第六节

极限存在准则 两个重要极限

主要内容

一、极限存在的 2 个准则

二、两个重要极限

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

一、极限存在准则

1 夹逼准则 (准则 1)

定理 1 (数列极限存在的夹逼准则)

$$\left.\begin{aligned}&(1)\ y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1, 2, \cdots)\\&(2)\ \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

证: 由条件 (2) , $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N_1, N_2,

当 $n > N_1$ 时, $|y_n - a| < \varepsilon$ 恒成立;

当 $n > N_2$ 时, $|z_n - a| < \varepsilon$ 恒成立.

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 上面 2 式都成立:

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon,\quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

由条件 (1) $\quad a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

例1. 证明 $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$

证: 利用夹逼准则. 由

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi} \le n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right) \le \frac{n^2}{n^2+\pi}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$$

2 函数极限存在的夹逼准则

定理2 如果 (1) 当 $x \in \mathring{U}(x_0)$ 时，$g(x) \le f(x) \le h(x)$,
$(|x| > X > 0)$

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$

则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$

(与数列极限的夹逼准则类似可证)

例2. 证明 $\lim_{x\to 0}\cos x = 1.$

证: 因为当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$0<1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

且 $\lim_{x\to 0} 0 = 0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0,$

$$\therefore \lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0,$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}[1-(1-\cos x)] = 1.$$

3 单调有界数列必有极限(准则 2)

注 数列$\{x_n\}$单调性的定义:

如果 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots$

则称 数列$\{x_n\}$单调增加;

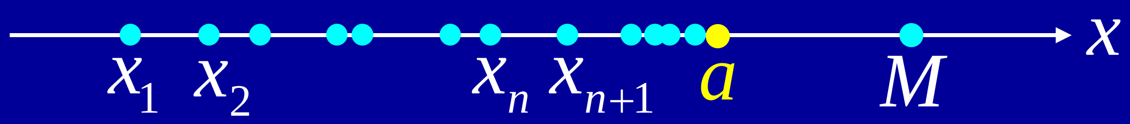
如果 $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots$

则称 数列$\{x_n\}$单调减少;

单调增加和单调减少统称为单调.

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots \le M$$

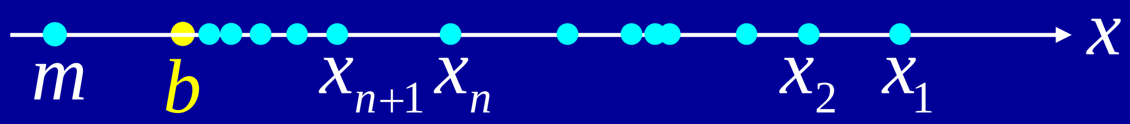
$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \ \ (\le M\ )$$



注1. 单调增加有上界的数列必有极限.

$$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots \ge m$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = b \ \ (\ge m\ )$$



注2. 单调减少有下界的数列必有极限.

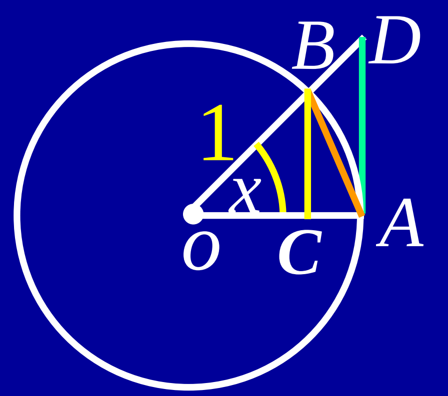
(证明超刚, 不做要求)

二、 两个重要极限

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

证 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时:

$\triangle AOB$ 的面积 $<$ 圆扇形 AOB 的面积 $<\triangle AOD$ 的面积



即 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$

故有 $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}\quad(0<x<\frac{\pi}{2})$

显然 $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1\ (0<|x|<\frac{\pi}{2})$

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1,\quad \lim\limits_{x\to 0}1=1,\quad \therefore\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

例1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2,$

令 $t=\dfrac{x}{2},\quad t\to 0,$

原式 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{\sin t}{t}\right]^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}.$

注 $\lim\dfrac{\sin\square}{\square}=1\quad(\square\to 0)$

例2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解: 令 $t=\arctan x$, 则 $t\to 0$, $x=\tan t$,

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\tan t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos t}{\dfrac{\sin t}{t}}=1$.

例3. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\sin a(x-1)\cdot\cot b(x-1),\ a\neq 0, b\neq 0.$

解: (自算)

$$原式=\lim_{x\to 1}\frac{\sin a(x-1)}{a(x-1)}\cdot\frac{b(x-1)}{\sin b(x-1)}\cdot\frac{a(x-1)}{b(x-1)}\cdot\cos b(x-1)$$

$$=1\cdot 1\cdot\frac{a}{b}\cdot 1$$

$$=\frac{a}{b}.$$

例4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{4n^3+5}}$.

解: (自算)

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(1/\sqrt{4n^3+5})}{1/\sqrt{4n^3+5}}\cdot\frac{n^{3/2}}{\sqrt{4n^3+5}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(1/\sqrt{4n^3+5})}{1/\sqrt{4n^3+5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{4+\dfrac{5}{n^3}}}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ $\quad e \approx 2.718281828459\cdots$

证明思路: (1) 数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$单增;

(2) 数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$有上界;

(3) 由准则2数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$有极限.

推广: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$

说明: 此极限也可写为 $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e.$ (1^∞型)

注: $\lim(1+\square)^{\frac{1}{\square}} = \underline{e}$ $\quad(\square\to 0).$

例6. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{n}{x})^x$, 其中 n 是正整数.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{n}{x})^{(-x/n)\cdot(-n)}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}[(1-\frac{n}{x})^{(-x/n)}]^{-n}$

$=e^{-n}$.

例7. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x$.

解：原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2-1}\right)^x$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{(x^2-1)\cdot\frac{x}{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{(x^2-1)}\right]^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$= e^0 = 1.$$

例8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{3\csc x}$.

解: (自算)

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{-2\sin x}\cdot(-2)\cdot 3}$$

$$= e^{-6}.$$

例9. 求 $\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x}$.

解: 原式 $=\lim_{x\to\infty}[(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{2}]^{\frac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}\cdot\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}$$

$$=e^{1}=e.$$

第七节 无穷小的比较

引例. $x\to 0$ 时, $3x, x^2, \sin x$ 都是无穷小, 但

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\infty,$$

可见无穷小比值的极限是多样的.

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

定义. 设 α, β 是自变量同一变化过程中的无穷小,

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α **高阶**的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α **低阶**的无穷小;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$, 则称 β 是 α 的**同阶**无穷小;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$, 则称 β 是关于 α 的 **k 阶**无穷小;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 是 α 的**等价**无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$,

或 $\beta \sim \alpha$.

例1. 证明：当 $x \to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x.$

证： 考虑极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}.$

由 $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}),$

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n - 1^n}{\frac{1}{n}x\,[(\sqrt[n]{1+x})^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x})^{n-2} + \cdots + 1]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{n}x\,[(\sqrt[n]{1+x})^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x})^{n-2} + \cdots + 1]}$$

$$= 1,$$

$\therefore$ 当 $x \to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x.$

定理. 设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,

则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

证:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta'}{\alpha'} \frac{\alpha'}{\beta'} \frac{\beta}{\alpha} \right) = \lim \left(\frac{\beta'}{\alpha'} \frac{\beta}{\beta'} \frac{\alpha'}{\alpha} \right)$$

$$= \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \lim \frac{\beta}{\beta'} \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

常用等价无穷小：当 $x \to 0$ 时，

$\sin x \sim x$，　　$\arcsin x \sim x$，

$\tan x \sim x$，　　$\arctan x \sim x$，

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，　　$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$，

$\ln(1+x) \sim x$，　　$e^x - 1 \sim x$.

注：x 可理解为“口”.

例2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}$.

$$\boxed{\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}}$$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$\text{原式}\ \cancel{=}\ \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x\sin^2 x}$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\tan x\sim x;\\ 1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2.\end{array}}$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

注：等价无穷小乘除可替换，加减不可替换！

例3. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin(\tan\frac{3}{x})$.

解: 当 $x\to\infty$ 时, $\underline{\sin(\tan\frac{3}{x})} \sim \tan\frac{3}{x}$

$\therefore$ 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\tan\frac{3}{x}$

$\boxed{\tan\frac{3}{x} \sim \frac{3}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\frac{3}{x} = 3.$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解: (自算) 当 $x\to 0$ 时,

$$(1+\underline{x^2})^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}x^2 \qquad \boxed{(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x}$$

$$\cos x-1=-(1-\cos x)\sim-\frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore \quad 原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}.$$

例5. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{3}{x^2})}{x(e^{2/x^3}-1)}$.

解: (自算)

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}}{x\cdot\frac{2}{x^3}}=\frac{3}{2}.$$

当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x)\sim x$; $e^x-1\sim x$.

作 业

习题1-6 1(3,5,6); 2(1,3,4); 4(1,2,3*).

习题1-7 1; 2; 3; 4(2,3,4); 5(3).

下次课内容

第八节 函数的连续性与间断点

第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

内容小结

1. 极限存在的 2 个准则

定理 1 (数列极限存在的夹逼准则)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ (2)\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

定理 2 (函数极限存在的夹逼准则)

如果 (1) 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ $(|x| > X > 0)$ 时, $g(x) \le f(x) \le h(x)$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} h(x) = A$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = A$

内容小结

定理3 单调有界数列必有极限.

单调增有上界的数列必有极限.

单调减有下界的数列必有极限.

内容小结

2. 两个重要极限

$$(1)\ \lim \frac{\sin\square}{\square} = 1 \quad (\square \to 0)$$

$$(2)\ \lim(1+\square)^{\frac{1}{\square}} = e \quad (\square \to 0) \quad (1^{\infty}\text{型})$$

注: $\square$ 代表相同的表达式

内容小结

3. 无穷小的比较

设 α, β 为同一变化过程的无穷小, 且 $\alpha \neq 0$.

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} 0, & \beta \text{是} \alpha \text{的高阶无穷小} \quad \beta = o(\alpha) \\ \infty, & \beta \text{是} \alpha \text{的低阶无穷小} \\ C\ (\neq 0), & \beta \text{是} \alpha \text{的同阶无穷小} \\ 1, & \beta \text{是} \alpha \text{的等价无穷小} \end{cases}$$

$\alpha \sim \beta,\ \beta \sim \alpha$

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$, 则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

内容小结

4. 等价无穷小替换定理

常用等价无穷小：当 $x \to 0$ 时，

$\sin x \sim x$，　　$\arcsin x \sim x$，

$\tan x \sim x$，　　$\arctan x \sim x$，

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，　　$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$，

$\ln(1+x) \sim x$，　　$e^x - 1 \sim x$.

注： x 可理解为“口”.

定理. 设 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，

则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

注：等价无穷小乘除可替换，加减不可替换！