第五节 函数的极值与最大值最小值

第三章 微分中值定理与导数的应用

主要内容

一、函数的极值及其求法

二、最大值与最小值问题

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

一、函数的极值及其求法

定义 $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$:

(1) 若恒有 $f(x) < f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大点,

称 $f(x_0)$ 为函数的极大值;

(2) 若恒有 $f(x) > f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的极小点,

称 $f(x_0)$ 为函数的极小值.

极大点与极小点统称为极值点;

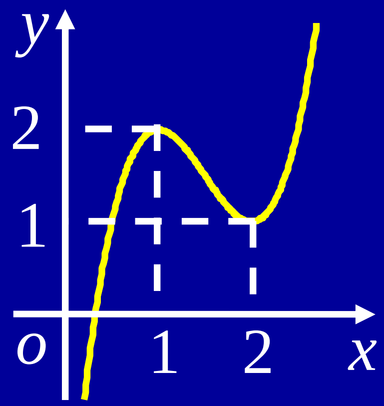
极大值与极小值统称为极值.

注: 极值与最值的定义有区别.

例如, $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$,

$x=1$ 为极大点，$f(1)=2$ 是极大值;

$x=2$ 为极小点，$f(2)=1$ 是极小值.



定理1. 设函数在 x_0 取得极值且可导, 则 $f'(x_0)=0$.

(由费马引理易证)

注意: 1) 函数的极值是函数的局部性质.

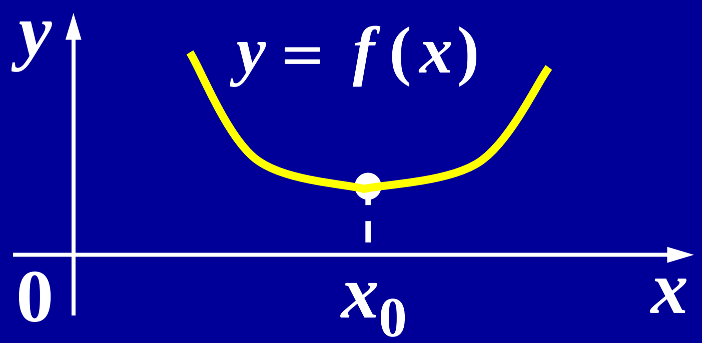
2) 对常见函数, 极值可能出现在导数为 0 或导数不存在的点.

定理2 (极值第一判别法)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 连续，且在 x_0 的某去心邻域内有导数, 当 x 在该去心邻域内取值时,

(1) $f'(x)$ "左正右负", 则 $f(x)$ 在 x_0 取极大值;

(2) $f'(x)$ "左负右正", 则 $f(x)$ 在 x_0 取极小值.



(自证)

例1 求函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 **1)** 求导数: $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}$.

2) 求可能极值点 (驻点和导数不存在的点):

令 $f'(x)=0$, 得 $x_1=\frac{2}{5}$; 又: $x_2=0$ 时导数不存在.

3) 列表判别:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不∃	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	连续	↘	连续	↗

$\therefore x=0$ 是极大点, 其极大值为 $f(0)=0$;

$x=\frac{2}{5}$ 是极小点, 其极小值为 $f(\frac{2}{5})=-0.33$.

定理3 (极值第二判别法) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，

(1) 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取极大值；

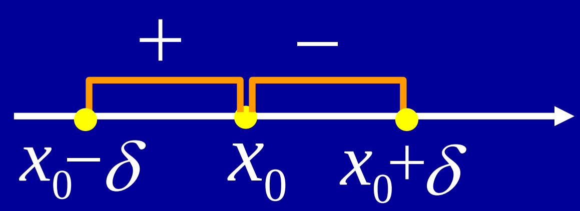
(2) 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取极小值.

证 (1) $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$

由 $f''(x_0)<0$ 知，存在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$，$\forall\, x\in\overset{\circ}{U}(x_0)$：$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$，

故当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$f'(x)<0$，



由第一判别法知 $f(x)$ 在 x_0 取极大值.

(2) 类似可证.

例2 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值 .

解 1) 求导数

$$f'(x)=6x(x^2-1)^2,\quad f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1).$$

2) 求驻点和不可导点

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1.$

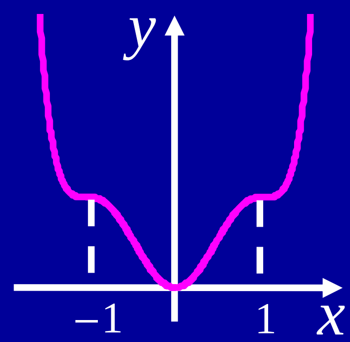
3) 判别

$\because\ f''(0)=6>0$, 故 $f(0)=0$ 为极小值;

又 $f''(-1)=f''(1)=0$, 故需用第一判别法判别:

$\because\ f'(x)$ 在 $x=\pm1$ 左右小邻域内不变号,

$\therefore\ f(x)$ 在 $x=\pm1$ 没有极值.



注 也可列表求极值.

例3 试问常数 a 为何值时，$f(x) = a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x = \frac{2}{3}\pi$ 处取得极值，指出它是极大值还是极小值，并求出该极值.

解 $\because$ $f'(x) = a\cos x + \cos 3x$，由题意应有

$$f'(\frac{2}{3}\pi) = a\cos(\frac{2}{3}\pi) + \cos 3(\frac{2}{3}\pi) = 0,$$

$\therefore$ $a = 2$;

又 $\because$ $f''(x) = -2\sin x - 3\sin 3x$，$f''(\frac{2}{3}\pi) < 0$,

$\therefore$ $f(x)$ 取得极大值 $f(\frac{2}{3}\pi) = \sqrt{3}$.

例4 设 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$, 则在点 a 处(**B**).

(A) $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a) \neq 0$;

(B) $f(x)$ 取得极大值;

(C) $f(x)$ 取得极小值;

(D) $f(x)$ 的导数不存在.

提示 利用极限的保号性和极值的定义.

例5 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0 (A).

(A) 取得极大值;

(B) 取得极小值;

(C) 在某邻域内单调增加;

(D) 在某邻域内单调减少.

提示: 将 $f(x)$ 代入方程，令 $x=x_0$，得

$$f''(x_0)=-4f(x_0)<0.$$

二、最大值与最小值问题

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则其最值通常在可能极值点或端点处达到.

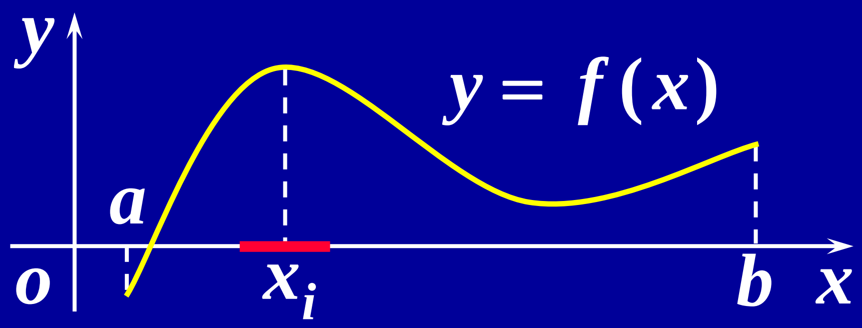
求闭区间上连续函数最值的方法:

(1) 求 $f(x)$ 在 (a,b) 内的可能极值点

驻点和导数不存在的点: $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m$.

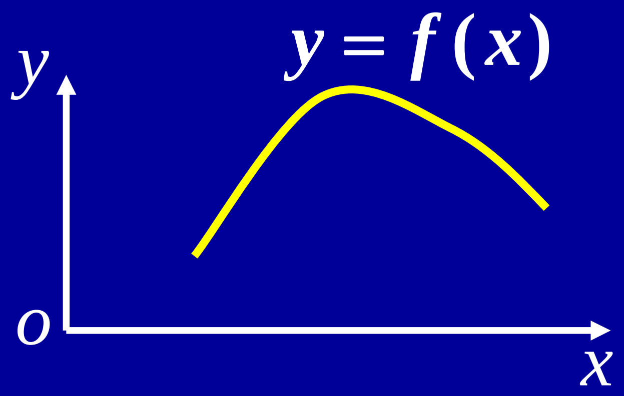
(2) 求最大值 M 和最小值 m

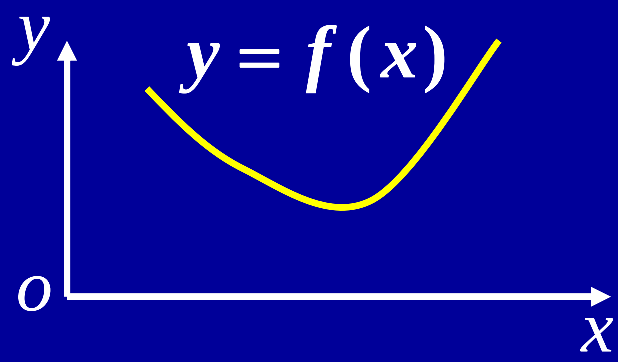
$$M=\max\{f(x_1), f(x_2),\ \cdots,\ f(x_m),\ f(a),\ f(b)\},$$
$$m=\min\{f(x_1), f(x_2),\ \cdots,\ f(x_m),\ f(a),\ f(b)\}.$$



特别:

- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有一个可能极值点时, 若在此点取极大(小)值, 则也是最大(小)值.





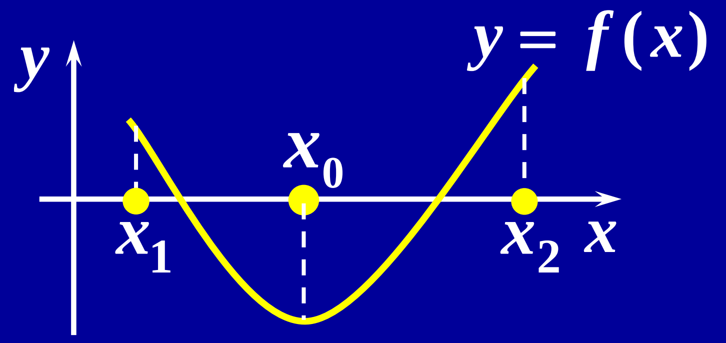
特别:

- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调时, 最值必在端点处达到.
- 应用问题: 可以根据实际意义判别可能极值点是否为最大值点或最小值点.

注 1 非闭区间最大值和最小值的求法:

利用极值和增减性分析求出.

注 2 怎样讨论方程有且仅有 2 个实根?



最大值与最小值问题的一个例子

RESEARCH ON THE INSPECTION POLICES OF 2-FAILURE-MODE SYSTEMS

Su Baohe

$$
\begin{aligned}
L=\{&R_1(\lambda_{23}-\lambda_{12})(\lambda_1+\lambda_{23})(1-e_1-\bar{q}e_2+\bar{q}e_3)+R_2\lambda_{12}[\lambda_{23}-\lambda_{12}-\\
&(q\lambda_1-\bar{q}\lambda_{12}+\lambda_{23})e_1+(q\lambda_1+\lambda_{12}-\bar{q}\lambda_{23})e_2+\bar{q}(\lambda_{23}-\lambda_{12})e_3]-\\
&E_1\lambda_1(\lambda_{23}-\lambda_{12})(\lambda_1+\lambda_{23})(1-e_1-\bar{q}e_2+\bar{q}e_3)-E_2\lambda_1\lambda_{12}[\lambda_{23}-\lambda_{12}-\\
&(q\lambda_1-\bar{q}\lambda_{12}+\lambda_{23})e_1+(q\lambda_1+\lambda_{12}-\bar{q}\lambda_{23})e_2+\bar{q}(\lambda_{23}-\lambda_{12})e_3]-\\
&E_3\lambda_{12}\lambda_{23}[\lambda_{23}-\lambda_{12}-(q\lambda_1-\bar{q}\lambda_{12}+\lambda_{23})e_1+(q\lambda_1+\lambda_{12}-\bar{q}\lambda_{23})e_2+\\
&\bar{q}(\lambda_{23}-\lambda_{12})e_3]-E_4q\lambda_{12}(\lambda_1+\lambda_{12})(\lambda_1+\lambda_{23})(e_1-e_2)-\\
&E_5\bar{p}(\lambda_{23}-\lambda_{12})(\lambda_1+\lambda_{12})(\lambda_1+\lambda_{23})(e_1-\bar{q}e_3)-\\
&E_6(\lambda_1+\lambda_{12})(\lambda_1+\lambda_{23})[\lambda_{23}e_1-\lambda_{12}e_2-\bar{q}(\lambda_{23}-\lambda_{12})e_3]\}/B
\end{aligned}
$$

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

例1 设 $f(x)=nx(1-x)^n,\ n\in\mathrm{N}^+$，试求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 $M(n)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)$.

解 $\because f'(x)=n(1-x)^n-nx\cdot n(1-x)^{n-1}$

$$=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x],$$

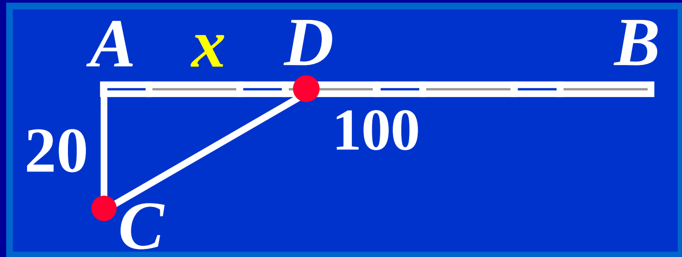
令 $f'(x)=0$，得 $(0,1)$ 内的唯一驻点 $x=\dfrac{1}{n+1}$,

x	$[0,\dfrac{1}{n+1})$	$\dfrac{1}{n+1}$	$(\dfrac{1}{n+1},1)$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	连续 最大	$\searrow$	连续

故所求最大值为 $M(n)=f(\dfrac{1}{n+1})=(\dfrac{n}{n+1})^{n+1}$,

$$\therefore \lim_{n\to\infty}M(n)=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{-(n+1)\cdot(-1)}=e^{-1}.$$

例2 铁路上 AB 段的距离为100 km，工厂 C 距 A 处20 km，$AC \perp AB$，要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修一条公路，已知铁路与公路每公里货运价之比为 3:5，为使货物从 B 运到工厂 C 的运费最省，问 D 点应如何选取？



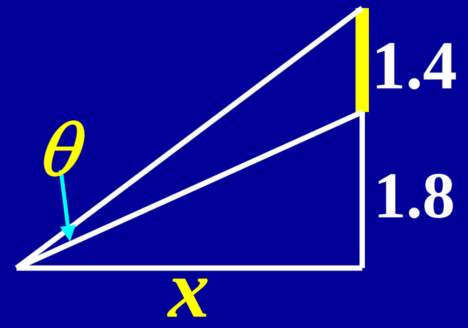
解 设 $AD = x$ (km)，则 $CD = \sqrt{20^2 + x^2}$，总运费

$$y = 5k\sqrt{20^2 + x^2} + 3k(100 - x) \quad (0 \le x \le 100),$$

$$y' = k\left(\frac{5x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3\right),\quad y'' = 5k\frac{400}{(400 + x^2)^{3/2}},$$

令 $y' = 0$，得 $x = 15$，$y''\big|_{x=15} > 0$，所以 $x = 15$ 为唯一的极小点，也是最小点，故 $AD = 15$ km 时运费最省.

例3 一张 1.4 m 高的图片挂在墙上，它的底边高于观察者的眼睛1.8 m，问观察者在距墙多远处看图才最清楚(视角 θ 最大)?



解 设观察者与墙的距离为 x m，则

$$\theta=\arctan\frac{1.4+1.8}{x}-\arctan\frac{1.8}{x},\ \ x\in(0,+\infty).$$

$$\theta'=\frac{-3.2}{x^2+3.2^2}+\frac{1.8}{x^2+1.8^2}=\frac{-1.4(x^2-5.76)}{(x^2+3.2^2)(x^2+1.8^2)},$$

令 $\theta'=0$，得驻点 $x=2.4\in(0,+\infty)$.

根据问题的实际意义，观察者最佳站位存在，可能极值点唯一，因此观察者站在距离墙 2.4m 处看图最清楚.

例4 证明: 当 $0 \le x \le 1,\ p > 1$ 时, $\dfrac{1}{2^{p-1}} \le x^p + (1-x)^p \le 1.$

证 令 $f(x) = x^p + (1-x)^p,\ x \in [0,1],\ p > 1.$

由初等函数的连续性, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

$f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1},\ x \in (0,1),$

令 $f'(x) = 0$, 解得驻点 $x_0 = 1/2,$

另外: $f(x)$ 无不可导点.

因为 $f(1/2) = 1/2^{p-1},\ f(0) = 1,\ f(1) = 1,$

所以 最大值 $M = f(0) = f(1) = 1,$

最小值 $m = f(1/2) = 1/2^{p-1},$

故当 $0 \le x \le 1,\ p > 1$ 时, $\dfrac{1}{2^{p-1}} \le x^p + (1-x)^p \le 1.$

例5 设船航行时单位时间的费用为 $a+kv^3$，其中 $a,k\ (>0)$ 是常数，v 为速度，且船匀速前进，求最经济的航速.

解 设总航程为 s，总费用为 y，则

$$y=\frac{s}{v}(a+kv^3),\ v>0.$$

$$y'=s\cdot\frac{2kv^3-a}{v^2},\ \text{令}\ y'=0,\ \text{解得}\ v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}},$$

v	$\left(0,\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}\right)$	$\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$	$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2k}},+\infty\right)$
$f'(v)$	$-$	0	$+$
$f(v)$	$\searrow$	连续	$\nearrow$

由上表可知，当航速 $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$ 时最经济.

例6 一公司有 50 套公寓出租. 当月租金为 1000 元时, 公寓会全部租出去. 当月租金每增加 50 元时, 就会多一套公寓租不出去. 而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费. 问房租定为多少时可获得最大收入?

解 设一套公寓月租金为 x, 则租出去的公寓套数为

$$50-(x-1000)/50$$

公司的净收入为

$$y=[50-(x-1000)/50](x-100),\ x\geq 1000,$$

$$y'=72-x/25,\ 令\ y'=0\Rightarrow x=1800,$$

x	$[1000,1800)$	1800	$(1800,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	连续	$\searrow$

由上表可知, $x=1800$ 时函数取得最大值, 即月房租定为 1800 元时可获得最大收入.

例7 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在闭区间$[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$上的最大值和最小值.

解: 易知 $f(x)\in C[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$, 且

$$f(x)=\begin{cases}-(2x^3-9x^2+12x), & -\frac{1}{4}\le x\le 0\\ 2x^3-9x^2+12x, & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2), & -\frac{1}{4}\le x<0\\ 6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2), & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$f(x)$在$[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$内有可能极值点 $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,$

$f(0)=0,\ f(1)=5,\ f(2)=4,\ f(-\frac{1}{4})=3\frac{19}{32},\ f(\frac{5}{2})=5,$

故函数在 $x=0$ 取最小值0; 在 $x=1$ 及 $\frac{5}{2}$ 取最大值5.

作 业

习题3-5 1(1,2,5,7,10); 2; 3; 4(2,3);
5; 6; 8; 9; 10; 13*; 15*.

下次课内容

第六节 函数图形的描绘

第三章 小结

内容小结

1. 连续函数的极值

定义 $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$:

(1) 若恒有 $f(x) < f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大点,

称 $f(x_0)$ 为函数的极大值;

(2) 若恒有 $f(x) > f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的极小点,

称 $f(x_0)$ 为函数的极小值.

极大点与极小点统称为极值点;

极大值与极小值统称为极值.

内容小结

2. 极值的判别方法

(1) 设函数在 x_0 取得极值且可导, 则 $f'(x_0)=0$.

(2) 可能极值点: 驻点和导数不存在的点.

(3) 第一充分条件: 设 $f(x)$ 在 x_0 连续,

$f'(x)$在 x_0 两侧邻近左正右负, 则 $f(x_0)$为极大值;

$f'(x)$在 x_0 两侧邻近左负右正, 则 $f(x_0)$为极小值.

(4) 第二充分条件:

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \Longrightarrow f(x_0)$为极大值;

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Longrightarrow f(x_0)$为极小值.

内容小结

3. 连续函数的最值

求闭区间上连续函数最值的方法:

(1) 求 $f(x)$ 在 (a, b) 内的可能极值点

驻点和导数不存在的点: $x_1, x_2, \cdots, x_m$.

(2) 求最大值 M 和最小值 m

$$M = \max\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_m), f(a), f(b)\},$$

$$m = \min\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_m), f(a), f(b)\}.$$

特别:

- 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上只有一个可能极值点时,
  若在此点取极大(小)值, 则也是最大(小)值.
- 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调时, 最值必在端点处达到.
- 应用问题: 可以根据实际意义判别可能极值点
  是否为最大值点或最小值点.
- 列表法是判断最大值点或最小值点的有效方法.