第二章 内容小结

主要内容

一、导数的概念及计算方法

二、微分的概念及计算方法

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

一、导数的概念

$$y'\Big|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

左导数:

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

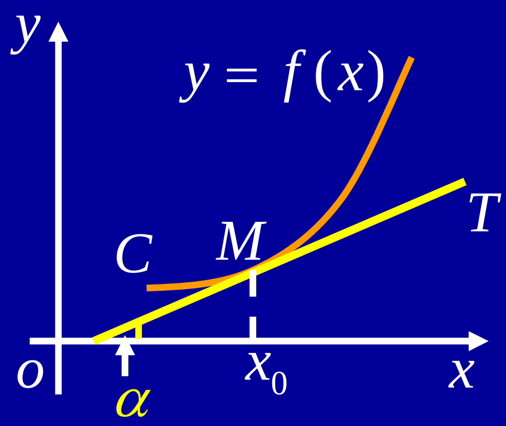
右导数:

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

定理: $f'(x_0)=a \rightleftharpoons f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a$

导数的几何意义

$f'(x_0)$表示曲线 $y=f(x)$在点 (x_0, y_0)的切线斜率.



切线方程: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ $(f'(x_0) \neq 0)$

函数的可导性与连续性的关系:

$f(x)$在点 x_0 处可导 $\Longrightarrow$ $f(x)$在点 x_0 处连续

$f(x)$在区间 I 可导 $\Longrightarrow$ $f(x)$在区间 I 连续

例1. 已知 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x^2, & x\geq 0,\end{cases}$ 求 $f'_-(0)$及 $f'_+(0)$,

又 $f'(0)$是否存在?

解: (1) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0^2}{x}=-1,$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0^2}{x}=0.$$

(2) $\because\ f'_-(0)\neq f'_+(0),\ \therefore\ f'(0)$不存在.

例 2. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$,

求 $f'(2)$.

解: $\because\ f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}[\dfrac{f(x)}{(x-2)}\cdot(x-2)]=0$,

$$\therefore\ f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3.$$

例3. 设 $f(x)=\begin{cases}2, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ $f'(x)$ [D].

(A) 不存在, $x\in(-\infty,+\infty)$; (B) 存在, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(C) $=0$, $x\in(-\infty,+\infty)$; (D) $=0$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

$\because\ x<0:\ f(x)=2,\ f'(x)=0,$

$x>0:\ f(x)=1,\ f'(x)=0,$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{2-0}{x-0}=\infty,$$

$\therefore\ f'(0)$ 不存在.

例4. 若 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$存在, 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin^2x+\cos x)}{(e^x-1)\tan x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin^2x+\cos x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to0}(\sin^2x+\cos x)=1$ 且 $f(1)=0,\ f'(1)\exists$

联想到凑导数 $f'(1)$ 的定义

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(1+\boxed{\sin^2x+\cos x-1})-f(1)}{\boxed{\sin^2x+\cos x-1}}\cdot\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=f'(1)\cdot(\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2})$$

$$=f'(1)\cdot(\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{x^2/2}{x^2})=\frac{1}{2}f'(1).$$

二、导数的求法

1. 常数和基本初等函数的导数

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2. 四则运算求导法则

(1) $[u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x)$;

(2) $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(3) $[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x)\neq 0)$.

3. 反函数的求导法则

$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$

4. 复合函数求导法则

设 $y = f(u),\ u = \varphi(x)$ 可导，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

5. 高阶导数的运算法则

设函数 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 都有 n 阶导数, 则

1) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

2) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$ (C为常数)

3) $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$ $\left(f^{(0)} \overset{\text{规定}}{=} f \right)$

莱布尼兹(Leibniz) 公式

4) 高阶导数的求法:

(1) 逐阶求导法

(2) 利用归纳法

(3) 利用莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} \quad (f^{(0)} \overset{\text{规定}}{=} f)$$

u,v: 一个高阶导数好算,

一个从某阶起高阶导数 全为 0.

6. 隐函数的导数

若由方程 $F(x,y)=0$ 可确定 y 是 x 的函数,则称此函数为**隐函数**.

隐函数**求导方法**: 由 $F(x,y)=0$, 对 x 求导可得

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y)=0$ (含导数 y' 的方程), 然后解出 y'.

7. 对数求导法

对幂指函数 $y = u^v$ $(u, v$ 是函数$)$ 可用对数求导法:

(1) 取对数 $\ln y = v \ln u$

(2) 求导 $\dfrac{1}{y} y' = v' \ln u + v \dfrac{u'}{u}$

(3) 整理 $y' = u^v \left(v' \ln u + \dfrac{u' v}{u} \right)$

注 对数求导法也可用于多个函数乘积的导数.

8. 参数式函数的导数

定理 若参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 确定了 y 是 x 的函数，

且 $x(t)$，$y(t)$ 可导，$x'(t) \neq 0$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

若参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 确定了 y 是 x 的函数，且 $x(t)$

和 $y(t)$ 二阶可导，$x'(t) \neq 0$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)'_t \cdot \dfrac{1}{x'(t)}$.

9. 相关变化率

如果 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 为两可导函数,

并且 x, y 之间有联系,

$\Longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 之间也有联系, 称为**相关变化率.**

相关变化率问题**解法:**

找出相关变量的关系式

$\big\downarrow$ 对 t 求导

得相关变化率之间的关系式

$\big\downarrow$

求出未知的变化率

例1. 求下列函数的导数: $y=\lg(x-\sqrt{x^2-a^2})$.

解: $y'=\dfrac{1}{(x-\sqrt{x^2-a^2})\ln 10}\cdot\left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}\cdot 2x\right)$

$$=\frac{1}{(x-\sqrt{x^2-a^2})\ln 10}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}-x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x^2-a^2}\ln 10}$$

$$\left(\log_a^b=\frac{\log_c^b}{\log_c^a},\ \log_c^c=1\right)$$

$$=\frac{-\lg e}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

例2. 设 $y=\underline{e^{\sin x}\sin e^{x}}+\underline{f(\arctan\frac{1}{x})}$, 其中 $f(x)$ 可微, 求 y'.

解: $y' = e^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\sin e^{x}+e^{\sin x}\cdot\cos e^{x}\cdot e^{x}$

$$+f'(\arctan\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{1+x^{-2}}\cdot(-\frac{1}{x^{2}})$$

$$=e^{\sin x}(\cos x\sin e^{x}+e^{x}\cos e^{x})-\frac{f'(\arctan\frac{1}{x})}{1+x^{2}}.$$

例3. 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases} \quad (0 < \varepsilon < 1)$

确定函数 $y = y(x)$, 求 $\dfrac{d^2 y}{d x^2}$.

解: 方程组两边对 t 求导, 得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2t + 2 \\ 2t - \dfrac{dy}{dt} + \varepsilon \cos y \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2(t+1) \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

故 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}$.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1-\varepsilon\cos y} \end{cases} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{t}{(t+1)(1-\varepsilon\cos y)}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{(t+1)(1-\varepsilon\cos y)}\right)}{2(t+1)}$$

$$= \frac{(t+1)(1-\varepsilon\cos y) - t\,[(1-\varepsilon\cos y)+(1+t)\,\varepsilon\sin y\cdot y'_t]}{(t+1)^2(1-\varepsilon\cos y)^2\cdot 2(t+1)}$$

$$= \frac{(1-\varepsilon\cos y)^2 - 2\varepsilon t^2(t+1)\sin y}{2(t+1)^3(1-\varepsilon\cos y)^3}.$$

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

例4. 甲乙两船同时从一码头出发，甲船以30 km/h的速度向北行驶，乙船以 40 km/h 的速度向东行驶，求两船间距离增加的速度.

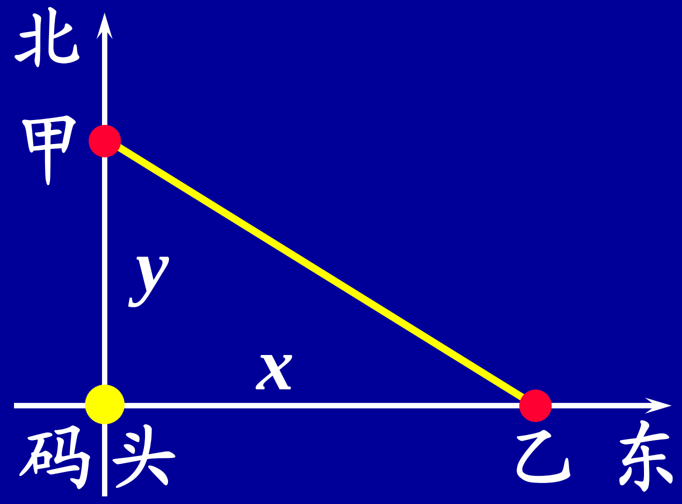
解: 出发 t 时间后，两船间的距离

$$s=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\sqrt{(40t)^2+(30t)^2}$$

$$=50t,$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=50,$$



故两船间距离增加的速度为50 km/h.

部分习题解答

T1 若 $f(x)$和 $g(x)$可微，且 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$，试求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$$

$$=\frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}.$$

T2 设 $f(x)$ 可导, 求下列函数的导数:

$$y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x).$$

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(\sin^2 x) \cdot 2\sin x \cdot \cos x$$

$$+ f'(\cos^2 x) \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x)$$

$$= \sin 2x[f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)].$$

T3 设 $f''(x)$ 存在, 求 $y = f(x^2)$ 的二阶导数:

解 $y' = f'(x^2)\cdot 2x = 2x f'(x^2).$

$y'' = 2f'(x^2) + 2x \cdot f''(x^2)\cdot(2x)$

$= 2[f'(x^2) + 2x^2 f''(x^2)].$

T4 求下列函数的导数: $y = x^{\frac{1}{x}}\ (x > 0)$.

解 法1 $y' = (x^{\frac{1}{x}})' = (e^{\frac{1}{x}\ln x})'$

$$= e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

法2 对数求导法: ……

T5 试从 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$ 导出:

$$(1)\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{y''}{(y')^3};\quad (2)\ \frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}.$$

解 (1)
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{1}{y'}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{y'}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$
$$=\frac{-1}{(y')^2}\cdot y''\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3};$$

(2)
$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(-\frac{y''}{(y')^3}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{y''}{(y')^3}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$
$$=-\frac{y'''(y')^3-y''\cdot 3(y')^2\cdot y''}{(y')^6}\cdot\frac{1}{y'}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}.$$

T6 $y = x^2 \sin 2x$, 求 $y^{(50)}$.

解 [u, v：一个高阶导数好算，

一个从某阶起高阶导数全为0,

可以考虑用莱布尼兹公式]

设 $u = \sin 2x$, $v = x^2$,

$$u' = 2\cos 2x = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2}),$$

$$u'' = 2^2 \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = 2^2 \sin(2x + \frac{2\pi}{2}),$$

$$u''' = 2^3 \cos(2x + \frac{2\pi}{2}) = 2^3 \sin(2x + \frac{3\pi}{2}), \ \ldots,$$

$$u^{(k)} = 2^k \sin(2x + \frac{k\pi}{2}) \ (k = 1, 2, \cdots, 50)$$

$$v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v^{(k)} = 0 \quad (k = 3, \cdots, 50)$$

T6 $y = x^2 \sin 2x$, 求 $y^{(50)}$.

解 设 $u = \sin 2x,\ v = x^2$,

$$u^{(k)} = 2^k \sin(2x + \frac{k\pi}{2}) \quad (k = 1, 2, \cdots, 50)$$

$$v' = 2x,\quad v'' = 2,\quad v^{(k)} = 0 \quad (k = 3, \cdots, 50)$$

代入莱布尼兹公式, 得

$$y^{(50)} = \sum_{k=0}^{50} C_{50}^k u^{(50-k)} v^{(k)} \quad (f^{(0)} \overset{\text{规定}}{=} f)$$

$$= 1 \cdot 2^{50} \sin(2x + 25\pi) \cdot x^2 + 50 \cdot 2^{49} \sin(2x + \frac{49\pi}{2}) \cdot 2x$$

$$+ \frac{50 \cdot 49}{2!} \cdot 2^{48} \sin(2x + 24\pi) \cdot 2$$

$$= 2^{49}(-2x^2 \sin 2x + 100x\cos 2x + 1225 \sin 2x).$$

三、微分

1. 微分的概念

定义: 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的增量可表示为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

(A 为不依赖于 Δx 的常数)

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微，而 $A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f$，即 $\mathrm{d}y = A\Delta x$.

注 微分的几何意义 —— 切线纵坐标的增量.

2. 可导与可微的关系

定理 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是

$y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $A = f'(x_0)$.

3. 微分的计算

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x \quad (\Delta x \text{ 有给定值时})$$

$$= f'(x)\mathrm{d}x \quad (\text{常用})$$

微分形式不变性：$\mathrm{d}f(u) = f'(u)\mathrm{d}u$

(u是自变量或中间变量均成立)

例1. 已知 $y=\arcsin(\sin^2\frac{1}{x})$, 求 $\mathrm{d}\,y$.

解: 自算

$$\mathrm{d}\,y=\frac{1}{\sqrt{1-(\sin^2\frac{1}{x})^2}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})\,\mathrm{d}\,x$$

$$=-\frac{1}{x^2\sqrt{1-\sin^4\frac{1}{x}}}\sin\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x.$$

例2. 如果函数 $f(x)$ 有导数 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x\to 0$时, 该函数在 $x=x_0$ 的微分 $\mathrm{d}y$ 是 (**B**).

(A) 与 $\triangle x$ 等价的无穷小; (B) 与 $\triangle x$ 同阶的无穷小;

(C) 比 $\triangle x$ 低阶的无穷小; (D) 比 $\triangle x$ 高阶的无穷小.

注: $f'(x_0)=\frac{1}{2},\ \mathrm{d}y=\frac{1}{2}\Delta x.$

作 业

总习题二　1; 2; 5; 6(1); 7; 8(1,3,4); 9(2);
10; 11; 12(2); 13; 16

下次课内容

第三章第一节　微分中值定理

练习题

T1 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 0, \\ \cos x, & x<0, \end{cases}$ $f'(0)$ 是否存在?

解: $\because\ x\ge 0:\ f(x)=x^2,\ f'(x)=2x,$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} 2x=0,$$

$x<0:\ f(x)=\cos x,\ f'(x)=-\sin x,$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}(-\sin x)=0,$$

$\therefore\ f_-'(0)=f_+'(0),$ 故 $f'(0)$ 存在.

注: 求分段函数分界点的导数须用左导数和右导数.

T1 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 0, \\ \cos x, & x<0, \end{cases}$ $f'(0)$ 是否存在？

解： $\because\ f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-0^2}{x-0}=0,$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x-0^2}{x-0}=\infty,$$

$\therefore\ f'(0)$ 不存在.

或：$\because\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1,$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^2=0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续，所以 $f'(0)$ 不存在.

T2 设函数在 x_0 的左导数和右导数均存在，则函数在 x_0 [A].

(A) 连续　　(B) 不一定连续

(C) 可导　　(D) 不可导

因为左导数存在，所以左连续：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

因为右导数存在，所以右连续：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

T3 选择题

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是 (**D**).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$ 存在.

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在.

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

(B)(C)不行. 反例:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

$a=0.$