第四节
无穷小与无穷大

主要内容

一、无穷小
二、无穷大
三、无穷小与无穷大的关系

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

一、 无穷小

定义1 若 $x \to$ □时，函数 $f(x) \to 0$，则称函数 $f(x)$ 为 $x \to$ □时的无穷小.

例如：

$\lim\limits_{x \to 1}(x-1)=0$，函数 $x-1$ 为 $x \to 1$ 时的无穷小；

$\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x}=0$，函数 $\frac{1}{x}$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷小；

$\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=0$，函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 为 $x \to -\infty$ 时的无穷小.

定理1 (无穷小与函数极限的关系)

$$\lim_{x\to\square} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha,$$ 其中 α 为 $x\to\square$ 时的无穷小.

证: $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$

$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立.

$\xLeftrightarrow{\alpha=f(x)-A} \lim_{x\to x_0}\alpha=0,$ 且 $f(x)=A+\alpha.$

对自变量的其它变化过程类似可证.

二、 无穷大

定义2 若任给 $M>0$, 总存在 $\delta>0$ (正数 X), 使对一切满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ ($|x|>X$) 的 x，总有

$$|f(x)|>M \text{ 恒成立, } ①$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ ($x\to\infty$) 时为无穷大, 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \ (\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty).$$

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty$: $\quad f(x)>M$

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty$: $\quad f(x)<-M$

在定义中将①式改为

注意:

1. 无穷大不是很大的数, 它是描述函数的一种变化趋势.

2. 函数为无穷大, 必定无界. 但反之不真!

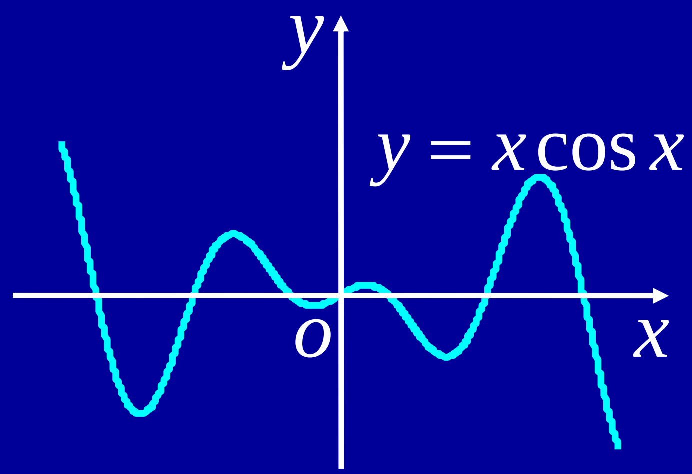
例如, $f(x) = x\cos x,\ x \in (-\infty, +\infty)$

$f(2n\pi) = 2n\pi \to \infty$ (当 $n \to \infty$)

但 $f(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 0$

$\therefore\ x \to \infty$ 时, $f(x)$

不是无穷大!

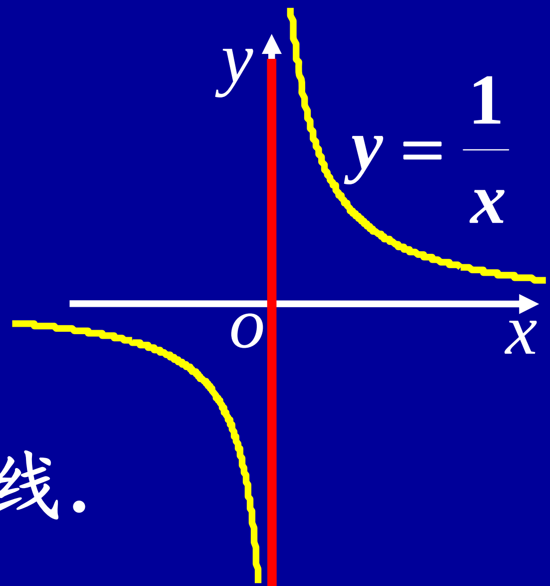


例. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

证: $[\forall\ M>0$, 欲使 $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{x}\right|=\dfrac{1}{|x|}>M$, 只要 $0<|x-0|<\dfrac{1}{M}$ 即可$]$

$\forall\ M>0,\ \exists\ \delta=\dfrac{1}{M}>0$, 当 $0<|x-0|<\delta$ 时,

恒有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|>M$, 由定义 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$.



说明: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

三、无穷小与无穷大的关系

定理2

若 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to\square} \dfrac{1}{f(x)}=0$;

若 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=0$, 且 $f(x)\neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to\square} \dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

第五节
极限运算法则

主要内容

1. 极限的四则运算法则
2. 有界函数与无穷小的乘积

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

1. 极限的四则运算法则

定理 1 若 $\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B$, 则有

1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB$

3) 如果还有条件 $B\neq 0$, 则有

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$$

注 定理 1 可推广到有限个函数和数列极限的情形.

定理 1 . 若 $\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B$, 则有

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$$

证: 因为 $\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B$，所以

$$f(x)=A+\alpha,\ \ g(x)=B+\beta$$

其中 α,β 为无穷小, 于是

$$f(x)\pm g(x)=(A+\alpha)\pm(B+\beta)$$
$$=(A\pm B)+(\alpha\pm\beta)$$

易知 $\alpha\pm\beta$ 是无穷小，由极限与无穷小的关系:

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B.$$

2. 有界函数与无穷小的乘积

定理2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证 设 u 是有界函数, α 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

因为 u 是有界函数, 不妨设 $|u| \le M$.

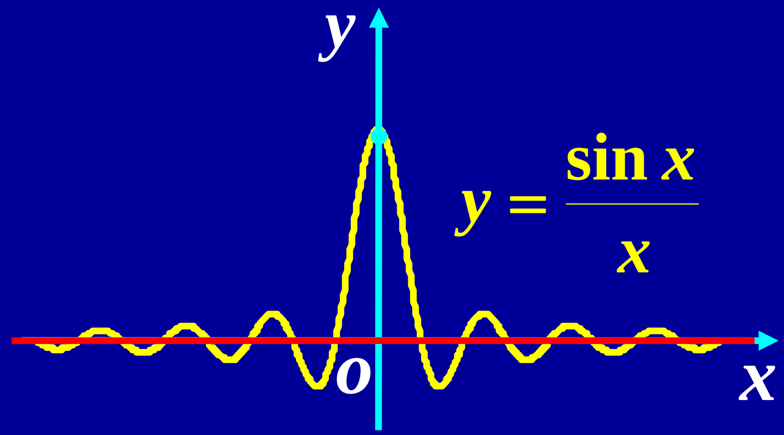
$\because \lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$, $\therefore \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,

当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$时, $|\alpha| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ 恒成立,

$|u\alpha| = |u||\alpha| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ 恒成立,

故 $\lim\limits_{x \to x_0} u\alpha = 0$, 即 $u\alpha$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

例 1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.



解: $\because\ \left|\sin x\right|\le 1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

利用定理 2 可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x\cdot\frac{1}{x}=0.$

说明: $y=0$ 是 $y=\frac{\sin x}{x}$ 的水平渐近线.

例 2. 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$.

解: $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}5x+\lim\limits_{x\to 2}3}$$

$$=\frac{2^3-1}{2^2-5\times 2+3}=-\frac{7}{3}.$$

注 分子分母极限均存在, 且分母不为 0, 用代入法.

例3. 求 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$. $[\frac{0}{0}$型$]$

解: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+3)}$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-1}{x+3}$

$= \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}.$

$x=3$ 时分母为 0,

分子为 0.

注 对 $\frac{0}{0}$ 型, 约去极限为0的公因子.

例4．求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$．

解： $x=1$ 时 分母 $=0$，分子 $\neq 0$.

$$\because \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{2x-3}=\frac{1^2-5\cdot 1+4}{2\cdot 1-3}=0,$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty.$$

例5. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+9}{5x^2+2x-1}$. $[\dfrac{\infty}{\infty}$ 型$]$

解: $x\to\infty$ 时, 分母 $\to\infty$, 分子 $\to\infty$.

分子分母同除以 x^2, 则

"抓大头"

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{4-3\frac{1}{x}+9\frac{1}{x^2}}{5+2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{4}{5}.$$

一般有如下结果:$(a_0 b_0 \neq 0, m, n$ 为非负常数 $)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当} n = m \\ 0, & \text{当} n > m \\ \infty, & \text{当} n < m \end{cases}$$

例6. 设 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ \dfrac{x^3+3x-1}{x^3+1}, & x\geq 0, \end{cases}$ 求下列极限:

$$\lim_{x\to 0} f(x),\quad \lim_{x\to -\infty} f(x),\quad \lim_{x\to +\infty} f(x),\quad \lim_{x\to \infty} f(x).$$

解: 1) $\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x-1) = -1,$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+3x-1}{x^3+1} = -1,$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = -1.$$

注 分段函数的分界点求极限, 考察左极限和右极限.

例6．设 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ \dfrac{x^3+3x-1}{x^3+1}, & x\ge 0, \end{cases}$ 求下列极限:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$.

解: 2) $\because \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (x-1) = -\infty,$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+3x-1}{x^3+1} = 1,$$

$\therefore \lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ 不存在.

例7. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$. $[0\cdot\infty$ 型$]$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

“抓大头”

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

注 对 $0\cdot\infty$ 型, 化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

例8. 若极限 $\lim f(x)$ 存在，$\lim g(x)$ 不存在，问 $\lim[f(x)+g(x)]$ 是否存在？为什么？

答: 不存在. 反证法: 如果该极限存在,

由 $g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$,

利用极限四则运算法则可知 $\lim g(x)$ 存在,

与已知条件矛盾.

例9. 试确定常数 a 使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-a\,x)=0$.

解: 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则 $t\to 0$,

$$原式=\lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{t^3}}-\frac{a}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}-a}{t}=0,$$

$$\therefore\quad \lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{t^3-1}-a\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}-a}{t}\cdot t=0,$$

故 $\quad -1-a=0,$

因此 $a=-1.$

作 业

习题1-4 2(2); 3; 5; 6*; 8.

习题1-5 1(3,5,6,8,10,11,12,13,14); 2(1,3); 3; 5.

下次课内容

第六节 极限存在准则 两个重要极限

第七节 无穷小的比较

内容小结

1. 无穷小

定义 若 $x \to □$ 时，函数 $f(x) \to 0$，

则称函数 $f(x)$ 为 $x \to □$ 时的无穷小.

定理 (无穷小与函数极限的关系)

$$\lim_{x \to □} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \alpha,$$

其中 α 为 $x \to □$ 时的无穷小.

内容小结

2. 无穷大

(1) 无穷大的定义

例: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty : \forall M > 0,\ \exists \delta > 0,$

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| > M$ 恒成立.

(2) 无穷小与无穷大的关系

定理:

若 $\lim\limits_{x \to \square} f(x) = \infty$, 则 $\lim\limits_{x \to \square} \dfrac{1}{f(x)} = 0;$

若 $\lim\limits_{x \to \square} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\lim\limits_{x \to \square} \dfrac{1}{f(x)} = \infty.$

内容小结

3. 极限运算法则

和差积商的极限 = 极限的和差积商

注意条件: 极限存在, 分母非 0.

4. 求函数极限的方法

分子分母极限均存在，且分母极限非 0, 用代入法.

对 $\frac{0}{0}$ 型，约去极限为 0 的公因子.

对 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，分子分母同除以最大项. “抓大头”

对 $0\cdot\infty$ 型，化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

有界函数与无穷小的乘积 是无穷小.

分段函数的分界点求极限，考察左极限和右极限.