第三章

微分中值定理与导数的应用

中值定理
- 罗尔定理
- 拉格朗日中值定理
- 柯西中值定理

导数的应用
- 研究函数性质及曲线性态
- 研究和解决一些实际问题

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

第一节
中值定理

主要内容

一、罗尔(Rolle)定理

二、拉格朗日中值定理

三、柯西(Cauchy)中值定理

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

一、罗尔(Rolle)定理

费马(fermat)引理

费马(1601 – 1665)

费马，P.de

法国数学家, 他是一位律师, 数学只是他的业余爱好. 他兴趣广泛, 博览群书并善于思考, 在数学上有许多重大贡献. 他提出的费马大定理:

"当 $n > 2$ 时, 方程 $x^n + y^n = z^n$ 无整数解"

至今尚未得到普遍的证明. 他还是微积分学的先驱, 费马引理是后人从他研究最大值与最小值的方法中提炼出来的.

费马(fermat)引理

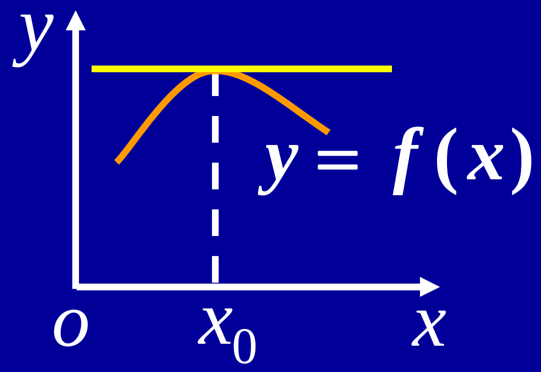
$$\left.\begin{array}{l} y=f(x)\text{在}\cup(x_0)\text{有定义,} \\ \text{且} f(x)\le f(x_0),\ f'(x_0)\text{存在} \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x_0)=0$$

(或 $\ge$)

证: $\because \forall x\in\cup(x_0),\ f(x)\le f(x_0),$

$$\text{且 } f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\text{ 存在,}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f'_-(x_0)\ge 0 & (x\to x_0^-), \\ f'_+(x_0)\le 0 & (x\to x_0^+), \end{cases}$$



$$\Longrightarrow f'(x_0)=0.$$

证毕

罗尔(Rolle)定理

如果 $y = f(x)$ 满足:

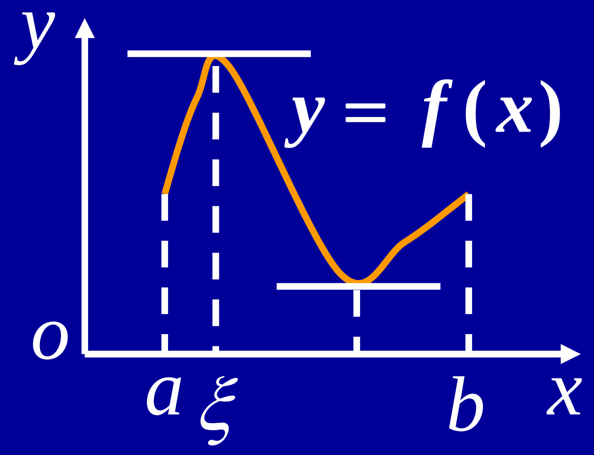
(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a, b) 内可导,

(3) $f(a) = f(b)$,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$,

使 $f'(\xi) = 0$.



证: $\because f(x)$在$[a, b]$上连续,

故在$[a, b]$上取得最大值 M 和最小值 m.

罗尔(Rolle)定理 如果 $y=f(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

(3) $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.

---

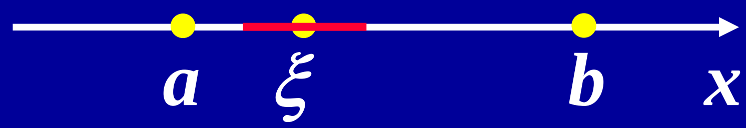
(1) 若 $M=m$, 则 $f(x)\equiv M$, $x\in[a,b]$,

故 $\forall\xi\in(a,b)$, $f'(\xi)=0$.

(2) 若 $M>m$, 则 M 和 m 至少有一个与端点值不等,

不妨设 $M\neq f(a)$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,

使 $f(\xi)=M$,



则由费马引理得 $f'(\xi)=0$.

罗尔(Rolle)定理 如果 $y = f(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,

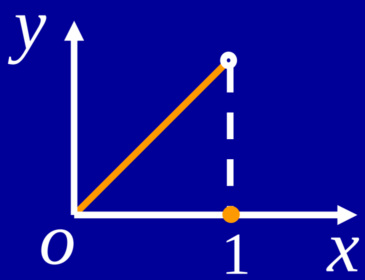
(2) 在开区间 (a, b) 内可导,

(3) $f(a) = f(b)$,

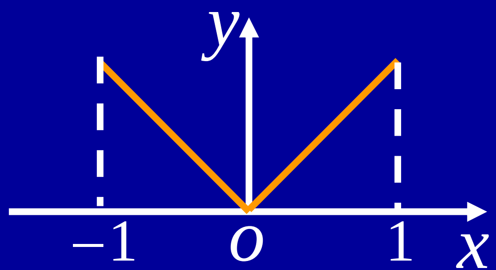
则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

注意 定理条件不全具备, 结论不一定成立. 例如:

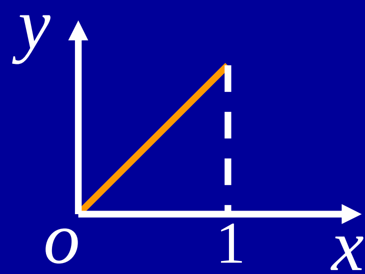
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$



$f(x) = |x|$,
$x \in [-1, 1]$.



$f(x) = x$,
$x \in [0, 1]$.



例1 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，

且 $f(a)=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,a)$，

使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证: 令 $F(x)=x\,f(x),\ \ x\in[0,a]$.

显然，$F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，

在 $(0,a)$ 内可导，

且 $F(0)=F(a)=0$，

由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,a)$，

使 $F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

例2. 若 $f(x)$ 可导, 试证在 $f(x)$ 的两个零点之间一定有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

[思路 设 $f(x_1)=f(x_2)=0,\ x_1<x_2$,

欲证: $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$,

只要证 $e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$

亦即 $[e^{x}f(x)]'\big|_{x=\xi}=0$]

证: 设 $f(x_1)=f(x_2)=0,\ x_1<x_2$,

令 $F(x)=e^{x}f(x)$,

显然 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足罗尔定理条件,

$\therefore\exists\,\xi\in(x_1,x_2)$, 使 $F'(\xi)=e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$,

即 $f(\xi)+f'(\xi)=0$, 故命题为真.

例3. 设 $f(x)$ 在$[0, 1]$连续，在$(0, 1)$可导， 且 $f(1)=0$,

求证存在 $\xi \in (0,1)$, 使 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证 设辅助函数 $\varphi(x)=x^n f(x)$,

显然 $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足罗尔定理条件,

因此存在 $\xi \in (0, 1)$, 使

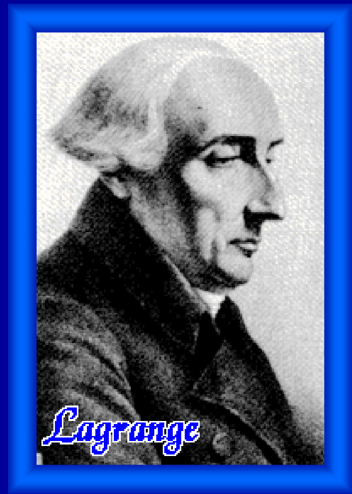
使 $\varphi'(\xi)=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)=0$,

即 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$. 证毕

二、拉格朗日中值定理

拉格朗日 (1736 – 1813)

法国数学家, 在方程论、解析函数论及数论方面都作出了重要的贡献, 近百余年来, 数学中的许多成就都直接或间接地起源于他的工作, 他是对分析数学产生全面影响的数学家之一.



拉格朗日中值定理 设 $y=f(x)$满足:

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续,

(2) 在开区间(a,b)内可导,

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证: [思路: 利用罗尔定理, 考察$f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$]

令 $$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

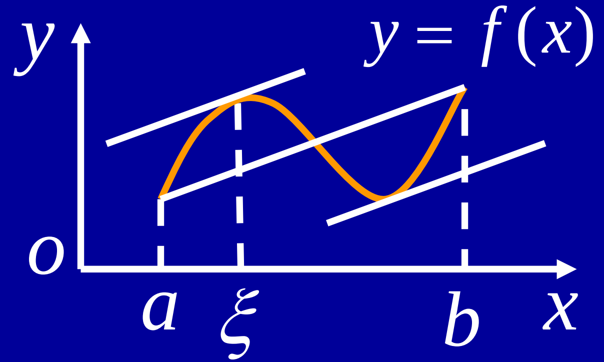
显然, $\varphi(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导, 且成立:

$\varphi(a)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=\varphi(b)$, 由罗尔定理知至少存在一点

$\xi\in(a,b)$, 使$\varphi'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 证毕

注1 拉格朗日中值定理的几何意义

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



注2 拉格朗日公式

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ 或 } f(b)-f(a)=f'(\underline{\xi})(b-a).$$

中值

例4 填空题

函数 $f(x)=x^4$ 在区间 $[1, 2]$ 上满足拉格朗日

定理条件, 则中值 $\xi=$ $\underline{\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}}$.

$$\boxed{4\xi^3=\frac{2^4-1^4}{2-1}}$$

例5 证明不等式 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x \quad (x>0).$

证: 令 $f(t)=\ln(1+t)$, 则 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理条件, 因此应有 $\xi\in(0,x)$, 使

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\ 0<\xi<x,$$

即 $\quad \ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi},\ 0<\xi<x,$

因为 $\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x,$

故 $\quad \dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x \quad (x>0).$

推论 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 $f'(x) \equiv 0$，

则 $f(x)$ 在 I 上必为常数.

证: 在 I 上任取两点 x_1, x_2 (不妨设 $x_1 < x_2$)，

$f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，

因此至少存在一点 $\xi \in (x_1, x_2)$，使

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

所以 $f(x_2) = f(x_1)$，由 x_1, x_2 的任意性可知，

函数 $f(x)$ 在 I 上必为常数.

例6　证明等式 $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2},\ x \in (-\infty, +\infty)$

证：　设 $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$，则在 $(-\infty, \infty)$ 内

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

由推论可知 $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x = C$ (常数),

令 $x = 0$，得 $C = \frac{\pi}{2}$,

故 $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2},\ x \in (-\infty, +\infty)$.　证毕

注：欲证 $x \in I$ 时 $f(x) = C_0$，只需证在 I 上 $f'(x) = 0$,

且 $\exists\, x_0 \in I$，使 $f(x_0) = C_0$.

三、柯西(Cauchy)中值定理

柯西(1789 – 1857)

法国数学家, 他对数学的贡献主要集中在微积分学、复变函数和微分方程方面. 一生发表论文800余篇, 著书 7 本,《柯西全集》共有 27 卷.

柯西，A.-L.

柯西是经典分析的奠基人之一, 为分析学的发展做出了重大贡献.

柯西(Cauchy)中值定理

设 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

(3) 在开区间 (a,b) 内 $F'(x)\neq 0$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

证明思路: 用罗尔定理.

要证 $\underbrace{\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)-f'(\xi)}}_{\varphi'(\xi)}=0$

$$\Longrightarrow \varphi(x)=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$$

证：作辅助函数$\varphi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$,

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且

$$\varphi(a)=\frac{f(b)F(a)-f(a)F(b)}{F(b)-F(a)}=\varphi(b),$$

由罗尔定理知，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$\varphi'(\xi)=0$，即

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)-f'(\xi)=0\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

证毕

思考：柯西定理的下述证法对吗？

$$\because\ f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)$$
$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)$$

两个ξ不一定相同

上面两式相比即得结论. 错！

例 7 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导, 证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证: [思路 结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi} \quad]$$

设 $F(x)=x^2$, 则 $f(x)$, $F(x)$在 $[0,1]$ 上满足柯西中值定理条件, 因此在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$$ 证毕

作 业

习题3-1　2; 4; 6; 7; 8; 10; 11(2); 12; 13*; 14*.

提示： 题13. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

题14. 考虑 $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$

下次课内容

第二节　洛必达法则

内容小结

费马(fermat)引理

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \text{在} \cup(x_0) \text{有定义}, \\ \text{且} f(x) \le f(x_0),\ f'(x_0) \text{存在} \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x_0) = 0$$

(或 $\ge$)

罗尔(Rolle)定理 如果 $y = f(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a, b) 内可导,

(3) $f(a) = f(b)$,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

内容小结

拉格朗日中值定理 设 $y = f(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a, b) 内可导,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

推论 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 $f'(x) \equiv 0$,

则 $f(x)$ 在 I 上必为常数.

内容小结

柯西(Cauchy)中值定理

设 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

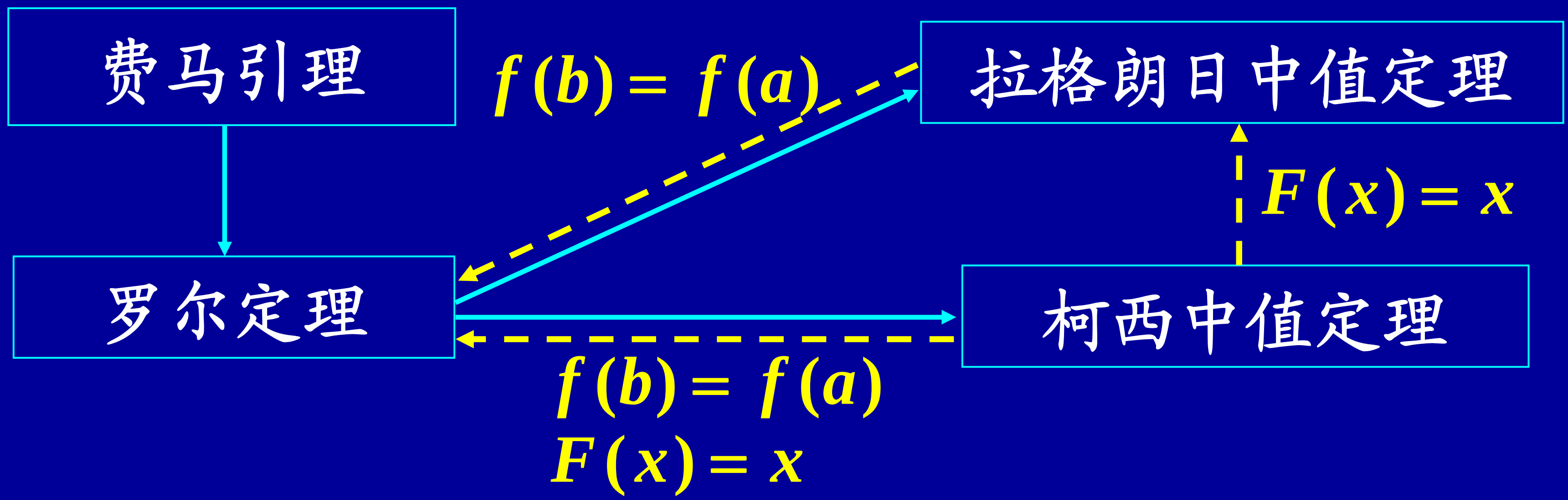
(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

(3) 在开区间 (a,b) 内 $F'(x)\neq 0$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

内容小结

微分中值定理的关系



微分中值定理的应用

(1) 证明恒等式

(2) 证明不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

应用关键:
利用逆向思维
设辅助函数