第二节

数列的极限

主要内容

1. 数列
2. 数列的极限

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

1. 数列

定义 自变量取正整数的函数称为**数列**，

记作 $x_n = f(n)$ 或 $\{x_n\}$,

x_n 称为**通项**(一般项).

定义' 一列有序的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 称为**数列**，

记作 $x_n = f(n)$ 或 $\{x_n\}$.

例如 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$

注 数列的有界性

若$\exists M>0$，使$\forall x\in D$，$|f(x)|\le M$恒成立，称$f(x)$为有界函数.

若$\exists M>0$，使$\forall n\in \mathrm{N}^+$，$|x_n|\le M$恒成立，称$\{x_n\}$为有界数列.

若$\exists M$，使$\forall x\in D$，$f(x)\le M$恒成立，称$f(x)$有上界.

若$\exists M$，使$\forall n\in \mathrm{N}^+$，$x_n\le M$恒成立，称$\{x_n\}$有上界.

若$\exists m$，使$\forall x\in D$，$f(x)\ge m$恒成立，称$f(x)$有下界.

若$\exists m$，使$\forall n\in \mathrm{N}^+$，$x_n\ge m$恒成立，称$\{x_n\}$有下界.

2. 数列的极限

定义 若数列 $\{x_n\}$ 及常数 a 有下列关系：当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 a，则称 $\{x_n\}$ 的极限为 a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a \ (n\to\infty).$$

该定义称为数列极限的直观定义.

例如:

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$$

$$x_n=\frac{n}{n+1}\to 1\quad(n\to\infty)$$

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$$

$$x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\to 1\quad(n\to\infty)$$

收敛

再例如:

$$2\,,4\,,8\,,\;\cdots\;,2^n\;,\cdots$$

$$x_n = 2^n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

发散

$$1\,,-1\,,1\,,\;\cdots\;,(-1)^{n+1}\;,\cdots$$

$$x_n = (-1)^{n+1}$$ 趋势不定

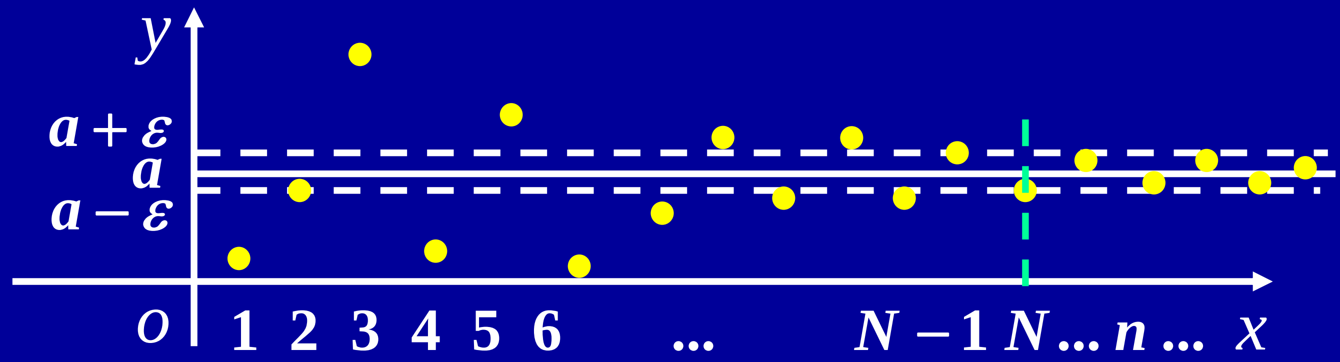
定义 若数列$\{x_n\}$及常数a有下列关系：

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$正整数N, 当$n > N$时, $|x_n - a| < \varepsilon$恒成立,

则称该数列$\{x_n\}$的极限为a, 记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a \ (n \to \infty)$$

几何解释：



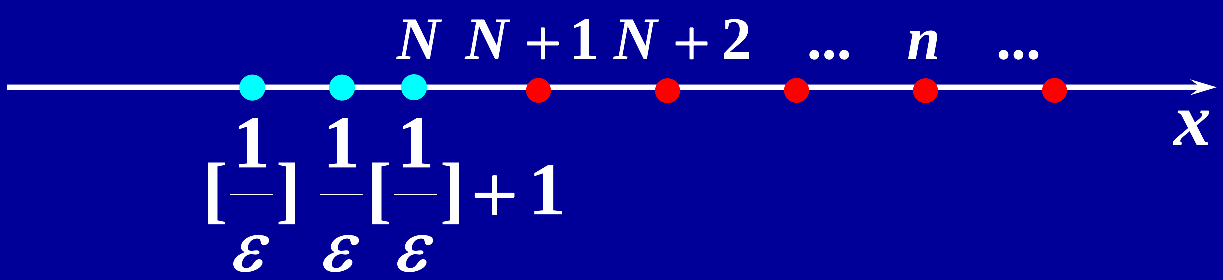
例1. 已知 $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限为 1.

证: [$\forall\varepsilon>0$, 欲使 $\left|x_n-1\right|=\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,

只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可.]

$\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 正整数 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$, 则当 $n>N$ 时, 恒有

$\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n}-1\right|<\varepsilon$, 由定义 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1.$



第三节
函数的极限

主要内容

一、自变量趋于无穷大时函数的极限

二、自变量趋于有限值时函数的极限

暨南大学电气信息学院苏保河主讲

一、自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果 x 的绝对值无限增大时，$f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \ (\text{当} x \to \infty \text{时}).$$

该定义称为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 的直观定义.

例. 填空:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} C = (\ C\ )$ (C为常数)

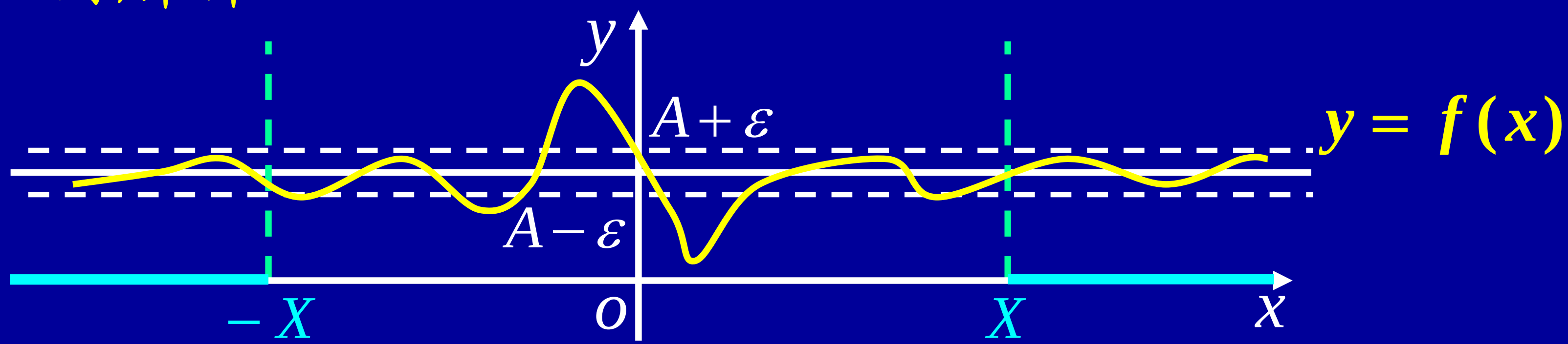
(2) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{x} - 1) = (\ -1\ )$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{3x+4} = (\ \frac{2}{3}\ )$

定义 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限, 记作

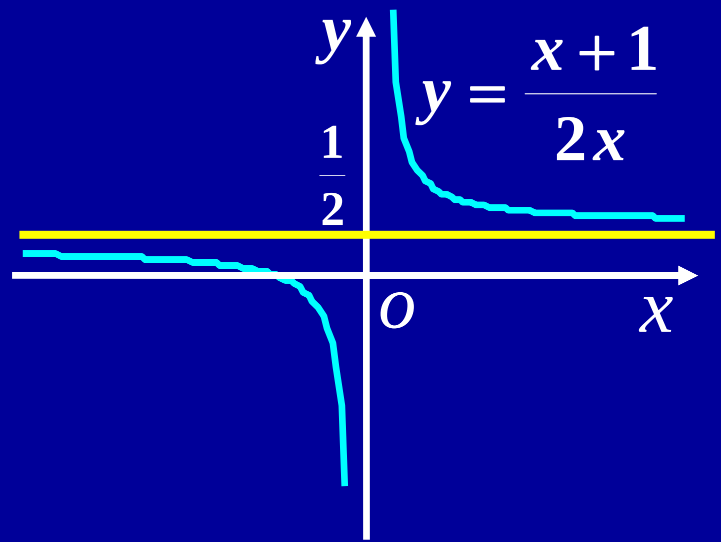
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A \ (\text{当} x \to \infty).$$

几何解释:



直线 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

例1. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x}=\dfrac{1}{2}.$



证: [$\forall\varepsilon>0$, 欲使 $\left|\dfrac{x+1}{2x}-\dfrac{1}{2}\right|$

$=\dfrac{1}{2|x|}<\varepsilon$, 只要 $|x|>\dfrac{1}{2\varepsilon}$ 即可.]

$\forall\varepsilon>0$, $\exists X=\dfrac{1}{2\varepsilon}>0$, 当 $|x|>X$ 时, $\left|\dfrac{x+1}{2x}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$

恒成立, 由定义 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x}=\dfrac{1}{2}.$

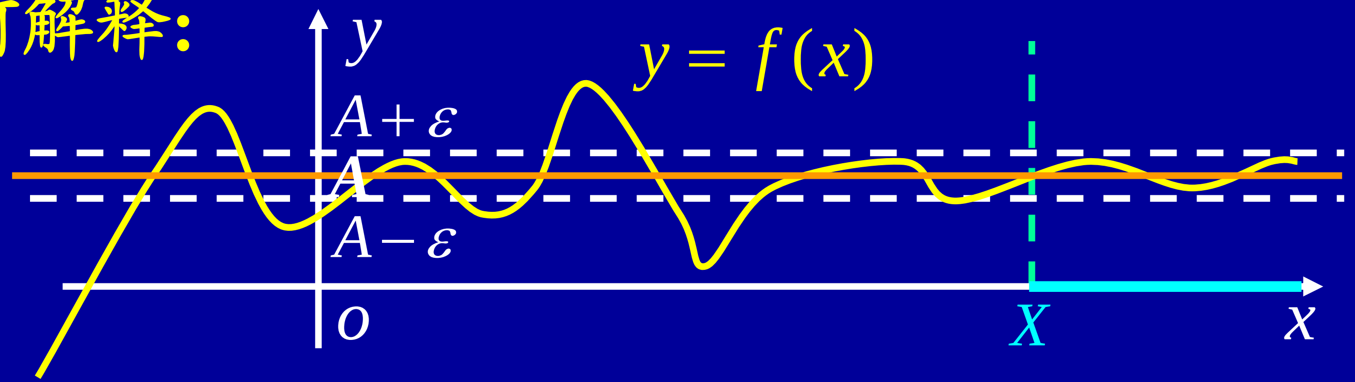
注: $y=\dfrac{1}{2}$ 为 $y=\dfrac{x+1}{2x}$ 的水平渐近线.

注1:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,\ \text{当}\ x>X\ \text{时},$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon\ \text{恒成立}.$$

几何解释:

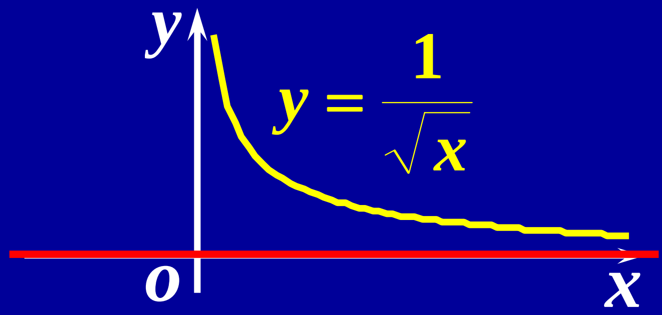


几何意义：直线 $y=A$ 仍是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

例如，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

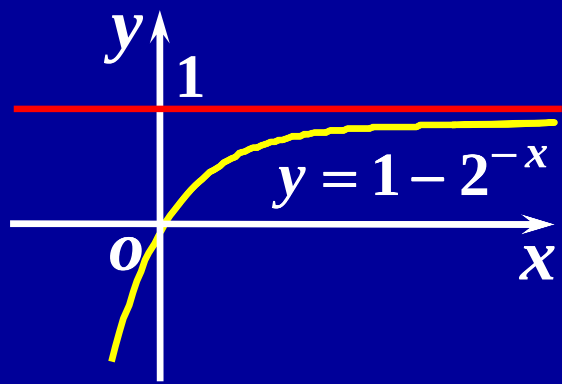
有水平渐近线 $y=0$;



又如，$f(x)=1-2^{-x}$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1,$$

有水平渐近线 $y=1$.



例2. 证明：如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=a$.

证. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$，由定义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，

当 $x>X$ 时，$|f(x)-a|<\varepsilon$ 恒成立.

所以$\exists$正整数 $N=[X]+1$，当 $n>N$ 时，必有 $n>X$，

从而 $|f(n)-a|<\varepsilon$ 恒成立，由定义 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=a$.

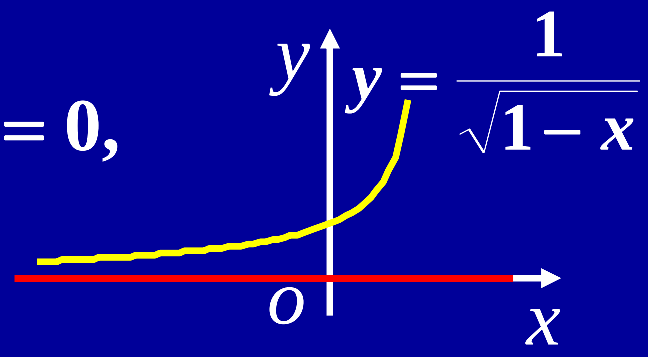
注2:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,\ \text{当 } x<-X \text{ 时},$$
$$|f(x)-A|<\varepsilon \text{ 恒成立}.$$

几何意义: 直线 $y=A$ 仍是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

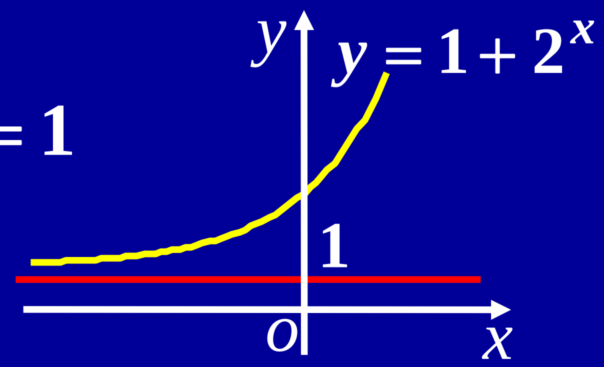
例如，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$,

有水平渐近线 $y=0$;



又如，$f(x)=1+2^x$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

有水平渐近线 $y=1$.



注3:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \rightleftharpoons \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$$

二、自变量趋于有限值时函数的极限

1 $x \to x_0$ 时函数极限的定义

定义： 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若自变量 x 无限接近于 x_0 时，$f(x)$ 无限接近于常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A \, (\text{当 } x \to x_0 \text{ 时}).$$

该定义称为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的直观定义.

例3. 填空:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} C = (\quad C \quad)$ (C为常数)

(2) $\lim\limits_{x \to 1}(2x - 1) = (\quad 1 \quad)$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = (\sqrt{x_0})$ $(x_0 > 0)$

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义,

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$

恒成立, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A \,(\text{当 } x \to x_0 \text{ 时}).$$

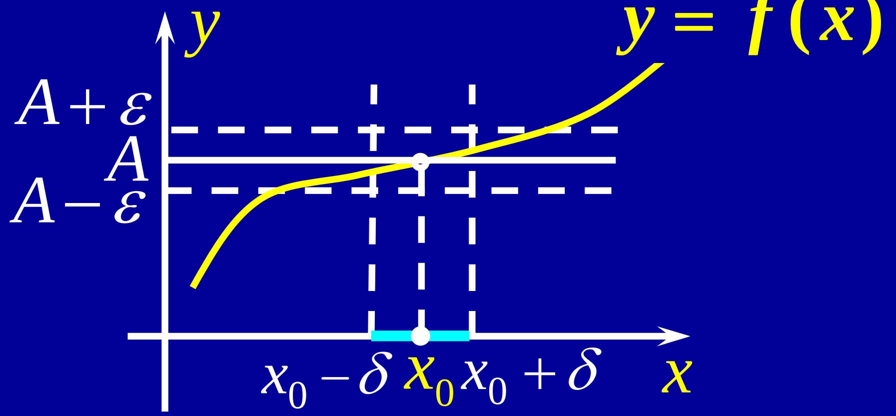
该定义就是著名的 $\varepsilon - \delta$ 极限定义.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当 } x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$$

时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立.

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

几何解释:



例4. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3(x-1)}=\dfrac{2}{3}.$

证：$[\ \forall\varepsilon>0$，欲使 $\left|f(x)-A\right|=\left|\dfrac{x^2-1}{3(x-1)}-\dfrac{2}{3}\right|$

$=\dfrac{1}{3}\left|x+1-2\right|=\dfrac{1}{3}\left|x-1\right|<\varepsilon$, 只要 $0<\left|x-1\right|<3\varepsilon$ 即可 $]$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta=3\varepsilon>0$，当 $0<\left|x-1\right|<\delta$ 时，必有

$\left|\dfrac{x^2-1}{3(x-1)}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$ 恒成立，由定义 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3(x-1)}=\dfrac{2}{3}.$

2 函数极限的性质

定理1 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$, 则存在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,
$(A<0)$

使当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时, $f(x)>0$.

$(f(x)<0)$

证: $\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\mathring{U}(x_0,\delta)$, 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时, 有 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$. 当 $A>0$时, 取正数 $\varepsilon=A$, 则存在相应的去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$, 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时, $f(x)>A-A=0$.

当 $A<0$时类似可证.

定理 2 若在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \ge 0$, 且 $(f(x) \le 0)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 则 $A \ge 0$.

$(A \le 0)$

证: 用反证法. 假设 $A < 0$, 则由定理 1:

存在 x_0 的某去心邻域, 使在该邻域内 $f(x) < 0$,

与已知条件矛盾.

同样可证 $f(x) \le 0$ 的情形.

思考: 若定理 2 中的条件改为 $f(x) > 0$, 是否必有 $A > 0$?

否! 反例: $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

3 左极限与右极限

左极限：$f(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立.

右极限：$f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立.

定理 3 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$

例5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ x^2, & x\geq 0.\end{cases}$

研究：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)=1;$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0;$

(3) 由 (1) (2) 可知，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

作 业

习题1-2 1(3,4,5); 3(2); 4*; 6*;

习题1-3 1; 2(3,5); 5(2); 6(1); 10*; 11*

注 *为选作（下同）

下次课内容

第四节 无穷小与无穷大

第五节 极限的运算法则

内容小结

1. 数列极限的" $\varepsilon - N$ "定义

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$正整数 N, 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$恒成立,

则称该数列$\{x_n\}$的极限为a, 记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a \ (n \to \infty)$$

内容小结

2. 函数极限的“$\varepsilon - X$”定义

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists X > 0,\ 当\ |x| > X\ 时,$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon\ 恒成立.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists X > 0,\ 当\ x > X\ 时,$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon\ 恒成立.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

内容小结

3. 函数极限的"$\varepsilon-\delta$"定义

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当 } x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$$

$$\text{时，}\left|f(x)-A\right|<\varepsilon \text{ 恒成立.}$$

$$f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

$$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{ 当 } x\in(x_0-\delta,x_0)\text{时，}$$

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon \text{ 恒成立.}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

内容小结

4. 函数极限的性质

保号性：若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$ $(A<0)$，则存在 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$，使当 $x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>0$ $(f(x)<0)$.

若在 x_0 的某去心邻域内函数 $f(x)\ge 0$ $(f(x)\le 0)$，且 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\ge 0$ $(A\le 0)$.

思考与练习

1. 若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 是否一定 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$?

不一定!

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} a x^2, & x \le 1 \\ 2x+1, & x > 1 \end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 存在, 则

$a = \underline{\quad 3 \quad}$.