第六节 函数图形的描绘与第三章小结

第三章
微分中值定理
与导数的应用

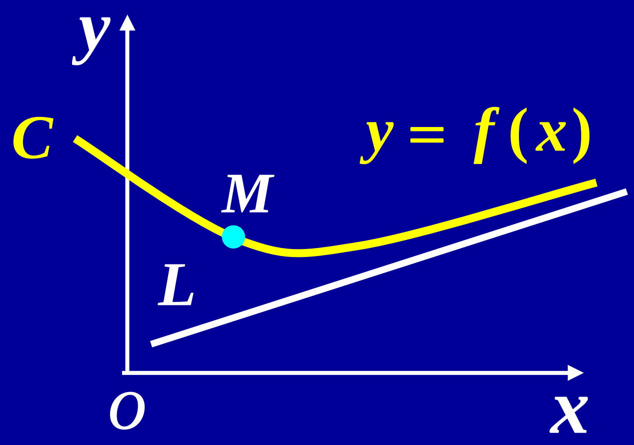
主要内容

一、 曲线的渐近线
二、 函数图形的描绘
三、 第三章小结

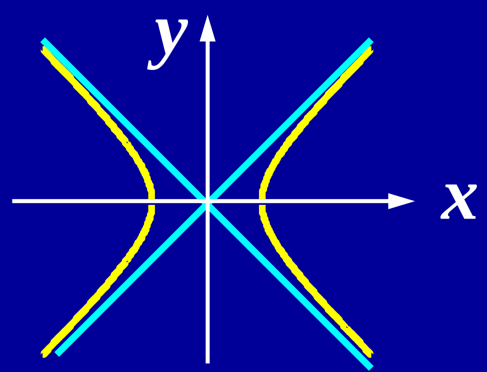
暨南大学电气信息学院苏保河主讲

一、 曲线的渐近线

定义. 若曲线 C 上的点 M 沿着曲线无限地远离原点时，点 M 与某一直线 L 的距离趋于0，则称直线 L 为曲线 C 的渐近线.



例如，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



有渐近线 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$,

但抛物线 $y=x^2$ 无渐近线.

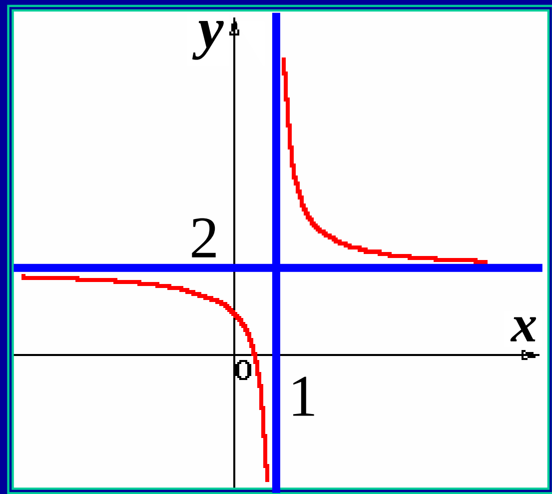
1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$.

(或 $x\to-\infty$, $x\to\infty$)

2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则曲线 $y=f(x)$ 有铅垂渐近线 $x=x_0$.

(或 $x\to x_0^-$, $x\to x_0$)

例 1. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 的渐近线.



解 $\because \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=2$,

$\therefore\ y=2$ 为水平渐近线;

$\because \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=\infty$, $\therefore\ x=1$ 为铅垂渐近线.

3) 斜渐近线

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty) \\ (x\to\infty)}} [f(x)-(kx+b)]=0$, 则曲线 $y=f(x)$有

斜渐近线 $y=kx+b$.

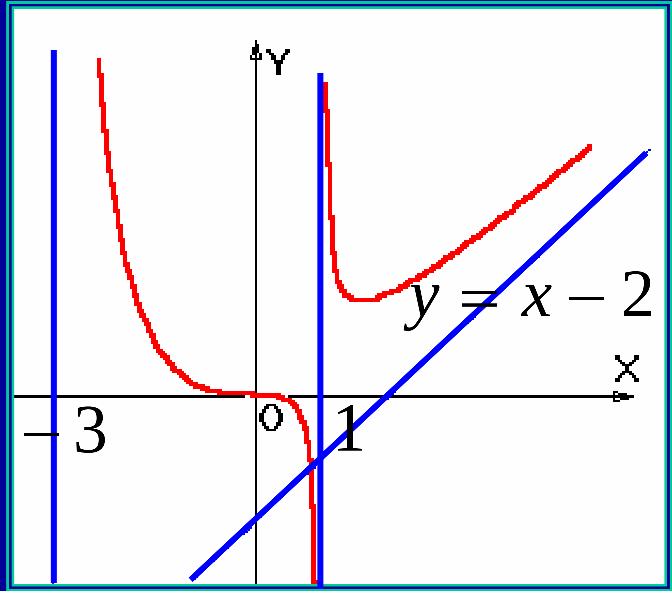
$$\because \lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0,$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]\cdot\frac{1}{x}=0,$$

$$\therefore k=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},$$ 由此得公式:

$$\boxed{k=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty) \\ (x\to\infty)}}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty) \\ (x\to\infty)}}[f(x)-kx]}$$

例2 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线.



解: 由 $y=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)}$ 可得:

$$\lim_{x\to -3} y=\infty, \quad \lim_{x\to 1} y=\infty,$$

所以有铅垂渐近线 $x=-3$ 及 $x=1$;

又因 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+2x-3}=1,$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2,$$

所以 $y=x-2$ 为曲线的斜渐近线.

例3 求 $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-4)}{2(x-1)}$ 的渐近线.

解 $\because \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty,$

$\therefore$ 曲线有铅垂渐近线 $x=1;$

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x-4)}{2x(x-1)}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+1)(x-4)}{2(x-1)}-\frac{x}{2}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x-4)-x(x-1)}{2(x-1)}=-1,$$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{2}x-1$ 为曲线的斜渐近线.

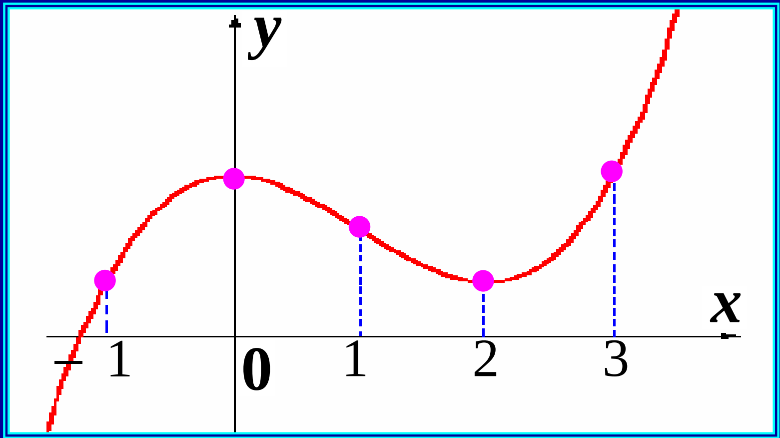
二、函数图形的描绘

步骤:

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域, 并考察其对称性及周期性;
2. 求 $f'(x)$, $f''(x)$, 并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为 0 和不存在的点;
3. 列表判别增减及凹凸区间, 求出极值和拐点;
4. 求渐近线;
5. 增添某些特殊点, 描绘函数图形.

例 4. 描绘 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$ 的图形.

解: 1) 定义域 $(-\infty,+\infty)$, 无对称性及周期性.



2) $y'=x^2-2x$, $y''=2x-2$,

令 $y'=0$, 得 $x=0$, 2,

令 $y''=0$, 得 $x=1$.

3)

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y		2		$\frac{4}{3}$		$\frac{2}{3}$	
		(极大)		(拐点)		(极小)	

4)

x	-1	3
y	$\frac{2}{3}$	2

例 5. 描绘函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解: 1) 定义域 $(-\infty,+\infty)$, 图形对称于 y 轴;

2) 求导数和二阶导数:

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\,e^{-\frac{x^2}{2}},\quad y''=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2),$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$; 令 $y''=0$ 得 $x=\pm1$;

3) 列表:

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	0	$+$
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	
	(极大)		(拐点)	

例 5. 描绘函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

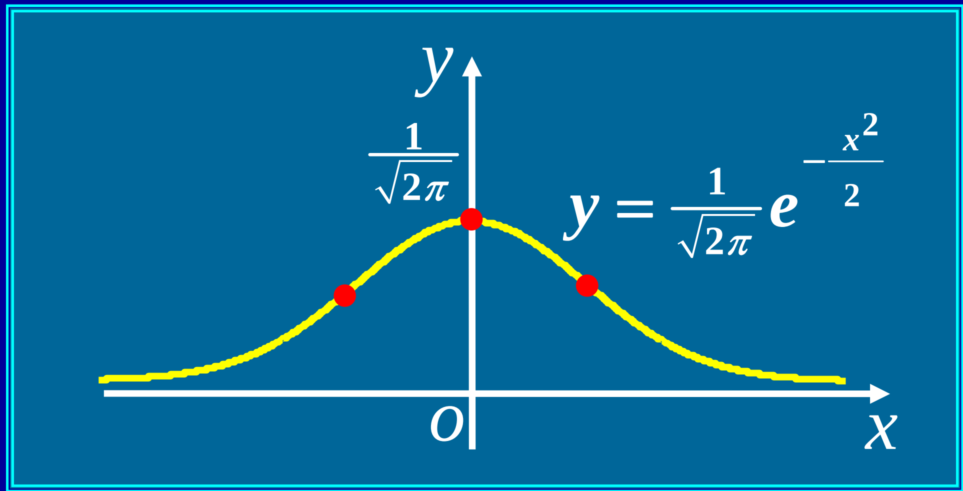
x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	0	$+$
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	
	(极大)		(拐点)	

4) 求渐近线:

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0,$$

$\therefore y=0$ 为水平渐近线;

5) 作图:



练 习

1. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ （ D ）

(A) 没有渐近线;

(B) 仅有水平渐近线;

(C) 仅有铅垂渐近线;

(D) 既有水平渐近线又有铅垂渐近线.

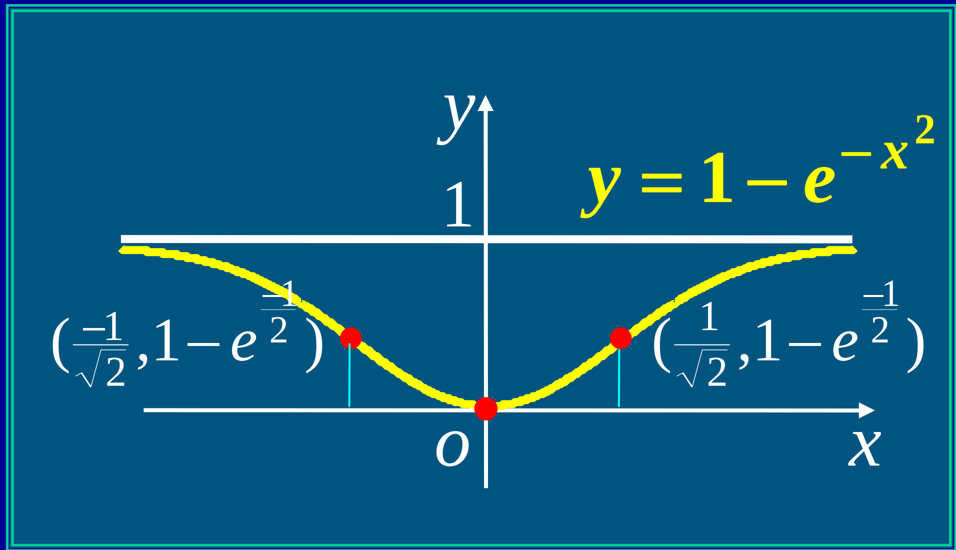
提示: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$

2. 曲线 $y=1-e^{-x^2}$ 的凹区间是 $\underline{[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]}$,

凸区间是 $\underline{(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}]\text{ 及 }[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)}$,

拐点为 $\underline{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-e^{\frac{-1}{2}})}$, 渐近线 $\underline{y=1}$,

曲线的图形为:



提示:

$y' = 2xe^{-x^2}$,

$y'' = 2e^{-x^2}(1-2x^2)$,

列表判断增减凹凸,

求渐近线.

作 业

习题3-6　1; 2.

总习题三　1; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 11(1)*; 12*; 13*; 14*; 17*.

下次课内容

第四章　不定积分

第一节　不定积分的概念与性质

第二节　换元积分法 (第一类换元法)

三、第三章小结

微分中值定理

费马(fermat)引理

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x)\text{在}\cup(x_0)\text{有定义,} \\ \text{且} f(x)\le f(x_0),\ f'(x_0)\text{存在} \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x_0)=0$$

(或 $\geq$)

罗尔(Rolle)定理 如果 $y=f(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

(3) $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.

复习

拉格朗日中值定理 设 $y = f(x)$ 满足:

(1)在闭区间$[a, b]$上连续,

(2)在开区间(a, b)内可导,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

推论 若函数 $f(x)$在区间 I 上满足 $f'(x) \equiv 0$,

则 $f(x)$在 I 上必为常数.

复习

柯西(Cauchy)中值定理

设 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a, b) 内可导,

(3) 在开区间 (a, b) 内 $F'(x) \neq 0$,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $\dfrac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

复习

洛必达法则

洛必达法则的一般形式：

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{F(x)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A\,(\infty)$$

其它不定型解决方法：

$$\infty-\infty \xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}} \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$$

$$0\cdot\infty \xrightarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}} \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$$

$$0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0 \xrightarrow[\text{转化}]{\text{取对数}} 0\cdot\infty$$

复习

洛必达法则的常用技巧:

技巧1 将极限存在且不为0的因子分离.

技巧2 结合等价无穷小.

技巧3 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 欲利用洛必达法则,

需转换成 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 后再用:

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=a$.

复习

单调性的判别

定理 1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导. 若在开区间 (a, b) 内 $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上单调递增 (递减).

注意:

1 如果把闭区间 $[a, b]$ 换成其它区间, 有类似结论.

2 单调区间的可能分界点: 驻点和导数不存在的点.

3 如果在某区间上 $f'(x) \geq 0$ (≤ 0), 且等号仅在有限个点(或一些离散的点)成立, 则函数在该区间上单增 (单减).

复习

曲线凹凸与拐点

定义. 设函数 $f(x)$在区间 I 上连续,

$\forall\ x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 \neq x_2$:

若恒有 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2}) < \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

则称曲线 $f(x)$是上凹(凹)的;

若恒有 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2}) > \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

则称曲线 $f(x)$是下凹(凸)的.

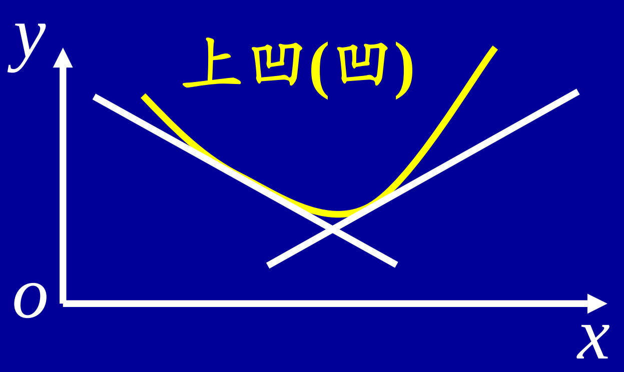
拐点 — 连续曲线上凹凸弧段的分界点.

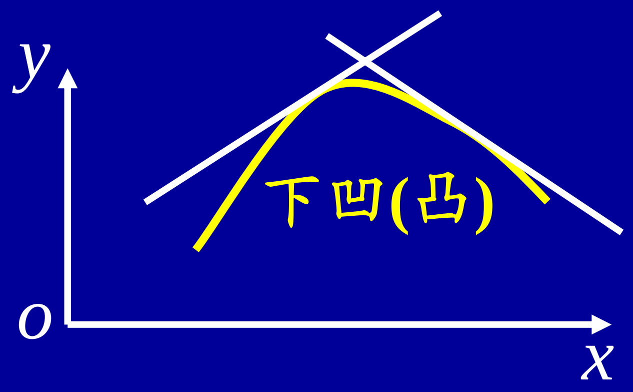
复习

定义’ 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,

(1) 若曲线弧位于其上任意一点的切线的上方,
则称曲线在区间 I 上是上凹(凹)的;

(2) 若曲线弧位于其上任意一点的切线的下方,
则称曲线在区间 I 上是下凹(凸)的.





复习

定理(凹凸判定法) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内有二阶导数，且 $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$)，则曲线 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是凹的 (凸的).

注意

1 如果把闭区间 $[a, b]$ 换成其它区间，有类似结论.

2 可能拐点 — 使二阶导数为零和不存在的点.

3 如果在某区间上 $f''(x) \geq (\leq) 0$，且等号仅在有限个点(或一些离散的点)成立，则曲线在该区间上是凹(凸)的.

复习

连续函数的极值

定义 $\forall\ x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$:

(1) 若恒有 $f(x) < f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大点,

称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值;

(2) 若恒有 $f(x) > f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的极小点,

称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值.

极大点与极小点统称为极值点;

极大值与极小值统称为极值.

复习

极值的判别方法

(1) 设函数在 x_0 取得极值且可导, 则 $f'(x_0)=0$.

(2) 可能极值点: 驻点和导数不存在的点.

(3) 第一充分条件: 设 $f(x)$ 在 x_0 连续,

$f'(x)$在 x_0 两侧邻近左正右负, 则 $f(x_0)$为极大值;

$f'(x)$在 x_0 两侧邻近左负右正, 则 $f(x_0)$为极小值.

(4) 第二充分条件:

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \Longrightarrow f(x_0)$为极大值;

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Longrightarrow f(x_0)$为极小值.

复习

连续函数的最值

求闭区间上连续函数最值的方法:

(1) 求 $f(x)$ 在 (a, b) 内的可能极值点

驻点和导数不存在的点: $x_1, x_2, \cdots, x_m$.

(2) 求最大值 M 和最小值 m

$$M = \max\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_m), f(a), f(b)\},$$

$$m = \min\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_m), f(a), f(b)\}.$$

复习

特别:

- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有一个可能极值点时,
  若在此点取极大 (小) 值 , 则也是最大 (小) 值.
- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调时, 最值必在端点处达到.
- 应用问题: 可以根据实际意义判别可能极值点
  是否为最大值点或最小值点.
- 利用三行表判断最值是一种很有效的方法.

复习

曲线渐近线的求法

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty) \\ (x\to\infty)}} f(x)=b$, 则曲线 $y=f(x)$有水平渐近线 $y=b$.

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+ \\ (x\to x_0^-) \\ (x\to x_0)}} f(x)=\infty$, 则曲线 $y=f(x)$有铅垂渐近线 $x=x_0$.

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty) \\ (x\to\infty)}} [f(x)-(kx+b)]=0$, 则曲线 $y=f(x)$有斜渐近线 $y=kx+b$,

其中 $k=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty) \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty) \\ (x\to\infty)}} [f(x)-kx]$.

复习

函数图形的描绘

步骤:

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域, 并考察其对称性及周期性;
2. 求 $f'(x)$, $f''(x)$, 并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为 0 和不存在的点;
3. 列表判别增减及凹凸区间, 求出极值和拐点;
4. 求渐近线;
5. 确定某些特殊点, 描绘函数图形.

第三章部分习题解答

T1. 证明等式 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1].$

证 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$，则在 $(-1, 1)$ 内

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

由推论可知 $f(x) = \arcsin x + \arccos x = C$ (常数),

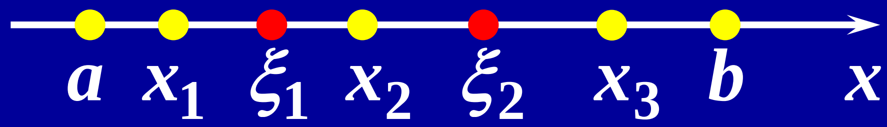
令 $x = 0$, 得 $C = \frac{\pi}{2}$, $\therefore \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in (-1, 1),$

又 $f(\pm 1) = \frac{\pi}{2}$，故 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1].$

T2. 如果方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x = 0$ 有一个正根 $x = x_0$, 证明 $a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

证 令 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x,\ x \in [0, x_0]$, 显然, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, x_0]$ 上连续, 在开区间 $(0, x_0)$ 内可导, 且 $f'(x) = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$, 并且 $f(0) = 0 = f(x_0) = 0$, 由罗尔定理, 存在 $\xi \in (0, x_0)$, 使 $f'(\xi) = 0$, 即 $a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

T3. 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中，$a<x_1<x_2<x_3<b$，证明：在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.



证 因为 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上连续，在开区间 (x_1,x_2) 内可导，$f(x_1)=f(x_2)$，由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(x_1,x_2)$，使 $f'(\xi_1)=0$. 同理，存在 $\xi_2\in(x_2,x_3)$，使 $f'(\xi_2)=0$.

因为 $F(x)=f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，在 (ξ_1,ξ_2) 内可导，$F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$，由罗尔定理，在 $(\xi_1,\xi_2)\subset(x_1,x_3)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

T4. 证明不等式: 当 $x>1$ 时, $e^x > e\cdot x$.

证　法1 令 $f(t)=e^t-et,\ t\in[1,x]$.

因为 $f(t)$ 在闭区间 $[1,x]$ 上连续, 在开区间 $(1,x)$ 内可导,

由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(1,x)$, 使

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1),$$

即 $$e^x-ex=(e^\xi-e)(x-1),\ \xi\in(1,x),$$

又因为 $$(e^\xi-e)(x-1)>0\quad(\because x>1,\ 1<\xi<x),$$

所以 $e^x-ex>0$, 即当 $x>1$ 时, $e^x>e\cdot x$.

法2 利用单调性(略).

T5. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间$[a, b]$上连续, 在开区间(a, b)内可导, 证明在(a, b)内有一点 ξ, 使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix} \tag{1}$$

证 [思路: (1)与

$$f(a)g(b)-f(b)g(a)=[f(a)g'(\xi)-f'(\xi)g(a)](b-a) \quad (2)$$

等价. 由此可构造函数并利用拉格朗日中值定理证明]

令 $F(x)=f(a)g(x)-f(x)g(a),\ x\in[a,b]$. 显然, 该函数在$[a, b]$ 上连续, 在(a, b)内可导,

$$F'(x)=f(a)g'(x)-f'(x)g(a)$$

所以, 在(a, b) 内有一点ξ, 使$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$, 即(2)式成立, 从而(1)式成立.

T6. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式

$$f'(x)=f(x),\ \text{且}\ f(0)=1,\ \text{则}\ f(x)=e^x.$$

证 令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

$$\because g'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=\frac{f(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=0,$$

$$\therefore g(x)=\frac{f(x)}{e^x}=C\ (\text{某常数}),\ x\in(-\infty,+\infty).$$

又: $g(0)=\dfrac{f(0)}{e^0}=1 \ \Rightarrow C=1,$

$$\therefore g(x)=\frac{f(x)}{e^x}=1,\ \text{即}\ f(x)=e^x,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

T7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$. $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}}$

解 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\tan 7x)^{-1}\cdot\sec^2 7x\cdot 7}{(\tan 2x)^{-1}\cdot\sec^2 2x\cdot 2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 2x\cdot\cos^2 2x\cdot 7}{\tan 7x\cdot\cos^2 7x\cdot 2}$$

$$=\frac{1\cdot 7}{1\cdot 2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 2x}{\tan 7x}$$

$$=\frac{7}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{7x}=1.$$

T8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{x})^{\tan x}$. $\boxed{\infty^0 \text{ 型}}$

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{x})^{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\tan x \ln\frac{1}{x}}$, $\boxed{\frac{\infty}{\infty} \text{ 型}}$

$\boxed{0\cdot\infty \text{ 型}}$ $\because \lim\limits_{x\to 0^+} \tan x \ln\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{\cot x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-1/x}{-\csc^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}\cdot \sin x = 0,$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x})^{\tan x} = e^0 = 1.$$

T9. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]^{1/x}, & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\le 0\end{cases}$

在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \overset{\boxed{1^\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln\left[\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$,

$\boxed{\frac{0}{0}\text{型}}$ $\because \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1/(1+x)-1}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{2(1+x)} = -\dfrac{1}{2}$, $\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e^{-1/2}$;

又 $\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-1/2} = e^{-1/2}$, $f(0)=e^{-1/2}$,

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

补充题 1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $\boxed{1^\infty \text{ 型}}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$;

解 $\text{原式}=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}[\ln(a^x+b^x+c^x)-\ln 3]}$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a^x+b^x+c^x)-\ln 3}{x}$ $\boxed{\dfrac{0}{0}\text{ 型}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c)}{a^x+b^x+c^x}}{1}$$

$$=\frac{\ln a+\ln b+\ln c}{3}=\ln(abc)^{1/3},$$

$\therefore$ $\text{原式}=e^{\ln(abc)^{1/3}}=(abc)^{1/3}$.

补充题 2. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\tan^2 x}$. $\boxed{1^{\infty}\text{型}}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\pi/2} e^{\tan^2 x\cdot\ln(\sin x)}$.

$\boxed{0\cdot\infty\text{型}}$

$\because \lim\limits_{x\to\pi/2}\tan^2 x\cdot\ln(\sin x)=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sin^2 x\cdot\ln(\sin x)}{\cos^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin^2 x\cdot\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}$ $\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

$=1\cdot\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos x}{-2\cos x\sin^2 x}=-\dfrac{1}{2}$,

$\therefore$ 原式 $=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.