第二节
洛必达法则

主要内容

洛必达法则

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

洛必达法则

洛必达(1661 – 1704)

洛必达，G.-F.-A. de

法国数学家，他著有《无穷小分析》(1696)，在该书中提出了“洛必达法则”.

他在15岁时，就解决了帕斯卡提出的摆线难题，以后又解出了伯努利提出的“最速降线”问题，他去世后的1720年，出版了他的关于圆锥曲线的书.

定理 1 如果 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} F(x) = 0,$

2) $f(x)$ 与 $F(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 内可导, 且 $F'(x) \neq 0,$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为 ∞),

则 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}.$ (洛必达法则)

定理条件：1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} F(x) = 0$

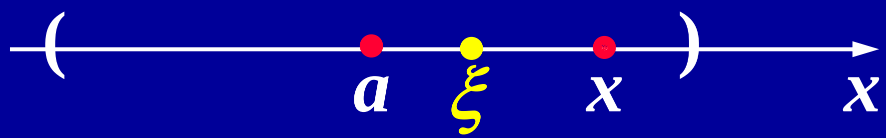
2) $f(x)$与$F(x)$在$\mathring{U}(a)$内可导，且$F'(x) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在（或为$\infty$） $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$

证：不妨设 $f(a) = F(a) = 0$. $\forall\, x \in \mathring{U}(a)$, $x \neq a$,

则 $f(x), F(x)$ 在以 a, x 为端点的区间上满足

柯西定理条件，



$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{F(x) - F(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad (\xi \text{在 } a, x \text{ 之间}),$$

$$= \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

证毕

定理 1 如果 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0,$

2) $f(x)$ 与 $F(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(a)$ 内可导, 且 $F'(x)\neq 0,$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为 ∞),

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$. (洛必达法则)

推论 定理 1 中 $x\to a$ 换为

$x\to a^{+},\ x\to a^{-},\ x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty,$

条件 2) 作相应的修改, 相应结果仍然成立.

应用洛必达法则的一个例子

RESEARCH ON THE INSPECTION POLICES OF 2-FAILURE-MODE SYSTEMS

Baohe Su

$$A_1=\lim_{t\to\infty}A_1(t)=\lim_{s\to 0}sA_1^*(s)$$

$$=(\lambda_{22}-\lambda_{21})\lambda_{122}(1-e_{10})(1-q_2e_{20})$$

$$\div\{p_2(\lambda_{22}-\lambda_{21})\lambda_{121}\lambda_{122}\beta^{-1}+\lambda_{122}[p_2\lambda_{22}-\lambda_{121}(q_2\lambda_{21}+p_2\lambda_{22})\beta^{-1}](1-e_{10})$$

$$+\lambda_{121}[-p_2\lambda_{21}+\lambda_{122}(p_2\lambda_{21}+q_2\lambda_{22})\beta^{-1}](1-e_{20})$$

$$+q_2[\lambda_{22}\lambda_{122}-\lambda_{21}\lambda_{121}-(\lambda_{22}-\lambda_{21})\lambda_{121}\lambda_{122}\beta^{-1}](1-e_{10})(1-e_{20})$$

$$+\lambda_1(\lambda_{22}-\lambda_{21})\lambda_{122}(1-e_{10})(1-q_2e_{20})\mu_1^{-1}$$

$$+\lambda_1\lambda_{21}[p_2\lambda_{122}(1-e_{10})-p_2\lambda_{121}(1-e_{20})+q_2(\lambda_{22}-\lambda_{21})(1-e_{10})(1-e_{20})]\mu_2^{-1}$$

$$+\lambda_{21}\lambda_{22}[p_2\lambda_{122}(1-e_{10})-p_2\lambda_{121}(1-e_{20})+q_2(\lambda_{22}-\lambda_{21})(1-e_{10})(1-e_{20})]\mu_3^{-1}$$

$$+p_2\lambda_{21}\lambda_{121}\lambda_{122}(e_{10}-e_{20})\mu_4^{-1}+q_1(\lambda_{22}-\lambda_{21})\lambda_{121}\lambda_{122}e_{10}(1-q_2e_{20})\mu_5^{-1}\}$$

例1. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

$\dfrac{0}{0}$型

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}.$

注意：不是未定式不能用洛必达法则！

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}\neq\lim_{x\to 1}\frac{6}{6}=1$$

例2. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$. $\boxed{\frac{0}{0}\text{型}}$

解: (自算)

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=1.$$

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}$

思考: 如何求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan n}{\frac{1}{n}}$?

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=a$.

例3. 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan n}{\frac{1}{n}}$.

解: $\because \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\ \boxed{\frac{0}{0}\text{型}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = 1,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan n}{\frac{1}{n}} = 1.$$

定理 2 如果 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=\infty$,

2) $f(x)$ 与 $F(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 内可导, 且 $F'(x)\neq 0$,

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为 ∞),

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$. (洛必达法则)

证: 略

说明 定理中 $x \to a$ 换为

$x \to a^{+}$, $x \to a^{-}$,

$x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$,

条件2)作相应的修改，相应结果仍然成立.

注： 洛必达法则的一般形式:

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{F(x)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{F'(x)} = A\,(\infty)$$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

解：令 $t=\dfrac{1}{x^2}$，则

$$\text{原式}=\lim_{t\to+\infty}t^{50}e^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t}\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}$$

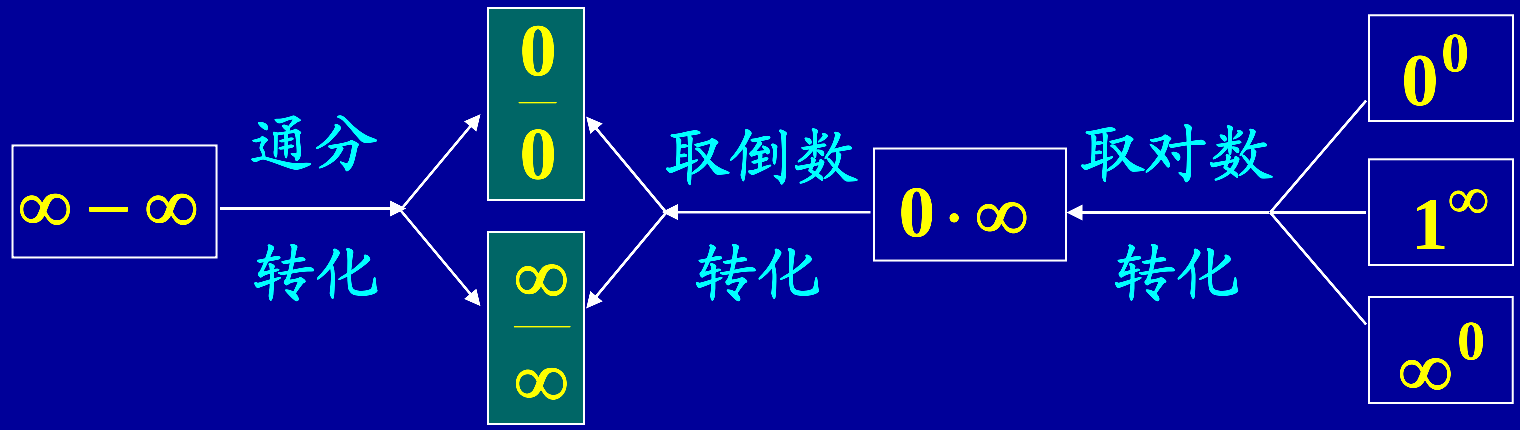
(用洛必达法则)

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{50t^{49}}{e^t}\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{50\cdot 49t^{48}}{e^t}\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}$$

(继续用洛必达法则)

$$=\cdots=\lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t}=0.$$

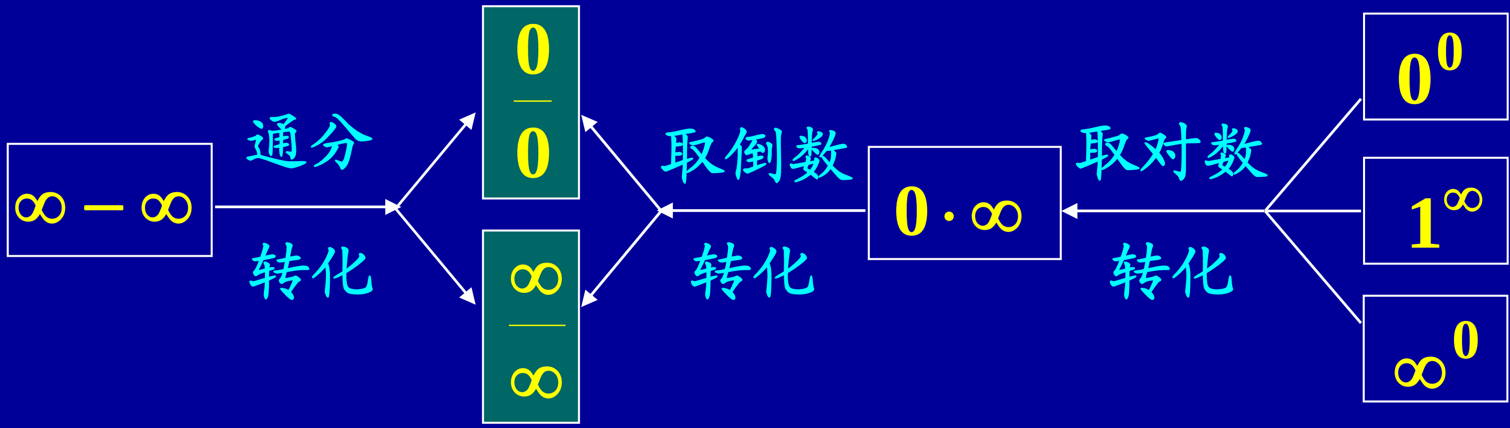
注 其它未定式：$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0 型的求极限方法：



例5. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x \quad (n>0).$ $\boxed{0\cdot\infty\text{型}}$

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-n}} \overset{\boxed{\frac{\infty}{\infty}}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-n\,x^{-n-1}}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^n}{n}\right)=0.$$



例6. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$. $\boxed{\infty-\infty\text{型}}$

解: (自算)

$$\text{原式}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\quad\boxed{\frac{0}{0}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

$$\infty - \infty \xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}} \left\{\begin{matrix} \boxed{\frac{0}{0}} \\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \end{matrix}\right. \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}} \boxed{0 \cdot \infty} \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}} \left\{\begin{matrix} \boxed{0^0} \\ \boxed{1^\infty} \\ \boxed{\infty^0} \end{matrix}\right.$$

例7. 求 $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$. $\boxed{0^0 \text{型}}$

解: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{x \ln x}$,

$$\because \lim_{x \to 0^+} \underbrace{x \ln x}_{\boxed{0\cdot\infty}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\boxed{\frac{\infty}{\infty}}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0,$$

$$\therefore \lim_{x \to 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

自算 $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$

注意 综合利用等价无穷小和洛必达法则

例8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$.

解: 注意到 $\sin x \sim x$.

$\boxed{\sec^2 x - 1 = \tan^2 x}$

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} \qquad \boxed{\tan x \sim x}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

注 1) 在满足定理条件的情况下, 洛必达法则有时不能解决计算问题. 例如,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \overset{\text{用洛必达法则}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \cdots$$

可这样计算: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1} = 1.$

定理条件: 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$

2) $f(x)$与$F(x)$ 在$\overset{\circ}{\bigcup}(a)$内可导, 且$F'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在 (或为 ∞) $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$

注 2) 当 $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$不存在($\neq\infty$)时, $\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}$是否存在?

不一定!

例如:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}\neq\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1}$$ 极限不存在

可以这样计算: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x})=1.$

综合练习

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \underline{\;\dfrac{3}{2}\;}$.

分析：原式 $= \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$

$$\boxed{\ln(1+x) \sim x}$$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x) = 2}$$

$= \dfrac{1}{2}(3+0)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\underline{\ \dfrac{1}{6}\ }$.

$\boxed{\infty-\infty\text{型}}$

分析：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\,(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1}$

$\boxed{\sin x\sim x}$

$$=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$\boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

3\. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4+x)\sin 2x\cos 3x}{\ln(1+x)\cos 5x}$.

解: (自算)

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{(4+x)\cos 3x}{\cos 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}$$

$$=8.$$

或

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{\dfrac{1}{x+1}}$$

$$=8.$$

注　将极限存在且不为 0 的因子分离出来.

4. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

解: (自算) 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则

$$\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2} \quad \boxed{\frac{0}{0}\text{型}}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{(1+2t)^{-\frac{1}{2}}-(1+t)^{-\frac{1}{2}}}{2t} \quad \boxed{\frac{0}{0}\text{型}}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{-(1+2t)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{2}=-\frac{1}{4}.$$

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$.

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}(n^{\frac{1}{n}}-1)$

$$\boxed{n^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln n}}$$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}(e^{\frac{1}{n}\ln n}-1)$

$$\boxed{e^{\frac{1}{n}\ln n}-1\sim\frac{1}{n}\ln n(\to 0)}$$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{n}\ln n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}$,

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}$$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{1/(2\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$,

$\therefore$ 原式 $=0$.

作 业

习题3-2 1(2,4,5,7,9,11,12,13,14,15,16); 2*; 4.

补充题 1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$;

2. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{\tan^2 x}$.

下次课内容

第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性

内容小结

洛必达法则的一般形式:

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{F(x)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A\,(\infty)$$

其它不定型解决方法:

$$\infty-\infty \xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}} \boxed{\frac{0}{0}},\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}} \boxed{0\cdot\infty} \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}} \boxed{0^0},\ \boxed{1^\infty},\ \boxed{\infty^0}$$

内容小结

技巧1 将极限存在且不为0的因子分离.

技巧2 结合等价无穷小.

技巧3 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 欲利用洛必达法则,

需转换成 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 后再用:

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=a$.

练习题

求下列极限:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$;

解: $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$ (令 $t=\frac{1}{x}$)

$$=\lim_{t\to0}[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t}]=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}\quad \boxed{\frac{0}{0}\text{型}}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{1}{2}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$ $\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[(1+x^2)^2-x^2]}{\sec x-\cos x}$ $\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\sec x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{\sec x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+4x^3}{\sec x\tan x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2+4x^2}{\sec^2 x+1}\right]=1\cdot 1=1.$$