第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性

主要内容

一、函数单调性的判定法

二、曲线的凹凸性与拐点

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

一、函数单调性的判定法

定理1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导. 若在开区间 (a, b) 内 $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上单调递增 (递减).

注 如果把闭区间 $[a, b]$ 换成其它区间, 有类似结论.

证 设 $f'(x) > 0$. 任取 $x_1, x_2 \in [a, b]$ (不妨设 $x_1 < x_2$), $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理条件, 所以

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$$

$$\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$$

故 $f(x_1) < f(x_2)$, 这说明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增.

$f'(x) < 0$ 时类似可证.

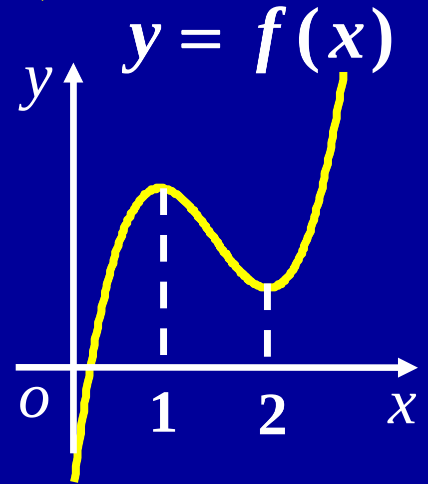
证毕

例1 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2),$

令 $f'(x)=0$, 得 $x_1=1$, $x_2=2$.

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	连续	$\searrow$	连续	$\nearrow$



故 $f(x)$ 的单增区间为 $(-\infty,1]$, $[2,+\infty)$;

$f(x)$ 的单减区间为 $[1,2]$.

注意:

1) 单调区间的分界点除驻点外, 也可是导数不存在的点.

例如,

$y=\sqrt[3]{x^2},\ x\in(-\infty,+\infty)$

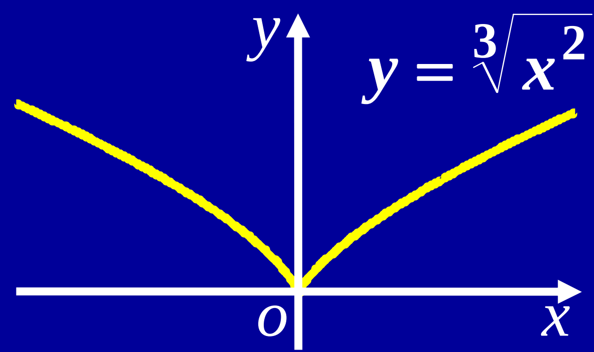
$y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}},$

$y'\big|_{x=0}$ 不存在.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	不$\exists$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	连续	$\nearrow$

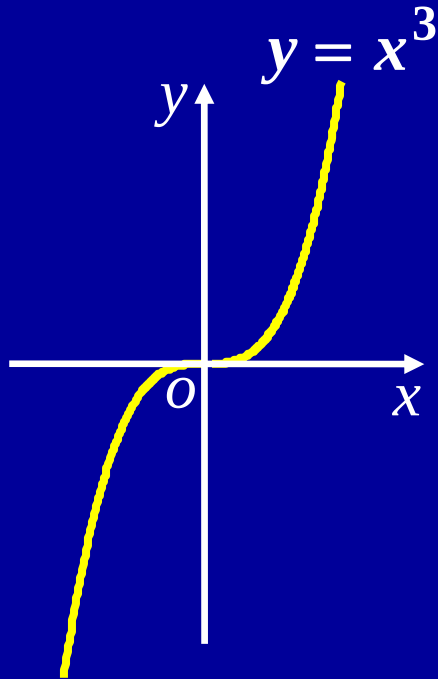
故 $f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,0]$,

$f(x)$的单调递增区间为$[0,+\infty)$.



注意:

2) 如果在某区间上 $f'(x) \geq 0$ (≤ 0), 且等号仅在有限个点 (或一些离散的点) 成立, 则函数在该区间上单增(单减).



例如, $y = x^3,\ x \in (-\infty, +\infty)$,

$y' = 3x^2 \geq 0$, 且仅当 $x = 0$ 时 $y'\big|_{x=0} = 0$,

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为$(-\infty, +\infty)$.

例2 证明 $x - \tan x < 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

证 令 $\varphi(x) = x - \tan x$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 连续,

$$\varphi'(x) = 1 - \sec^2 x$$

$$= -\tan^2 x < 0, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$\therefore\ \varphi(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 单减,

$\therefore\ \varphi(x) < \varphi(0) = 0,$

即 $x - \tan x < 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

例3 证明当 $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ 时, 成立不等式 $\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi}$.

证 (自证) 令 $f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi}$,

则 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内可导,

且 $f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}\underline{(x - \tan x)} < 0$

因此 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 内单调递减,

因此 $f(x) \ge f(\frac{\pi}{2}) = 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}]$,

从而当 $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ 时, 成立不等式 $\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi}$.

例4 证明方程 $x = \cos x$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 内有唯一实根.

证 令 $f(x) = x - \cos x,\ x \in [0, \pi/2]$.

① 因为 $f(x)$ 在 $[0, \pi/2]$ 连续, $f(0)f(\pi/2) = -1 \cdot \pi/2 < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \pi/2)$ 内至少有一个零点;

② 因为 $f'(x) = 1 + \sin x > 0,\ x \in (0, \pi/2)$, 所以 $f(x)$ 在

$(0, \pi/2)$ 单增, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \pi/2)$ 内最多有一个零点.

综合 ① ② 可知, $y = f(x)$ 在 $(0, \pi/2)$ 内有唯一零点,

即原方程在 $(0, \pi/2)$ 内有唯一实根. 证毕

例5 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$, 则 $f'(0)$, $f'(1)$, $f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 (**B**)

(A) $\quad f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

(B) $\quad f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $\quad f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

(D) $\quad f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

提示: 利用 $f'(x)$ 单调增加, 及

$$f(1)-f(0)=f'(\xi)\ \ (0<\xi<1)$$

二、曲线的凹凸性与拐点

定义. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，

$\forall\, x_1, x_2 \in I$，且 $x_1 \neq x_2$，

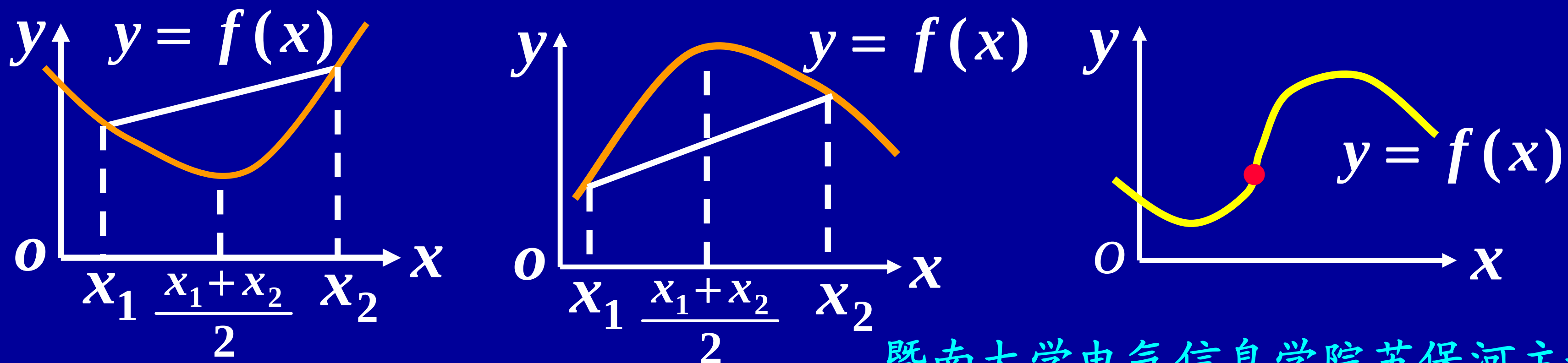
(1) 若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，

则称 $f(x)$ 的图形是上凹(凹)的；

(2) 若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，

则称 $f(x)$ 的图形是下凹(凸)的.

连续曲线上凹凸弧段的分界点称为拐点.



暨南大学电气信息学院苏保河主讲

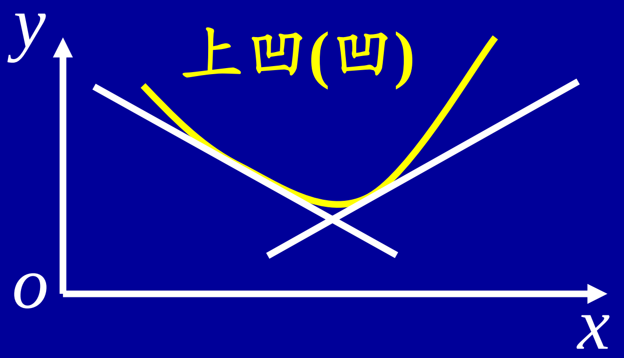
定义' 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,

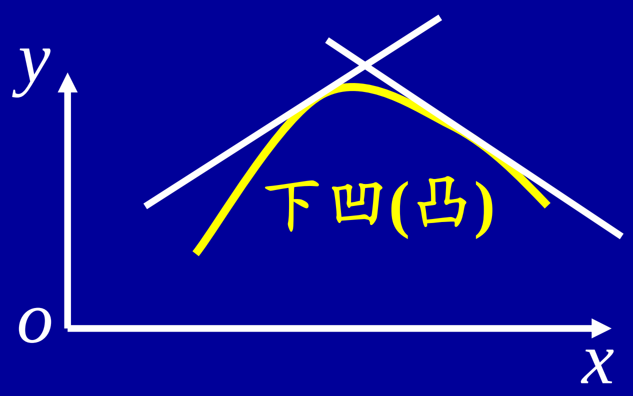
(1) 若曲线弧位于其上任意一点的切线的上方,

则称曲线在区间 I 上是上凹(凹)的;

(2) 若曲线弧位于其上任意一点的切线的下方,

则称曲线在区间 I 上是下凹(凸)的.





定理 (凹凸判定法) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内有二阶导数，且 $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$)，则曲线 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是凹的 (凸的).

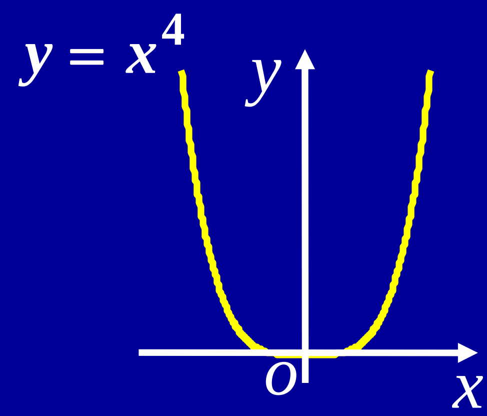
注 如果把闭区间 $[a, b]$ 换成其它区间，有类似结论.

证 略(有兴趣者看书)

注 如果在某区间上 $f''(x) \geq 0$, 并且等号仅在有限个点(或一些离散的点) 成立, 则曲线在该区间上是凹的;

如果在某区间上 $f''(x) \leq 0$, 并且等号仅在有限个点(或一些离散的点) 成立, 则曲线在该区间上是凸的.

例1 判断曲线 $y = x^4$ 的凹凸性.



解 $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$,

当 $x \neq 0$ 时, $y'' > 0$; $x = 0$ 时, $y'' = 0$,

故曲线 $y = x^4$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的.

注意:

根据拐点的定义及上述定理, 可得**拐点的判别法**如下:

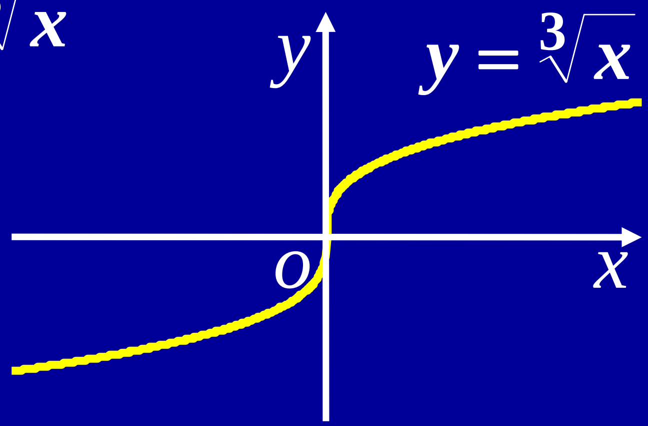
若曲线 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续, $f''(x_0) = 0$ 或者不存在, 并且 $f''(x)$ 在 x_0 两侧**异号**, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点.

例2 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点和凹凸区间.

解 $y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $y''=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, $x\neq 0$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y''	$+$	不存在	$-$
y	$\cup$	连续	$\cap$

因此点$(0, 0)$为曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点, 曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在$(-\infty,0]$是凹的, 在$[0,+\infty)$是凸的.



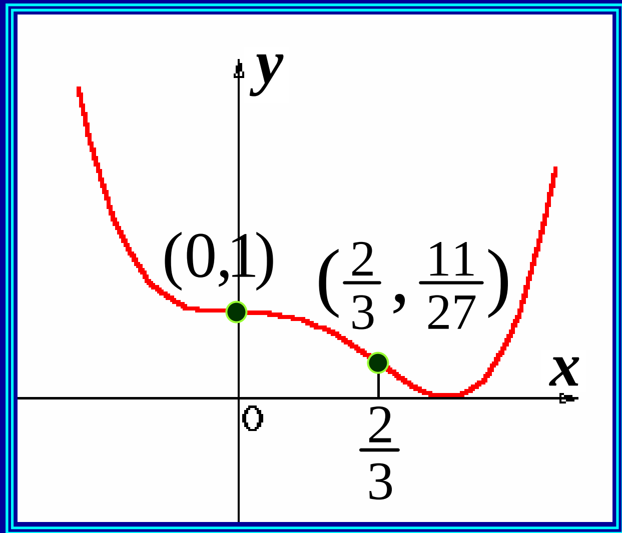
例3 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的凹凸区间及拐点.

解 1) 求 y'': $y'=12x^3-12x^2$,

$y''=36x^2-24x=36x(x-\frac{2}{3})$.

2) 求可能拐点坐标: 令 $y''=0$, 得

$x_1=0,\ x_2=\frac{2}{3}$, 对应 $y_1=1,\ y_2=\frac{11}{27}$.



3) 列表判别

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$	连续	$\cap$	连续	$\cup$

故该曲线在 $(-\infty,0]$ 及 $[\frac{2}{3},+\infty)$ 上凹, 在 $[0,\frac{2}{3}]$ 上凸,

点 $(0,1)$ 及 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$ 均为拐点.

例4 证明 $\dfrac{e^x+e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$, $x \neq y$.

证 令 $f(t)=e^t$, $t \in (-\infty, +\infty)$,

则 $f'(t)=e^t$, $f''(t)=e^t > 0$,

所以曲线 $f(t)=e^t$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是凹的,

故当 $x \neq y$ 时,

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

即 $$\frac{e^x+e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}, \quad x \neq y.$$

例5 曲线 $y=1-e^{-x^2}$ 的凹区间是 $\underline{[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]}$；

凸区间是 $\underline{(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}]\text{ 及 }[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)}$；单调减少区间是

$\underline{(-\infty, 0]}$；单调增加区间是 $\underline{[0, +\infty)}$；

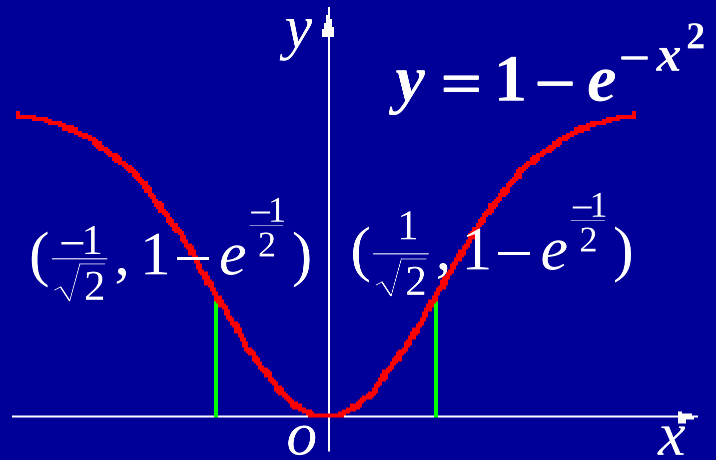
拐点为 $\underline{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-e^{\frac{-1}{2}})}$.

提示：求导数列表判别.

$$y'=2xe^{-x^2},$$

$$y''=2e^{-x^2}(1-2x^2)$$

$$=2e^{-x^2}(1+\sqrt{2}x)(1-\sqrt{2}x).$$



作 业

习题3-4 2; 3(1,4,7,8); 5(2,4,5); 6*; 8(4);
9(2,4,6); 10(1,3*); 11*; 13*; 14.

下次课内容

第五节 函数的极值与最大值最小值

内容小结

一、单调性的判别

定理 1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导. 若在开区间 (a, b) 内 $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上单调递增 (递减).

注意:

1 如果把闭区间 $[a, b]$ 换成其它区间, 有类似结论.

2 单调区间的可能分界点: 驻点和导数不存在的点.

3 如果在某区间上 $f'(x) \geq 0$ (≤ 0), 且等号仅在有限个点(或一些离散的点)成立, 则函数在该区间上单增 (单减).

二、曲线凹凸与拐点

定义. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,

$\forall\, x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 \neq x_2$:

若恒有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) < \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

则称曲线 $f(x)$ 是上凹(凹)的;

若恒有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) > \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

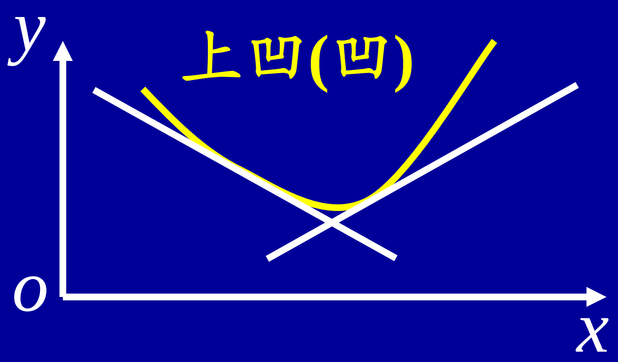
则称曲线 $f(x)$ 是下凹(凸)的.

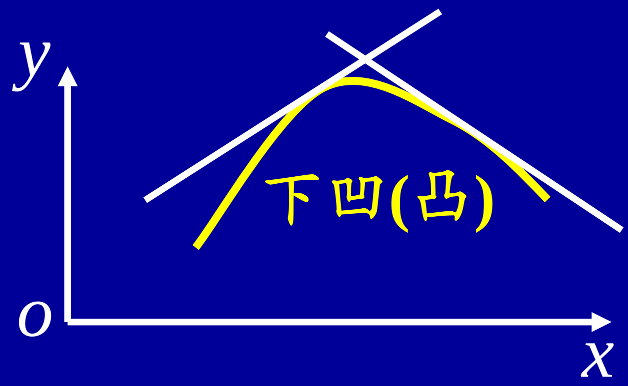
拐点 — 连续曲线上凹凸弧段的分界点.

定义' 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，

(1) 若曲线弧位于其上任意一点的切线的上方，则称曲线在区间 I 上是上凹(凹)的；

(2) 若曲线弧位于其上任意一点的切线的下方，则称曲线在区间 I 上是下凹(凸)的.





定理(凹凸判定法) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有二阶导数，且 $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$)，则曲线 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是凹的 (凸的).

注意

1 如果把闭区间 $[a,b]$ 换成其它区间，有类似结论.

2 可能拐点 — 使二阶导数为零和不存在的点.

3 如果在某区间上 $f''(x)\geq(\leq)0$，且等号仅在有限个点(或一些离散的点)成立，则曲线在该区间上是凹(凸)的.

部分习题解答

T1. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$

在 $x=0$ 的连续性和可导性.

解　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$,

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续;

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在,

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导.