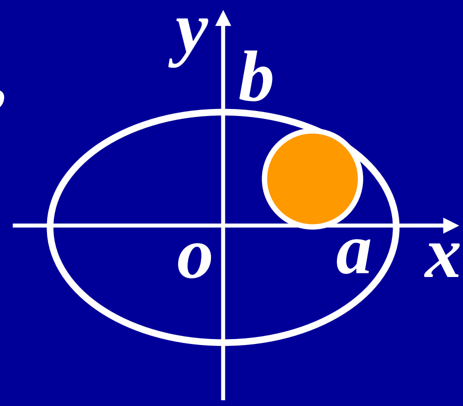
曲率中心公式可看成渐屈线的参数方程(参数为 x).



例4. 设一工件内表面的截痕为一椭圆, 现要用砂轮磨光其内表面, 问选择多大的砂轮比较合适?

解: 设椭圆方程为 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $(0 \le x \le 2\pi, b \le a)$

由例3可知, 椭圆在 $(\pm a, 0)$ 处曲率最大, 即曲率半径最小, 其值为



$$R = \left.\frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}\right|_{t=0} = \frac{b^2}{a},$$

显然, 砂轮半径不超过 $\dfrac{b^2}{a}$ 时, 才不会产生过量磨损或有些地方磨不到的问题.

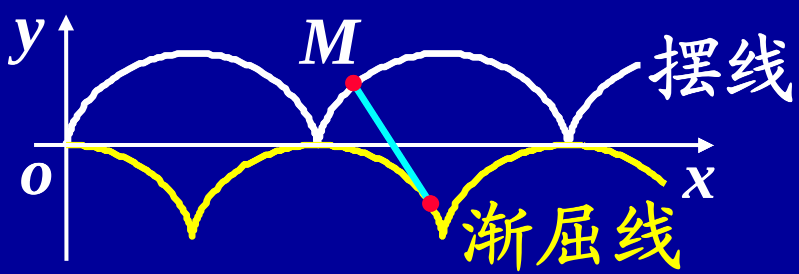
例5. 求摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ 的渐屈线方程.

解: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{1}{x'(t)} = \frac{-1}{a(1-\cos t)^2},$$

代入曲率中心公式, 得渐屈线的参数方程:

$$\begin{cases} \alpha = a(t+\sin t), \\ \beta = a(\cos t - 1). \end{cases}$$



渐屈线的参数方程(曲率中心公式):

$$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''},\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

作 业

习题3-7　2; 4; 5; 7; 8; 9*; 11*.

总习题三　7; 8; 10; 13; 14*; 17*.

下次课内容

第四章　不定积分

第一节　不定积分的概念与性质

第二节　换元积分法(第一类换元法)

四、第三章小结

微分中值定理

费马(fermat)引理

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x)\text{在}\cup(x_0)\text{有定义,} \\ \text{且} f(x)\le f(x_0),\ f'(x_0)\text{存在} \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x_0)=0$$

(或 $\ge$)

罗尔(Rolle)定理 如果 $y=f(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

(3) $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.

复习

拉格朗日中值定理　设 $y=f(x)$ 满足:

(1)在闭区间$[a,b]$上连续,

(2)在开区间(a,b)内可导,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

推论　若函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 $f'(x)\equiv 0$,

则 $f(x)$ 在 I 上必为常数.

复习

柯西(Cauchy)中值定理

设 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a, b) 内可导,

(3) 在开区间 (a, b) 内 $F'(x) \neq 0$,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $\dfrac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

复习

洛必达法则

洛必达法则的一般形式:

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{F(x)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A\ (\infty)$$

其它不定型解决方法:

$\boxed{\infty-\infty}$ $\xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}}$ $\boxed{\frac{0}{0}}$, $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ $\xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}}$ $\boxed{0\cdot\infty}$ $\xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}}$ $\boxed{0^0}$, $\boxed{1^\infty}$, $\boxed{\infty^0}$

复习

洛必达法则的常用技巧

技巧1 将极限存在且不为0的因子分离.

技巧2 结合等价无穷小.

技巧3 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 欲利用洛必达法则,

需转换成 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 后再用:

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=a$.

复习

泰勒 (Taylor) 公式

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数,
则在该邻域内有:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = o[(x-x_0)^n]$$

拉格朗日余项

佩亚诺(Peano)余项

ξ 在 x 与 x_0 之间, $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$ $(0<\theta<1)$.

复习

麦克劳林(Maclaurin)公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad (0<\theta<1).$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n).$$

复习

常用麦克劳林(Maclaurin)公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{(-1)^m \cos(\theta x)}{(2m+1)!} x^{2m+1}, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{(-1)^{m+1} \cos(\theta x)}{(2m+2)!} x^{2m+2}, \quad 0 < \theta < 1,$$

复习

常用麦克劳林(Maclaurin)公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+$$

$$\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}},\quad 0<\theta<1,$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

复习

泰勒公式的应用

1) 泰勒公式在近似计算中的应用

2) 利用泰勒公式求极限

3) 利用泰勒公式证明不等式

复习

单调性的判别

定理 1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导. 若在开区间 (a, b) 内 $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上单调递增 (递减).

注意:

1 如果把闭区间 $[a, b]$ 换成其它区间，有类似结论.

2 单调区间的可能分界点：驻点和导数不存在的点.

3 如果在某区间上 $f'(x) \geq 0$ (≤ 0)，且等号仅在有限个点(或一些离散的点)成立，则函数在该区间上单增 (单减).

复习

曲线凹凸与拐点

定义. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,

$\forall\, x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 \neq x_2$:

若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

则称曲线 $f(x)$ 是上凹(凹)的;

若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

则称曲线 $f(x)$ 是下凹(凸)的.

拐点 — 连续曲线上凹凸弧段的分界点.

复习

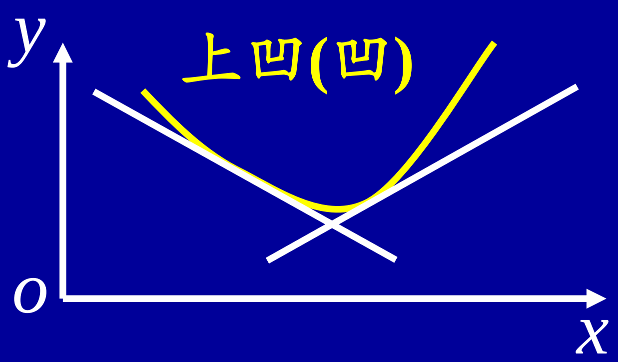
定义' 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,

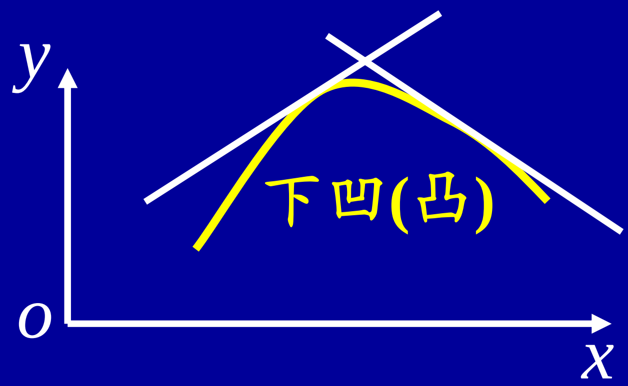
(1) 若曲线弧位于其上任意一点的切线的上方,

则称曲线在区间 I 上是**上凹(凹)**的;

(2) 若曲线弧位于其上任意一点的切线的下方,

则称曲线在区间 I 上是**下凹(凸)**的.





复习

定理(凹凸判定法) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内有二阶导数，且 $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$，则曲线 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是凹的 (凸的).

注意

1 如果把闭区间 $[a, b]$ 换成其它区间，有类似结论.

2 可能拐点 — 使二阶导数为零和不存在的点.

3 如果在某区间上 $f''(x) \geq (\leq) 0$，且等号仅在有限个点(或一些离散的点)成立，则曲线在该区间上是凹(凸)的.

复习

连续函数的极值

定义 $\forall\, x \in \overset{o}{U}(x_0)$:

(1) 若恒有 $f(x) < f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大点,

称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值;

(2) 若恒有 $f(x) > f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的极小点,

称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值.

极大点与极小点统称为极值点;

极大值与极小值统称为极值.

复习

极值的判别方法

(1) 设函数在 x_0 取得极值且可导，则 $f'(x_0) = 0$.

(2) 可能极值点：驻点和导数不存在的点.

(3) 第一充分条件：设 $f(x)$ 在 x_0 连续，

$f'(x)$在 x_0 两侧邻近左正右负，则 $f(x_0)$为极大值；

$f'(x)$在 x_0 两侧邻近左负右正，则 $f(x_0)$为极小值.

(4) 第二充分条件：

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0 \Longrightarrow f(x_0)\text{为极大值；}$$

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0 \Longrightarrow f(x_0)\text{为极小值.}$$

复习

连续函数的最值

求闭区间上连续函数最值的方法:

(1) 求 $f(x)$ 在 (a, b) 内的可能极值点

驻点和导数不存在的点: $x_1, x_2, \cdots, x_m$.

(2) 求最大值 M 和最小值 m

$$M = \max\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_m), f(a), f(b)\},$$

$$m = \min\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_m), f(a), f(b)\}.$$

复习

特别:

- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有一个可能极值点时,若在此点取极大(小)值,则也是最大(小)值.
- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调时, 最值必在端点处达到.
- 应用问题: 可以根据实际意义判别可能极值点是否为最大值点或最小值点.
- 利用三行表判断最值是一种很有效的方法.

复习

曲线渐近线的求法

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty) \\ (x\to\infty)}} f(x)=b$, 则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$.

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+ \\ (x\to x_0^-) \\ (x\to x_0)}} f(x)=\infty$, 则曲线 $y=f(x)$ 有铅垂渐近线 $x=x_0$.

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty) \\ (x\to\infty)}} [f(x)-(kx+b)]=0$, 则曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$,

其中 $k=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty) \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty) \\ (x\to\infty)}} [f(x)-kx]$.

复习

函数图形的描绘

步骤:

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域, 并考察其对称性及周期性;
2. 求 $f'(x)$, $f''(x)$, 并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为 0 和不存在的点;
3. 列表判别增减及凹凸区间, 求出极值和拐点;
4. 求渐近线;
5. 确定某些特殊点, 描绘函数图形.

复习

弧微分

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

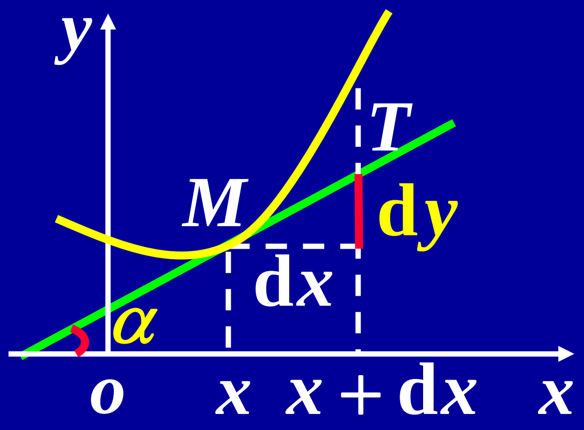
$$= \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{y = f(x)}$$

$$= \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t \qquad \boxed{\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}}$$

几何意义： $\mathrm{d}s = |MT|,$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha.$$

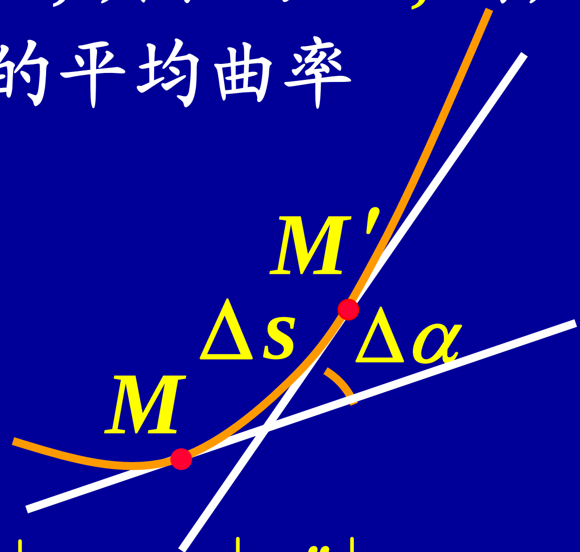


复习

曲率及其计算公式

在光滑弧上自点 M 开始取弧段, 其长为 Δs, 对应的切线转角为 $\Delta\alpha$, 定义弧段 Δs 上的平均曲率

$\overline{K}=\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$, 点 M 处的曲率



$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

$$=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}=\frac{|x''|}{(1+x'^2)^{3/2}}.$$

$\boxed{y=f(x)}$ $\boxed{\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}}$ $\boxed{x=\varphi(y),}$

若 $|y'|<<1$, 有曲率近似计算公式 $K\approx|y''|$.

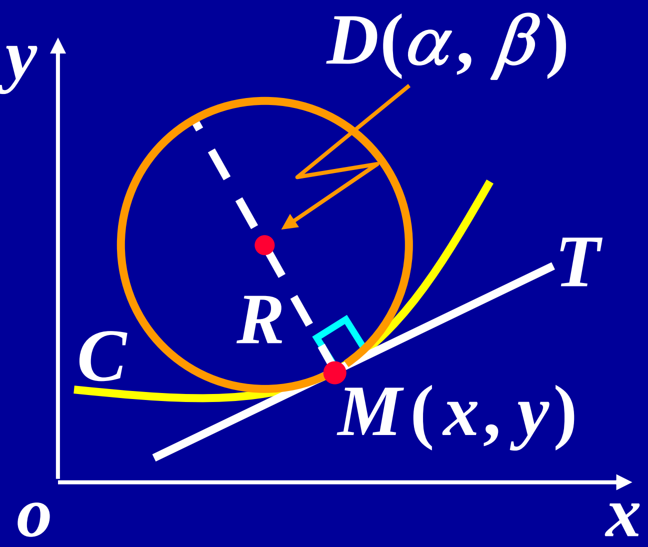
暨南大学电气信息学院苏保河主讲

复习

曲率圆与曲率半径

设 M 为曲线 C 上任一点, 在点 M 处作曲线的切线和法线, 在曲线的凹向一侧法线上取点 D 使

$$|DM| = R = \frac{1}{K}.$$



把以 D 为中心, R 为半径的圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆(密切圆), R 叫做曲率半径, D 叫做曲率中心.

曲率半径公式: $R = \dfrac{1}{K} = \dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$

复习

渐屈线及其参数方程(曲率中心公式)

当点 $M\,(x, y)$ 沿曲线 $y = f(x)$ 移动时,

相应的曲率中心的轨迹 G 称为曲线 C 的渐屈线,

曲线 C 称为曲线 G 的渐伸线.

渐屈线的参数方程(曲率中心公式):

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''}. \end{cases}$$