第三节 高阶导数

第二章
导数与微分

主要内容

一、高阶导数的概念

二、高阶导数的运算法则

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

一、高阶导数的概念

引例：变速直线运动 $s = s(t)$

速度 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，即 $v = s'$

加速度 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})$

即 $a = (s')'$

定义. 若函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$可导,

则称 $f'(x)$的导数为 $f(x)$的二阶导数,

记作 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2}$, 即

$$y''=(y')' \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

类似地, 二阶导数的导数称为三阶导数,

$n-1$ 阶导数的导数称为 n 阶导数,

分别记作 y''', $\quad y^{(4)}$, $\quad \cdots$, $\quad y^{(n)}$,

或 $\quad \dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d} x^3}$, $\dfrac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d} x^4}$, $\cdots$, $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d} x^n}$.

例1 (1). 求 $y = ax + b\sin cx$ 的 3 阶导数.

解: $y' = a + bc\cos cx,$

$y'' = -bc^2\sin cx,$

$y''' = -bc^3\cos cx.$

例1 (2). 设 $y = \underline{x^2}\,\underline{f(\sin x)}$，求 y''，其中 f 二阶可导.

解: $y' = 2x \cdot f(\sin x) + x^2 \cdot f'(\sin x) \cdot \cos x$

$$y'' = \underline{(2x f(\sin x))'} + \underline{(x^2 f'(\sin x)\cos x)'}$$

$$= 2f(\sin x) + 2x \cdot f'(\sin x) \cdot \cos x$$

$$+ 2x f'(\sin x)\cos x + x^2 f''(\sin x)\cos^2 x$$

$$+ x^2 f'(\sin x)(-\sin x)$$

$$= 2f(\sin x) + (4x\cos x - x^2 \sin x) f'(\sin x)$$

$$+ x^2 \cos^2 x\, f''(\sin x)$$

例2. 设 $y = e^{ax}$，求 $y^{(n)}$.

解: $y' = ae^{ax}$， $y'' = a^2 e^{ax}$， $y''' = a^3 e^{ax}, \ldots,$

$y^{(n)} = a^n e^{ax}$.

例3(1). 设 $y=\ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y'=\dfrac{1}{1+x}$, $y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $y'''=(-1)^2\dfrac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$,

$$y^{(4)}=(-1)^3\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4},\quad \cdots,\quad y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

例3(2). 设 $y=\ln(1-x)$, $y^{(n)}=-\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$. (自算)

$$[y'=-\frac{1}{1-x},\qquad y''=-\frac{1}{(1-x)^2},$$

$$y'''=-\frac{1\cdot 2}{(1-x)^3},\quad y^{(4)}=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4},\ \cdots]$$

例4. 设 $y=\sin x$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y' = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y'' = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})$$

$$= \sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y''' = \cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

$\cdots\cdots$,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$$

类似可得: $(\cos x)^{(n)} = \cos(x+\frac{n\pi}{2})$

$$\boxed{y=\frac{x^3-x^2+x^2-x+x-1+1}{1-x}}$$

注. 如何求函数 $y=\dfrac{x^3}{1-x}$ 的 n 阶导数?

解: $y=-x^2-x-1+\dfrac{1}{1-x}$, $y'=-2x-1+\dfrac{1}{(1-x)^2}$,

$$y''=-2+\frac{1\cdot 2}{(1-x)^3},\qquad y'''=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4},$$

$$y^{(4)}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(1-x)^5},\ \cdots,\qquad y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\ n\geq 3.$$

二、高阶导数的运算法则

设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都有 n 阶导数, 则

1. $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$

2. $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$ (C为常数)

3. $$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+$$
$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}$$
$$+\cdots+uv^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} \quad (f^{(0)}\overset{\text{规定}}{=}f)$$

— 莱布尼兹 (Leibniz) 公式

$$\text{二项式定理:}\ (u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k$$

莱布尼兹(Leibniz) 公式:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \quad (f^{(0)} \overset{\text{规定}}{=} f)$$

用数学归纳法可证莱布尼兹公式成立.

例5. $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

例2. $y = e^{ax}$,
$y^{(n)} = a^n e^{ax}$.

解: 设 $u = e^{2x}$, $v = x^2$, 则

$$u^{(k)} = 2^k e^{2x} \ (\ k = 1, 2, \cdots, 20\ )$$

$$v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v^{(k)} = 0 \quad (k = 3, \cdots, 20)$$

代入莱布尼兹公式, 得

$$y^{(20)} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^{k} u^{(20-k)} v^{(k)} \quad (\ f^{(0)} \overset{\text{规定}}{=} f\ )$$

$$= 1 \cdot 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x + \frac{20 \cdot 19}{2\,!} \cdot 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95).$$

注 u, v: 一个高阶导数好算,

一个从某阶起高阶导数全为 0.

内容小结

1 高阶导数的概念

2 高阶导数的求法:

(1) 逐阶求导法

(2) 利用归纳法

(3) 利用莱布尼兹公式:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \quad \left(f^{(0)} \overset{\text{规定}}{=} f \right)$$

u, v: 一个高阶导数好算,

一个从某阶起高阶导数全为 0.

第四节(1)

隐函数的导数

主要内容

一　隐函数的导数

二　对数求导法

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

一 隐函数的导数

若由方程$F(x,y)=0$可确定y是x的函数，则称此函数为隐函数.

注. 由$y=f(x)$表示的函数也称为显函数.

隐函数求导方法: 由$F(x,y)=0$, 两边对x求导可得:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y)=0$ (含导数y'的方程), 然后解出y'.

例1. 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 在点 $(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$ 处的切线方程.

解: 椭圆方程两边对 x 求导

$$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot y'=0,$$

$$\therefore\ y'\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{9}{16}\frac{x}{y}\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{4},$$

故切线方程为 $y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2),$

即 $$\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0.$$

例2. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 确定, 求 $y'(0), y''(0)$.

解: 方程两边对 x 求导, 得

$$e^y y' + y + xy' = 0,\ \text{解得}\ y' = \frac{-y}{x + e^y},$$

当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 可得 $y'(0) = -\dfrac{1}{e}$;

$$y'' = \left(\frac{-y}{x + e^y}\right)' = -\frac{y'(x + e^y) - y(1 + e^y y')}{(x + e^y)^2}$$

$$= \frac{y(2x + 2e^y - ye^y)}{(x + e^y)^3},$$

$$y''(0) = \frac{1}{e^2}.$$

二 对数求导法

1) 对幂指函数 $y = u^v$ $(u, v$是函数$)$可用对数求导法:

(1) 取对数 $\ln y = v \ln u$

(2) 求导 $\quad \dfrac{1}{y} y' = v' \ln u + v \dfrac{u'}{u}$

(3) 整理 $\quad y' = u^v \left(v' \ln u + \dfrac{u' v}{u} \right)$

例3. 求 $y = x^{\sin x}$ $(x > 0)$ 的导数 .

解: 两边取对数

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

$$\Big\downarrow \text{两边对 } x \text{ 求导}$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$y' = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

例4. 设 $y=(\sin x)^{\tan x}$，求 y'.

解(自算). 用对数求导法:

$$\ln y=\tan x\ln\sin x,$$

$$\frac{y'}{y}=\sec^2 x\cdot\ln\sin x+\tan x\cdot\frac{\cos x}{\sin x},$$

$$y'=(\sin x)^{\tan x}(\sec^2 x\cdot\ln\sin x+1).$$

注. 设 $y=\underbrace{(\sin x)^{\tan x}}_{y_1}+\underbrace{x^{\sin x}}_{y_2}$, 求 y'.

提示: 分别用对数求导法求 y_1', y_2'.

解: 令 $y_1=(\sin x)^{\tan x}$, $y_2=x^{\sin x}$,

$$\because\ y_1'=(\sin x)^{\tan x}(\sec^2 x\cdot\ln\sin x+1),\quad \text{(由例4)}$$

$$y_2'=x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}),\quad \text{(由例3)}$$

$$\therefore\ y'=y_1'+y_2'$$

$$=(\sin x)^{\tan x}(\sec^2 x\cdot\ln\sin x+1)$$

$$+x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}).$$

例5. 求 $y^x = x^y$ 确定的隐函数的导数 y'.

解: 自算

两边取对数: $x\ln y = y\ln x$,

求导得: $\ln y + x\cdot\dfrac{y'}{y} = y'\cdot\ln x + \dfrac{y}{x}$,

由上式解得: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y^2 - xy\ln y}{x^2 - xy\ln x}$.

2) 有些显函数用对数求导法求导很方便 .

例如，$y=\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\quad (a>0, b>0, \frac{a}{b}\neq 1)$

两边取对数

$$\ln y = x\ln\frac{a}{b} + a[\ln b - \ln x] + b[\ln x - \ln a]$$

两边对 x 求导

$$\frac{y'}{y} = \ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}$$

$$y' = \left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}\right)$$

作 业

CT2-3 1(4,6,7,9,12); 2; 3; 4; 5; 8; 10; 11*(2,3)

CT2-4 1(2,3); 2; 3(1,3,4); 4(1,4)

下次课内容

第四节(2) 由参数方程所确定的函数的导数

第五节 函数的微分

函数与极限习题选解

T1. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在点 x_0 连续，证明函数

$$\varphi(x)=\max\{\, f(x),\, g(x)\,\}$$

$$\psi(x)=\min\{\, f(x),\, g(x)\,\}$$

也在 x_0 连续.

证: 因为这 2 个函数:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[\,|\, f(x)-g(x)\,|+f(x)+g(x)],$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[\, f(x)+g(x)-|\, f(x)-g(x)\,|\,],$$

根据连续函数运算法则,

可知 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 也在 x_0 连续.

T2 求下列极限:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}).$$

解. 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+x^{-1}}+\sqrt{1-x^{-1}}}$$

$$=1.$$

T3. 求下列极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}.$$

解.

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}\sin^2 x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\frac{1}{2}.$$

T4. 求 $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\tan x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin^2 x)^{\tan x/2}$

$$=\lim_{x\to\pi/2}(1-\cos^2 x)^{\tan x/2}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}(1-\cos^2 x)^{\frac{1}{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x\cos x/2)}$$

$$=e^0=1.$$

T5. 证明方程 $x = a\sin x + b$，其中 $a > 0, b > 0$,

至少有一个正根, 并且它不超过 $a + b$.

证 令 $f(x) = x - a\sin x - b$，$x \in [0, a+b]$.

由初等函数的连续性可知， $f(x) \in C[0, a+b]$, 且

$$f(0)f(a+b) = -b \cdot a[1 - \sin(a+b)] \le 0$$

(1) 当 $f(0)f(a+b) = 0$时, $\sin(a+b) = 1 \Rightarrow f(a+b) = 0$

$a+b$ 就是原方程的一个不超过 $a+b$ 的正根.

(2) 当 $f(0)f(a+b) < 0$ 时, 由零点定理, $f(x)$在 $(0, a+b)$ 至少有一个零点, 即方程至少有一个小于 $a+b$ 的正根.

综合(1) (2)可知，原方程 至少有一个正根, 并且它不超过 $a+b$.

T6. 证明: 若 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$必在$(-\infty,+\infty)$内有界.

证: 令 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, 则给定 $\varepsilon=1>0$, $\exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时, $|f(x)-A|<1$恒成立,

$$\Rightarrow |f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|<1+|A|;$$

又 $f(x)\in C[-X,X]$, 根据有界性定理, $\exists M_1>0$, 使

$$|f(x)|\le M_1,\quad x\in[-X,X];$$

取 $M=\max\{1+|A|, M_1\}$, 则 $|f(x)|\le M$, $x\in(-\infty,\infty)$,

故 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有界.

课外题

例1* . 设 $y = e^{ax}\sin bx$ $(a, b$ 为常数$)$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$

$$= e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$$

$$= e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi) \qquad (\varphi = \arctan\frac{b}{a})$$

$$y'' = \sqrt{a^2+b^2}\,[ae^{ax}\sin(bx+\varphi) + be^{ax}\cos(bx+\varphi)]$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+2\varphi)$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\varphi) \qquad (\varphi = \arctan\frac{b}{a})$$

例2*. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n=$ __**2**__ .

分析:

$$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x\ge 0\\ 2x^3, & x<0\end{cases}$$

$$\because\quad f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^3-0}{x}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3-0}{x}=0$$

$$\therefore\quad f'(x)=\begin{cases}12x^2, & x\ge 0\\ 6x^2, & x<0\end{cases}$$

$$\text{又}\quad f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{6x^2}{x}=0$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{12x^2}{x}=0$$

$$\therefore\quad f''(x)=\begin{cases}24x, & x\ge 0\\ 12x, & x<0\end{cases}$$

但是 $f'''_-(0)=12$，$f'''_+(0)=24$，(自算) $\therefore f'''(0)$ 不存在 .

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$ $$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

例3*. 设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x \quad =\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x \qquad \cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sin\alpha$$

$$y'=\frac{3}{8}(-4\sin 4x)=\frac{3}{8}\cdot 4\cos(4x+\frac{\pi}{2}),$$

$$y''=\frac{3}{8}[-4^2\sin(4x+\frac{\pi}{2})]=\frac{3}{8}\cdot 4^2\cos(4x+\frac{2\pi}{2}),$$

$$y'''=\frac{3}{8}\cdot 4^3\cos(4x+\frac{3\pi}{2}),\ \ldots,\ y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cos(4x+\frac{n\pi}{2})$$