第三节 泰勒 (Taylor) 公式

主要内容

一、泰勒公式

二、几个函数的麦克劳林公式

三、泰勒公式的应用

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

泰勒 (1685 – 1731)

英国数学家，他早期是牛顿学派最优秀的代表人物之一，重要著作有：

《正的和反的增量方法》(1715)

《线性透视论》(1719)

泰勒．B

他在1712 年就得到了现代形式的泰勒公式.

一、泰勒 (Taylor) 公式

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数,则在该邻域内有:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

此式称为 $f(x)$ 的 **n 阶泰勒公式**,其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ (\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

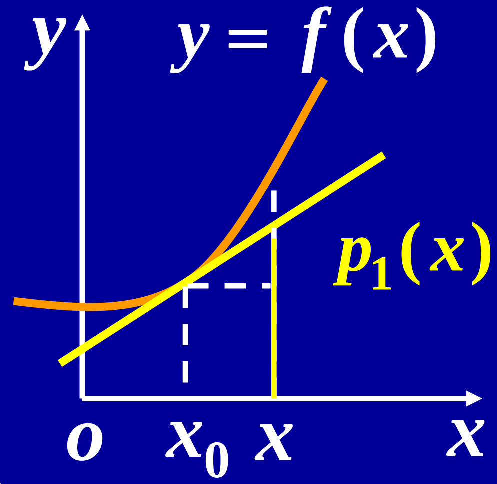
称为**拉格朗日余项**,$\xi=x_0+\theta(x-x_0)\ (0<\theta<1)$.

泰勒公式的建立:

在微分中有近似公式: $\Delta y \approx \mathrm{d}\,y = f'(x_0)\Delta x$

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{p_1(x)}$$

x 的一次多项式



以直代曲

特点: $p_1(x_0) = f(x_0)$

$p_1'(x_0) = f'(x_0)$

需要解决的问题 $\begin{cases} \text{如何提高精度?} \\ \text{如何估计误差?} \end{cases}$

令 $f(x) = \underbrace{p_n(x)}_{n\text{次多项式}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{余项}}$

1. 求 n 次近似多项式 $p_n(x)$, 要求:

$$p_n(x_0)=f(x_0),\ p_n'(x_0)=f'(x_0),\ \cdots,\ p_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$$

令 $p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$

则 $p_n'(x)=\quad a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}$

$p_n''(x)=\quad 2!a_2+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$

$\cdots\cdots$

$p_n^{(n)}(x)=\quad n!a_n$

$$a_0=p_n(x_0)=f(x_0),\ a_1=p_n'(x_0)=f'(x_0)$$

$$a_2=\frac{1}{2!}p_n''(x_0)=\frac{1}{2!}f''(x_0),\ \cdots,\ a_n=\frac{1}{n!}p_n^{(n)}(x_0)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

故 $p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

2. 余项估计

令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$（称为余项），则有

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

利用柯西中值定理
$f(t) = R_n(t),\ F(t) = (t-x_0)^{n+1}$

$$= \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - 0} = \frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} \quad (\xi_1 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$= \frac{R_n'(\xi_1) - R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n - 0} = \frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2 - x_0)^{n-1}} \quad (\xi_2 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间})$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{R_n^{(n)}(\xi_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)\cdots 2(\xi_n - x_0) - 0} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$\because p_n^{(n+1)}(x) = 0, \ \therefore R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

$$\therefore R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

当在 x_0 的某邻域内 $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le M$ 时

$$\left| R_n(x) \right| \le \frac{M}{(n+1)!} \left| x - x_0 \right|^{n+1}$$

$$\therefore R_n(x) = o[(x-x_0)^n] \quad (x \to x_0)$$

泰勒 (Taylor) 公式:

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数,则在该邻域内有:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

此式称为 $f(x)$ 的 **n 阶泰勒公式**, 其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ (\xi\text{ 在 }x\text{ 与 }x_0\text{ 之间})$$

称为**拉格朗日余项**, $\xi=x_0+\theta(x-x_0)\ (0<\theta<1)$.

泰勒 (Taylor) 公式:

注意到 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$,

在不需要余项的精确表达式时，泰勒公式可写为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o[(x-x_0)^n],$$

$o[(x-x_0)^n]$ 称为 n 阶泰勒公式的佩亚诺(Peano)余项.

$f(x)$ 的 n 阶泰勒公式: $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ $(0 < \theta < 1)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

特例:

(1) 当 $n = 0$ 时, 泰勒公式 给出拉格朗日中值定理

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

(2) 当 $n = 1$ 时, 泰勒公式变为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

$f(x)$ 的 **n 阶泰勒公式:** $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)\ (0 < \theta < 1)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

在泰勒公式中若取 $x_0 = 0,\ \xi = \theta x\ (0 < \theta < 1)$, 则有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

称为**麦克劳林 (Maclaurin) 公式.**

麦克劳林 (1698 – 1746)

英国数学家, 主要著作有:

《流数论》(1742)

《有机几何学》(1720)

《代数论》(1742)

在第一本著作中给出了后人以他的名字命名的麦克劳林级数.

二、几个函数的麦克劳林公式

例1. $f(x)=e^x$.

解: $\because\ f^{(k)}(x)=e^x,\quad f^{(k)}(0)=1\ (k=1,2,\cdots),$

$$\therefore\ e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$$0<\theta<1.$$

麦克劳林（Maclaurin）公式:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

例2. $f(x)=\sin x.$

解: $\because\ f^{(k)}(x)=\sin(x+\frac{k\pi}{2}),$

$$f^{(k)}(0)=\sin\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}0, & k=2m,\\ (-1)^{m-1}, & k=2m-1,\end{cases}\quad (m=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x),$$

其中 $R_{2m}(x)=\dfrac{(-1)^m\cos(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1},\ (0<\theta<1)$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

例3. $f(x)=\cos x.$

解：类似可得

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+R_{2m+1}(x)$$

其中

$$R_{2m+1}(x)=\frac{(-1)^{m+1}\cos(\theta x)}{(2m+2)!}x^{2m+2},\ (0<\theta<1)$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

例4. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$，$x>-1$.

解：$\because f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$,

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1),\ k=1,2,\cdots$$

$$\therefore (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\,!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n\,!}x^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)\,!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$,

$0<\theta<1.$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)\,!}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

例5. $f(x)=\ln(1+x),\ x>-1.$

解：自算

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k},\ k=1,2,\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}},\ 0<\theta<1.$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

三、泰勒公式的应用

1. 在近似计算中的应用

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1,$$

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

误差 $\left|R_n(x)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1},$

M 为 $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ 在包含 $0, x$ 的某区间上的上界.

例6. 计算无理数 e 的近似值, 使误差不超过 10^{-6}.

解: 已知 e^x 的麦克劳林公式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1.$$

令 $x = 1$, 得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1,$$

由于 $0 < e^{\theta} < e < 3$, 欲使

$$\left| R_n(1) \right| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6},$$

由计算可知当 $n = 9$ 时上式成立,

因此 $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} = 2.718281.$

2. 利用泰勒公式求极限

例7. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

用洛必达法则不方便!

解: 用泰勒公式.

$$\sqrt{3x+4}=2(1+\tfrac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2[\,1+\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{3}{4}x)+\tfrac{1}{2!}\cdot\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)\,(\tfrac{3}{4}x)^2+o(x^2)]$$

$$=2+\tfrac{3}{4}x-\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}x^2+o(x^2),$$

$$\sqrt{4-3x}=2(1-\tfrac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=2-\tfrac{3}{4}x-\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}x^2+o(x^2),$$

$$\therefore\ \text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{9}{16}x^2+o(x^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{9}{16}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=-\frac{9}{32}.$$

例8. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解: $\because\ e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2!}x^4+o(x^4)$,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5),$$

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{(\frac{1}{2!}+2\cdot\frac{1}{4!})x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{12}.$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$$

3. 利用泰勒公式证明不等式

例4. 证明 $\sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8},\ x>0.$

证: $\because\ \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2+$$

$$\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3,$$

$$= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\underbrace{\frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3}_{\boxed{>0}},\quad 0<\theta<1,$$

$$\therefore\ \sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8},\ x>0.$$

内容小结

1. 泰勒 (Taylor) 公式

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数, 则在该邻域内有:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = o[(x-x_0)^n]$$

拉格朗日余项

佩亚诺(Peano)余项

ξ 在 x 与 x_0 之间, $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$ $(0<\theta<1)$.

2. 麦克劳林 (Maclaurin) 公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n).$$

3. 常用麦克劳林 (Maclaurin) 公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{(-1)^m \cos(\theta x)}{(2m+1)!} x^{2m+1}, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{(-1)^{m+1} \cos(\theta x)}{(2m+2)!} x^{2m+2}, \quad 0 < \theta < 1,$$

3. 常用麦克劳林(Maclaurin)公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+$$

$$\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}},\ 0<\theta<1,$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

4. 泰勒公式的应用

1) 泰勒公式在近似计算中的应用

2) 利用泰勒公式求极限

3) 利用泰勒公式证明不等式

作业

习题3-3　1; 2; 4; 5; 7; 9; 10.

下次课内容

第五节　函数的极值与最大值最小值